

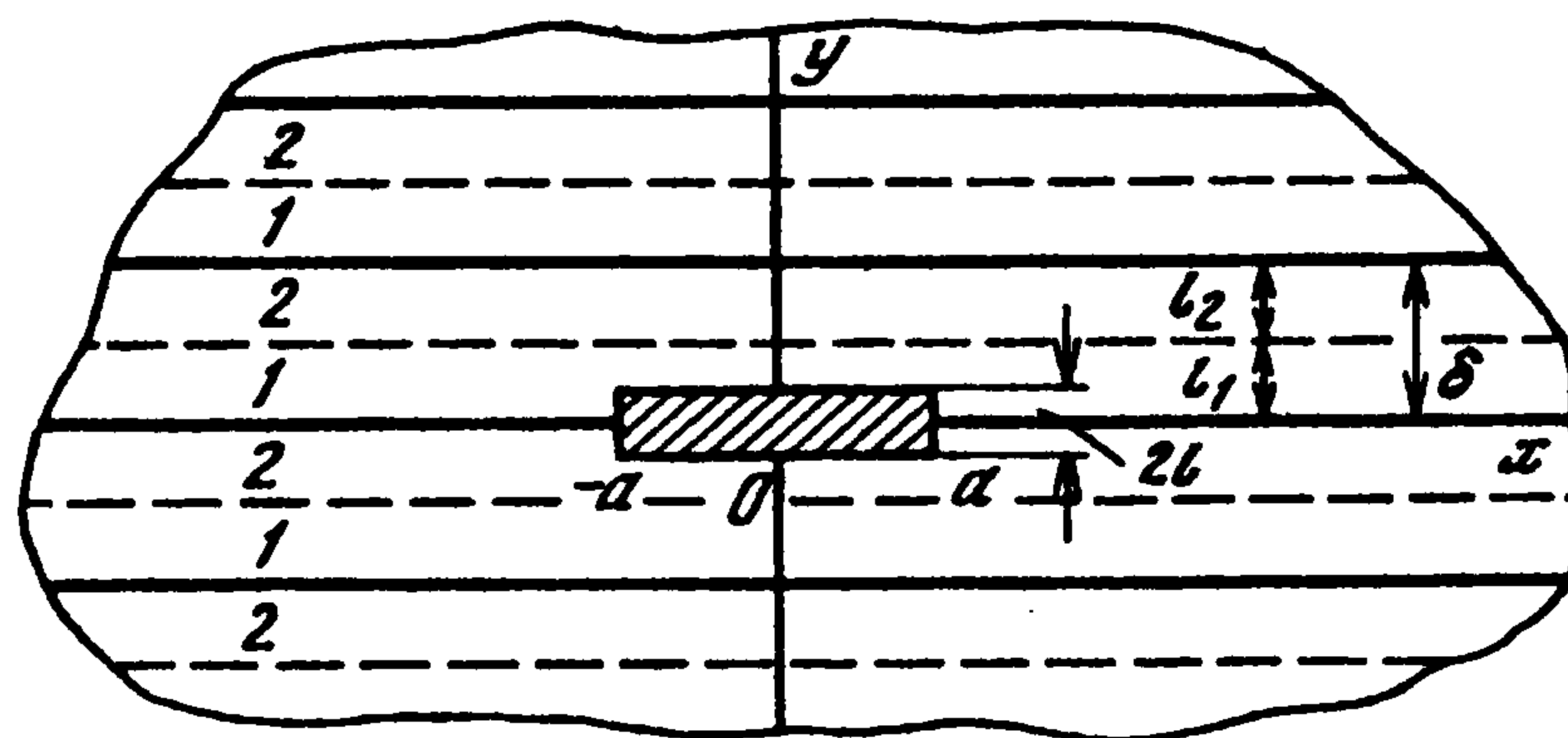
УДК 539.3

© 1995 г. А.А. Евтушенко, А. Качински, С.А. Матысяк

**НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ СЛОИСТОГО УПРУГОГО КОМПОЗИТА С ТОНКИМ ЛИНЕЙНЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ**

