ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 59, Вып. 4, 1995

УДК 539.3

© 1995 г. С.М. Айзикович

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ПЛАСТИНЫ С НЕОДНОРОДНЫМ ПО ГЛУБИНЕ ОСНОВАНИЕМ

Рассматриваются уравнения контактной задачи о взаимодействии круглой пластины с неоднородным по глубине полупространством. Закон изменения коэффициентов Ламе в полупространстве по глубине носит общий характер – градиентное (непрерывно неоднородное) или слоистое полупространство. Используется разложение контактных давлений под пластиной и ее прогибов в ряды [1], члены которых – собственные функции уравнения изгиба пластины при краевых условиях, совпадающих с условиями ее закрепления. Для решения парного интегрального уравнения применяется двухсторонний асимптотический метод [2, 3]. Доказывается, что в отличие от методов ортогональных многочленов, асимптотических методов типа "больших λ" и "малых λ" данный метод эффективен как для жестких, так и для гибких пластин и является асимптотически точным при $\lambda \to 0$ и $\lambda \to \infty$ (λ – характерный геометрический параметр, равный отношению толщины неоднородного слоя к радиусу пластины). Проводится анализ влияния различных законов изменения с глубиной коэффициентов Ламе в полупространстве на распределение контактных давлений под плитой, ее прогибы и осадку поверхности полупространства вне плиты.

1. Контактная задача о взаимодействии круглой пластины с неоднородным по глубине полупространством сводится к решению системы уравнений [4]

$$L^0 w(r) = D^{-1}[p(r) - q(r)], \quad 0 \leqslant r \leqslant 1 \tag{1.1}$$

$$\int_0^\infty Q(\alpha) L(\lambda\alpha) J_0(\alpha r)\, d\alpha = s\lambda w(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant 1$$

$$\int_0^\infty Q(\alpha) J_0(\alpha r)\, d\alpha = 0, \quad r > 1 \tag{1.2}$$

$$r = r'/R, \quad s = \Theta_0 R^3/D, \quad \Theta_0 = \Theta(0)$$

$$\Theta(z) = 2M(z)(M(z) + \Lambda(z))/(2M(z) + \Lambda(z))$$

где L^0 – дифференциальный оператор изгиба пластины в цилиндрической системе координат, $p(r)$ – распределенная нагрузка, $q(r)$ – контактные напряжения под пластиной, $w(r)$ – ее прогибы. Пластина радиуса R свободно лежит на изотропном полупространстве, коэффициенты Ламе которого с глубиной изменяются по закону

$$\Lambda = \Lambda_0(z), \quad M = M_0(z), \quad -H \leqslant z \leqslant 0$$

$$\Lambda = \Lambda_0(-H), \quad M = M_0(-H), \quad -\infty < z < -H$$

где $\Lambda_0(z)$, $M_0(z)$ – произвольные непрерывные функции глубины (переменная z). Здесь $\lambda = H/R$ – характерный геометрический параметр, s – параметр, характеризующий изгибную жесткость пластины, D – изгибная жесткость пластины.

Функция $w(r)$ должна удовлетворять на контуре пластины условиям свободного края

$$r=1,\quad \frac{d^2w}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}=0,\quad \frac{d}{dr}\Delta w=0 \tag{1.3}$$

где ν – коэффициент Пуассона пластины, Δ – оператор Лапласа в полярных координатах, и быть ограниченной в начале координат вместе с дифференциальным выражением, соответствующим изгибающему моменту.

В общем случае произвольной непрерывной неоднородности трансформанта ядра $L(\alpha)$ строится численно методом, изложенным в [5], и при выполнении условий:

$$\min_{z\in(0;-\infty)}\Theta(z)\geqslant c_1>0,\quad \max_{z\in(0;-\infty)}\Theta(z)\leqslant c<\infty,\quad \lim_{z\to-\infty}\Theta(z)=\mathrm{const} \tag{1.4}$$

обладает свойствами [5, 6]

$$L(\alpha)=A+B|\alpha|+O(\alpha^2),\quad \alpha\to 0,\quad A=\lim_{z\to-\infty}\Theta(0)/\Theta(z)$$

$$L(\alpha)=1+C|\alpha|^{-1}+O(\alpha^{-2}),\quad \alpha\to\infty,\quad B,C=\mathrm{const} \tag{1.5}$$

2. Ниже считаем известными определения классов функций $C^k(0,1)$, $L^2(0,1)$ [7], $C_{1/2}^{(0)+}(-1,1)$ [8]. Пусть функция $f\in C^4(0,1)$, (или более общее $f\in L^2(0,1)$) и удовлетворяет краевым условиям (1.3). Тогда на $[0, 1]$ ее можно представить в виде ряда по формам собственных колебаний круглой пластины со свободным краем [9]

$$f(r)=\sum_{m=0}^{\infty}f_m\varphi_m(r),\quad 0\leqslant r\leqslant 1,\quad f_m=\int_0^1 f(\rho)\varphi_m(\rho)\rho d\rho \tag{2.1}$$

$$\varphi_0=2^{1/2},\quad \varphi_m(r)=A_m[J_0(k_m r)-B_m I_0(k_m r)]$$
$$B_m=J_1(k_m)/I_1(k_m) \tag{2.2}$$

Значения A_m и k_m для $m = 0, 1, \dots, 10$ приведены в [1]. Если $f\in L^2(0,1)$, то равенство (2.1) понимается в том смысле, что

$$\lim_{k\to\infty}\left\|f-\sum_{m=0}^{k}f_m\varphi_m(r)\right\|_{L^2_{(0,1)}}=0,\quad \|f\|^2_{L^2_{(0,1)}}=\sum_{m=0}^{\infty}f_m^2$$

– равенство Парсеваля.