На основе метода гомогенизации упругой среды с макропериодической структурой [1, 2], исследуется плоская деформация кусочно-однородного тела, состоящего из периодической системы спаянных разнородных полос и содержащей на одной из прямых линий раздела материалов тонкое упругое включение конечной длины. При помощи представления напряжений и смещений через комплексные потенциалы [3] и условий взаимодействия тонкого упругого включения с матрицей [4–6] получена система четырех интегродифференциальных уравнений задачи, обладающая решением, пригодным для включений произвольной жесткости: от абсолютно податливого, моделирующего разрез, до абсолютно жесткого. В отличие от известных решений для дефектов на линии раздела материалов [7, 8], полученное решение не осциллирует вблизи вершины включения.

**1. Гомогенизированная модель микропериодического упругого композита.** Рассматривается упругое равновесие композиции, состоящей из периодической системы спаянных упругих разнородных полос 1 и 2 (фигура), под воздействием произвольной внешней нагрузки. Пусть  $\lambda_j, \mu_j$  ( $j = 1, 2$ ) – постоянные Ламе,  $l_j$  ( $j = 1, 2$ ) ширина полос 1 и 2 соответственно,  $\delta = l_1 + l_2$  – период композита и введем прямоугольную систему координат  $x, y$ , ось  $x$  которой совпадает с одной из прямых линий раздела материалов.



В соответствии с предположениями линейной теории упругости тел с микролокальными параметрами [1, 2] представим составляющие вектора упругих перемещений в виде

$$U(x, y) = u(x, y) + h(y)p(x, y), \quad V(x, y) = v(x, y) + h(y)q(x, y) \tag{1.1}$$

Здесь  $u, v$  – макроперемещения в направлении осей  $x$  и  $y$  соответственно,  $p, q$  – микролокальные параметры, удовлетворяющие (при отсутствии массовых сил) системе дифференциальных уравнений равновесия гомогенизированной микропериодической среды [8]:

$$(\bar{\lambda} + \bar{\mu})(u_{,xy} + v_{,yy}) + \bar{\mu}(v_{,xx} + u_{,yy}) + [\mu]p_{,x} + ([\lambda] + 2[\mu])q_{,y} = 0 \tag{1.2}$$

$$(\bar{\lambda} + \bar{\mu})(u_{,xx} + v_{,xy}) + \bar{\mu}(u_{,xx} + u_{,yy}) + [\mu]p_{,y} + [\lambda]q_{,x} = 0$$

$$(\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})q + [\lambda](u_{,x} + v_{,y}) + 2[\mu]v_{,y} = 0, \quad \hat{\mu}p + [\mu](u_{,y} + v_{,x}) = 0 \quad (1.3)$$

$$(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \equiv (\langle \lambda \rangle, \langle \mu \rangle), \quad ([\lambda], [\mu]) \equiv (\langle \lambda h_{,y} \rangle, \langle \mu h_{,y} \rangle)$$

$$(\hat{\lambda}, \hat{\mu}) \equiv (\langle \lambda (h_{,y})^2 \rangle, \langle \mu (h_{,y})^2 \rangle)$$

$h(\cdot)$  – заданная кусочно-линейная действительная функция формы, обладающая свойствами

$$|h(y)| < \delta, \quad h(y+d) = h(y), \quad \int_{y-\delta/2}^{y+\delta/2} h(t) dt = 0, \quad \forall y \in R \quad (1.4)$$

Символ  $\langle f(\cdot) \rangle$  означает среднее значение  $\delta$ -периодической функции  $f(\cdot)$ .

Подстановка представлений (1.1) в соотношения закона Гука для каждой из полос 1 и 2 приводит к выражениям

$$\sigma_{yj} = (\lambda_j + 2\mu_j)(v_{,y} + h_{,j}q + hq_{,y}) + \lambda_j(u_{,x} + hp_{,x})$$

$$\sigma_{xj} = (\lambda_j + 2\mu_j)(u_{,x} + hp_{,x}) + \lambda_j(v_{,y} + h_{,j}q + hq_{,y}) \quad (1.5)$$

$$\sigma_{xyj} = \mu_j(v_{,x} + hq_{,x} + u_{,y} + h_{,j}p + hp_{,y})$$

Здесь  $h_{,j}$  – производная  $h'_j(y)$  для  $y$ , принадлежащего  $j$ -й полосе.

Поскольку  $|h(y)| < \delta$ ,  $\forall y$ , то для достаточно малых значений  $\delta$  в соотношениях (1.2), (1.5) можно пренебречь слагаемыми, содержащими  $h$  (строгое обоснование этой операции в рамках нестандартного анализа дано в [2]). Отметим, что в уравнениях (1.5) нельзя опускать члены, содержащие производную  $h_{,j}$ .

Уравнения (1.1)–(1.5) описывают гомогенизированную модель микропериодического композита и существенно зависят от вида функции формы  $h(y)$ . Для рассматриваемой задачи  $\delta$ -периодическую функцию выбираем в виде

$$h(y) = \begin{cases} y - l_1/2, & 0 \leq y \leq l_1 \\ [\eta y + (1 + \eta)l_1/2]/(1 - \eta), & l_1 \leq y \leq \delta \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\eta = l_1/\delta \in (0, 1/2)$$

Тогда

$$h_{,j} = \begin{cases} 1, & j=1 \\ -\eta/(1-\eta), & j=2 \end{cases}$$

и из соотношений (1.3), (1.4) следует

$$\bar{\lambda} = \eta\lambda_1 + (1-\eta)\lambda_2, \quad \bar{\mu} = \eta\mu_1 + (1-\eta)\mu_2$$

$$[\lambda] = \eta(\lambda_1 - \lambda_2), \quad [\mu] = (\mu_1 - \mu_2) \quad (1.7)$$

$$\hat{\lambda} = \eta\lambda_1 + \eta^2\lambda_2/(1-\eta), \quad \hat{\mu} = \eta\mu_1 + \eta^2\mu_2/(1-\eta)$$

Исключив при помощи формул (1.3) микролокальные параметры  $p, q$  из уравнений (1.2), приходим к системе уравнений относительно макроперемещений  $u, v$  вида

$$A_2 u_{,xx} + (B+C)v_{,xy} + C u_{,yy} = 0, \quad A_1 v_{,yy} + (B+C)u_{,xy} + C v_{,xx} = 0 \quad (1.8)$$

$$A_1 = \bar{\lambda} + 2\bar{\mu} - \frac{([\lambda] + 2[\mu])^2}{\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}} > 0, \quad A_2 = \bar{\lambda} + 2\bar{\mu} - \frac{[\lambda]^2}{\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}} > 0$$

$$B = \bar{\lambda} - \frac{[\lambda]([\lambda] + 2[\mu])}{\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}} > 0, \quad C = \bar{\mu} - \frac{[\mu]^2}{\hat{\mu}} > 0$$

Подобным же образом, после исключения  $p, q$  из соотношений (1.5) получаем

$$\sigma_{yy}^{(j)} = B u_{,x} + A_1 v_{,y}, \quad \sigma_{xy}^{(j)} = C(u_{,y} + v_{,x}), \quad \sigma_{xx}^{(j)} = D_j v_{,y} + E_j u_{,x} \quad (1.9)$$

$$D_j = \frac{\lambda_j}{\lambda_j + 2\mu_j} A_1, \quad E_j = \frac{4\mu_j(\lambda_j + \mu_j)}{\lambda_j + 2\mu_j} + \frac{\lambda_j}{\lambda_j + 2\mu_j} B, \quad j = 1, 2$$

Система уравнений (1.8) и соотношения (1.9) описывают упругое равновесие среды, гомогенизированной в соответствии с уравнениями (1.5)–(1.6). С точностью до коэффициентов они совпадают с соответствующими равенствами для анизотропной среды [9]. Поэтому характеристики напряженно-деформированного состояния рассматриваемого композита могут быть на основании известной методики [3, 10] выражены через две голоморфные функции  $\Phi_j(\cdot)$  ( $j = 1, 2$ ). При этом следует различать два варианта значений механических постоянных полос 1 и 2:

*Случай  $\mu_1 \neq \mu_2$ .* Имеем (суммирование от  $k = 1$  до  $k = 2$ )

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, y) &= 2 \operatorname{Re} \sum \Phi_k(z_k), & \sigma_{xyj}(x, y) &= 2 \operatorname{Im} \sum t_k \Phi_k(z_k) \\ \sigma_{xj}(x, y) &= 2 \operatorname{Re} \sum C_{kj} \Phi_k(z_k), & j &= 1, 2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$u_{,x}(x, y) = -2 \operatorname{Re} \sum p_k \Phi_k(z_k), \quad v_{,x}(x, y) = 2 \operatorname{Im} \sum t_k p_{3-k} \Phi_k(z_k)$$

$$t_1 = (t_+ - t_-)/2, \quad t_2 = (t_+ + t_-)/2, \quad z_k = x + i t_k y, \quad k = 1, 2$$

$$t_{\pm} = \left[ \frac{(A_{\pm} + 2C)A_{\pm}}{A_1 C} \right]^{1/2}, \quad p_k = \frac{A_1 t_k^2 + B}{A_1 A_2 - B^2}$$

$$C_{kj} = \frac{\lambda_j}{\lambda_j + 2\mu_j} - \frac{4\mu_j(\lambda_j + \mu_j)}{\lambda_j + 2\mu_j} p_k, \quad k, j = 1, 2; \quad A_{\pm} = \sqrt{A_1 A_2} \pm B$$

*Случай  $\mu_1 = \mu_2$ .* Имеем:

$$\sigma_{yy}(x, y) = \operatorname{Re}[\Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} + \Phi_2(z)], \quad \sigma_{xyj}(x, y) = \operatorname{Im}[\Phi_2(z)] \quad (1.11)$$

$$\sigma_{xj}(x, y) = \operatorname{Re}[a_j \Phi_1(z) + a_j \overline{\Phi_1(z)} - \Phi_2(z)], \quad j = 1, 2$$

$$2C[u_{,x}(x, y) + v_{,x}(x, y)] = \kappa \Phi_1(z) - \overline{\Phi_1(z)} - \overline{\Phi_2(z)}$$

$$\kappa = \frac{A_1 + C}{A_1 - C}, \quad a_j = 1 + \frac{2C(\lambda_j + 2C - A_1)}{(A_1 - C)(\lambda_j + 2C)}, \quad j = 1, 2; \quad z = x + iy$$

**2. Модель тонкого упругого включения.** Условия взаимодействия упругого включения конечной длины  $2a$  и малой ширины  $2l$ , локализованного на прямой линии раздела материалов полос 1 и 2, (фигура) имеют вид [5, 8]:

$$\begin{aligned} (u_{1,x}^+ + u_{2,x}^-)l &= k_0 N - k_1 l(\sigma_{y1}^+ + \sigma_{y2}^-), & v_1^+ - v_2^- &= k_0 l(\sigma_{y1}^+ + \sigma_{y2}^-) - k_1 N \\ u_1^+ - u_2^- + l(v_{1,x}^+ + v_{2,x}^-) &= \mu_0^{-1} l(\sigma_{xy1}^+ + \sigma_{xy2}^-) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\sigma_{y1}^+ - \sigma_{y2}^- + Q_{,x} = 0, \quad \sigma_{xy1}^+ - \sigma_{xy2}^- + N_{,x} = 0$$

$$l(\sigma_{xy1}^+ + \sigma_{xy2}^-) - Q(x) = 0$$

$$N(x) = \int_{-l}^l \sigma_x(x, y) dy, \quad Q(x) = \int_{-l}^l \sigma_{xy}(x, y) dy, \quad k_0 = \frac{1 - \nu_0}{2\mu_0}, \quad k_1 = \frac{\nu_0}{2\mu_0}$$

Здесь  $\mu_0$  – модуль сдвига,  $\nu_0$  – коэффициент Пуассона материала включения, индекс плюс относится к соответствующим величинам на верхнем берегу включения, минус – на нижнем,  $N(x)$  – осевое усилие,  $q(x)$  – перерезывающая сила в произвольном сечении включения. Система уравнений (2.1) описывает деформацию поверхностей включения под дейст-

вием приложенных внешних усилий и с точностью  $O(l^2)$  учитывает деформации продольного растяжения и поперечного изгиба прослойки [6].

3. Система интегральных уравнений. В силу линейности рассматриваемой задачи

$$\sigma = \sigma^0 + \sigma^*, \quad u = u^0 + u^* \quad (3.1)$$

( $\sigma^0, u^0$  – известные тензор и вектор упругих смещений многослойного композита без включения,  $\sigma^*, u^*$  – решение соответствующей возмущенной задачи). Учитывая малую толщину включения, его наличие можно моделировать скачками напряжений и производных от смещений на осевой линии прослойки

$$\begin{aligned} \sigma_{y1}^*(x, +0) - \sigma_{y2}^*(x, -0) &= f_1^*(x), & \sigma_{xy1}^*(x, +0) - \sigma_{xy2}^*(x, -0) &= f_2^*(x) \\ u_{,x}^*(x, +0) - u_{,x}^*(x, -0) &= f_3^*(x), & v_{,x}^*(x, +0) - v_{,x}^*(x, -0) &= f_4^*(x) \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$f_k^*(x) = \begin{cases} f_k(x), & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

Из условий (3.2) с использованием соотношений (1.10), после решения соответствующих задач линейного сопряжения для разных вариантов, рассмотренных в разд. 1, получаем следующие результаты.

Случай  $\mu_1 \neq \mu_2$ . Имеем

$$\begin{aligned} \Phi_j(z_j) &= \frac{(-1)^j}{p_1 - p_2} \left[ p_{3-j} w_1(z_j) - i \frac{p_j}{t_j} w_2(z_j) + w_3(z_j) + i \frac{1}{t_j} w_4(z_j) \right] \\ w_k(z_j) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{f_k(t) dt}{t - z_j}, \quad j = 1, 2; \quad k = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Подставляя формулы (3.3) в соотношения (1.10), переходя к пределу  $y \rightarrow +0$  при учете формул (3.2) и выражения [10]

$$w_k(x, \pm 0) = \pm \frac{1}{2} f_k(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a \frac{f_k(t) dt}{t - x}, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

приходим к соотношениям:

$$\begin{aligned} \sigma_{y1}(x, +0) &= \sigma_{y1}^0(x) + f_1(x)/2 + m_{11} S_2(x) + m_{21} S_4(x) \\ \sigma_{xy1}(x, +0) &= \sigma_{xy1}^0(x) + f_2(x)/2 - m_{31} S_1(x) + m_{41} S_3(x) \\ u_{,x}(x, +0) &= u_{,x}^0(x) + f_3(x)/2 - m_{51} S_2(x) + m_{61} S_4(x) \\ v_{,x}(x, +0) &= v_{,x}^0(x) + f_4(x)/2 - m_{71} S_1(x) + m_{81} S_3(x), \quad -\infty < x < \infty \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь

$$S_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{f_k(t) dt}{t - x}, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

$$m_{11} = m_{61} = \frac{p_1 t_2 - p_2 t_1}{m}, \quad m_{21} = \frac{t_2 - t_1}{m}, \quad m_{31} = m_{81} = t_1 t_2 m_{11},$$

$$m_{41} = t_1 t_2 m_{21}, \quad m_{51} = \frac{p_1^2 t_2 - p_2^2 t_1}{m}, \quad m_{71} = t_1 t_2 m_{51}, \quad m = t_1 t_2 (p_1 - p_2)$$

Случай  $\mu_1 = \mu_2$ . Имеем

$$\begin{aligned} (1 + \kappa) \Phi_1(z) &= w_1(z) - i w_2(z) + 2C w_3(z) + 2iC w_4(z) \\ (1 + \kappa) \Phi_2(z) &= (\kappa - 1) w_1(z) - i(1 + \kappa) w_2(z) - 4C w_3(z) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Подставляя соотношения (3.5) в (1.11) и переходя к пределу при  $y \rightarrow +0$ , получаем выражения, отличающиеся от (3.4) заменой  $m_{11}, m_{21}, \dots, m_{81}$  на  $m_{21}, m_{22}, \dots, m_{82}$ , причем

$$m_{12} = m_{32} = m_{62} = \frac{\kappa - 1}{2(1 + \kappa)}, \quad m_{22} = m_{42} = \frac{2C}{1 + \kappa}, \quad m_{52} = m_{72} = \frac{\kappa}{2C(1 + \kappa)}, \quad m_{82} = m_{11}$$

Подставляя полученные соотношения в условия взаимодействия тонкого упругого включения с кусочно-однородной средой (2.1), и учитывая представления (3.1), приходим к системе четырех сингулярных интегродифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \lambda_{1k} S_2(\xi) + \lambda_{2k} S_4(\xi) + \Lambda_1 \varphi_2(\xi) &= F_1(\xi) \\ \lambda_{3k} S_2(\xi) + \lambda_{4k} S_4(\xi) + \Lambda_2 \varphi_2(\xi) - \Lambda_3 \varphi_4(\xi) &= F_2(\xi) \\ \lambda_{5k} S_1(\xi) + \lambda_{6k} S_3(\xi) - \Lambda_3 \varphi_3(\xi) &= F_3(\xi) \\ \lambda_{7k} S_1(\xi) + \lambda_{8k} S_3(\xi) + \Lambda_3 \varphi_1(\xi) &= F_4(\xi), \quad |\xi| < 1, \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} S_j(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi'_j(\tau) d\tau}{\tau - \xi}, \quad \varphi'_j(\xi) = f_j(a\xi), \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad \tau = \frac{t}{a} \\ F_1(\xi) &= -k_1 \sigma_{y1}^0(a\xi) - u^{0'}(a\xi) + \Lambda_1 l_0 N(-a), \quad F_2(\xi) = -k_0 \sigma_{y1}^0(a\xi) + \Lambda_2 l_0 N(-a) + \Lambda_3 V(-a) \\ F_3(\xi) &= \sigma_{xy1}^0(a\xi) / \mu_0 + v^{0'}(a\xi) + \Lambda_3 V(-a), \quad F_4(\xi) = -\sigma_{xy1}^0(a\xi) + T(-a) \\ \lambda_{1k} &= k_1 m_{1k} - m_{5k}, \quad \lambda_{2k} = k_1 m_{2k} + m_{6k}, \quad \lambda_{3k} = \lambda_{4k} = k_0 m_{1k} \\ \lambda_{5k} &= m_{7k} - m_{3k} / \mu_0, \quad \lambda_{6k} = m_{8k} - m_{4k} / \mu_0, \quad \lambda_{7k} = -m_{3k} \\ \lambda_{8k} &= m_{4k}, \quad k = 1, 2, \quad \Lambda_1 = k_0 / l_0, \quad \Lambda_2 = k_1 / l_0, \quad \Lambda_3 = 1 / l_0, \quad l_0 = l / a \end{aligned}$$

Искомые функции  $\varphi'_j(\xi)$  должны удовлетворять дополнительным условиям

$$\int_{-1}^1 \varphi'_j(\tau) d\tau = C_j, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (3.7)$$

$$C_1 = T(-a) - T(a), \quad C_2 = N(-a) - N(a), \quad C_3 = U(a) - U(-a), \quad C_4 = V(a) - V(-a)$$

Осевое усилие  $N(\cdot)$ , перерезывающую силу  $T(\cdot)$ , продольное  $U(\cdot)$  и вертикальное  $V(\cdot)$  смещения на торцах  $w = \mp a$  включения вычисляем по априорным формулам [7].

В случае абсолютно жесткого включения ( $\mu_0 = \infty$ ) имеем  $f_3(x) = f_4(x) = 0$ , и система уравнений (3.6) преобразуется в одно сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{[\varphi'_1(\tau) + i\varphi'_2(\tau)]}{\tau - \xi} d\tau = -\frac{1}{m_{5k}} [u^{0'}(a\xi) - i v^{0'}(a\xi)], \quad |\xi| < 1, \quad k = 1, 2 \quad (3.8)$$

Если же  $\mu_0 = 0$ , то получаем  $f_1(x) = f_2(x) = 0$ , и интегральное уравнение для разреза на прямой линии раздела материалов двух сред имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \frac{[\varphi'_3(\tau) + i\varphi'_4(\tau)]}{\tau - \xi} d\tau = \frac{1}{m_{2k}} [\sigma_{y1}^0(a\xi) - i \tau_{xy1}^0(a\xi)], \quad |\xi| < 1, \quad k = 1, 2 \quad (3.9)$$

Интегральные уравнения (3.8), (3.9) имеют одинаковую структуру и допускают решение в замкнутом виде [10].

В случае упругого тонкостенного включения, решение системы уравнений (3.6), (3.7) представим в форме

$$u'_0(\xi) = (1 - \xi^2)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} X_n^j T_n(\xi), \quad |\xi| < 1, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (3.10)$$

( $T_n(\cdot)$  – полиномы Чебышева первого рода). Тогда из (3.7) следует:  $X_0^j = C_j / \pi$ .

Подстановка выражений (3.10) при учете того, что

$$\varphi_j(\xi) = X_0^j \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin \xi \right) - (1 - \xi^2)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n^j}{n} U_{n-1}(\xi), \quad j = 1, 2, 3, 4$$

( $U_n(\cdot)$  – полиномы Чебышева второго рода), в интегральные уравнения (3.6) и обычная процедура метода ортогональных полиномов приводят к четырем бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, первая из которых имеет вид (суммирование от  $m = 1$  до  $\infty$ )

$$\lambda_{1k} X_n^2 + \lambda_2 X_n^4 - \Lambda_1 \sum B_{n,m} X_m^2 = \alpha_n^1 - \Lambda_1 l_0 X_0^2 \beta_n$$

$$\alpha_n^j = \frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 F_j(\xi) U_{n-1}(\xi) \sqrt{1 - \xi^2} d\xi, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad \beta_n = \pi \delta_{1,n} \quad (3.11)$$

$$B_{n,m} = \begin{cases} \frac{8n[1 + (-1)^{n+m}]}{\pi[m^2 - (n-1)^2][n^2 - (m+1)^2]}, & m \neq n-1, \quad m \neq n+1 \\ 0, & m = n-1, \quad m = n+1 \end{cases}$$

( $\delta_{m,n}$  – символы Кронекера). Остальные уравнения имеют сходную структуру.

При помощи полученных ранее оценок [5] можно показать, что система (3.11) квази-регулярна для любых значений геометрических и физических параметров задачи, и следовательно, к ее решению с помощью ЭВМ применим метод редукции. Определив коэффициенты  $X_m^j$ , ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) разложений (3.10), по формулам (3.3), (3.5) находим комплексные потенциалы  $\Phi_j(\cdot)$  ( $j = 1, 2$ ) и, таким образом, напряжения и смещения (1.10), (1.11) в произвольной точке композита.

Отметим, что при  $[\mu] = 0$ , положив дополнительно  $\lambda_1 = \lambda_2$ , из системы интегральных уравнений (3.6) получаем известные результаты теории тонких упругих включений в однородной среде [4, 5, 7].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Wozniak Cz. A nonstandard method of modelling thermoelastic periodic composites // Intern. J. Engng. Sci. 1987. V. 25. № 5. P. 483–499.
2. Matysiak S.J., Wozniak Cz. Micromorphic effects in a modelling of periodic multilayered elastic composites // Intern. J. Engng. Sci. 1987. V. 25. № 5. P. 549–559.
3. Kaczynski A., Matysiak S.J. Complex potentials in twodimensional problems of periodically layered elastic composites // Mechanika teoretyczna i stosowana, 1987. V. 25. N4. P. 635–643.
4. Чобанян К.С., Хачикян А.С. Плоское деформированное состояние упругого тела с тонкостенным гибким включением // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1967. Т. 20. № 6. С. 19–29.
5. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
6. Хачикян А.С. Равновесие неоднородной упругой плоскости с тонкостенным упругим включением // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1968. Т. 21. № 4. С. 20–29.
7. Грилицкий Д.В., Сулим Г.Т. Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 520–529.
8. Качински А., Матысяк С.Я. Некоторые краевые задачи периодических слоистых упругих композитов. / Сб. докл. 1-й конф. по механике. Результаты научных исследований и достижения многостороннего научного сотрудничества Академий наук социалистических стран. Прага, 1987. Т. 3. С. 199–202.
9. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
10. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.

Львов, Варшава

Поступила в редакцию  
10. VI. 1993