Предположим, что функцию прогиба плиты можно представить в виде ряда (2.1)

$$w(r)=\sum_{m=0}^{\infty}w_m\varphi_m(r),\quad 0\leqslant r\leqslant 1;\quad w_m=\int_0^1 w(\rho)\varphi_m(\rho)\rho d\rho \tag{2.3}$$

Учитывая линейность задачи, заключаем, что выражение для контактных давлений имеет вид линейной комбинации из частных решений $q_m(r)$ с теми же коэффициентами w_m, что и для функций прогиба $w(r)$ в (2.3):

$$q(r)=\sum_{m=0}^{\infty}w_m q_m(r),\quad 0\leqslant r\leqslant 1 \tag{2.4}$$

Частные решения $q_m(r)$ $(m = 0, 1, \dots)$ определим из интегрального уравнения (1.2). Метод построения и полученный конкретный вид функций $q_m(r)$ приведен в [10]. Будем говорить, что функция $L(\alpha)$ принадлежит классу $\Pi_N(\Sigma_M, \Sigma_{N,M})$, если имеет вид соответственно:

$$L(\lambda\alpha)=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{N}(\alpha^2+A_i^2\lambda^{-2})(\alpha^2+B_i^2\lambda^{-2})^{-1}\equiv L_N(\lambda\alpha)\in\Pi_N\\ \sum\limits_{k=1}^{M}C_k\lambda^{-1}|\alpha|(\alpha^2+D_k^2\lambda^{-2})\equiv L_M^{\Sigma}(\lambda\alpha)\in\Sigma_M\\ L_N(\lambda\alpha)+L_M^{\Sigma}(\lambda\alpha)\in S_{N,M}\end{cases}$$

Здесь A_i, B_i ($i = 1, 2, \dots, N$), C_k, D_k ($k = 1, 2, \dots, M$) – некоторые постоянные, $(A_i - A_k) \times \times (B_i - B_k) \neq 0$, $i \neq k$.

Было доказано [8], что при условии, что функция $L(\alpha)$ обладает свойствами(1.4), она допускает аппроксимацию выражениями вида

$$L(\lambda\alpha) = L_N(\lambda\alpha) + L_\infty^\Sigma(\lambda\alpha) \tag{2.5}$$

Ниже интегральный оператор, соответствующий функции $L(\alpha)$, принадлежащий классу X, будем также обозначать через X.

Используя (2.5), перепишем (1.2) в операторном виде

$$\Pi_N q + \Sigma_\infty q = f \tag{2.6}$$

В (2.6) оператор Π_N соответствует в (2.5) функции $L(\alpha)$ класса Π_N, а Σ_∞ – функции $L(\alpha)$ класса Σ_M, $M = \infty$.

Будем говорить, что для управления (1.2) выполнено условие A, если для него при $L(\alpha) \in \Pi_N$ можно построить замкнутое решение, следуя [11]. Будем обозначать это решение

$$q^N = \Pi_N^{-1} f \tag{2.7}$$

Иными словами, условие A означает, что для функций $f(x)$, принадлежащих некоторому классу $W(c, d)$, существует функция $q(x)$, принадлежащая некоторому классу $V(c, d)$, такая, что имеет место равенство (2.7). Из представления (2.7) следует, что

$$\left\| q^N \right\|_{V(c,d)} \leqslant m(\Pi_N) \|f\|_{W(c,d)}, \quad m(\Pi_N) = \text{const} \tag{2.8}$$

Будем обозначать $m(X)$ некоторую постоянную, зависящую от конкретного вида принадлежащей X функции.

Было доказано [8], что при выполнении условий (1.4) уравнение (1.2) однозначно разрешимо в пространстве $\overset{(0)+}{C}_{1/2}(-1,1)$ для $\varphi_m(r)$ вида (2.2) при $0 < \lambda < \lambda^*$ и $\lambda > \lambda^a$, где λ^* и λ^a – некоторые фиксированные значения λ, при этом имеет место оценка

$$\|q(r)\|_{\overset{(0)+}{C}_{1/2}(-1,1)} \leqslant m(\Pi_N, \Sigma_\infty) M_\varphi(-1,1) \tag{2.9}$$

Таким образом, λ можно подбирать так, что оператор $\Pi_N^{-1}\Sigma_\infty$ будет оператором сжатия [7], и выражение (2.7) представляет собой асимптотически точное решение уравнения (2.6) при $\lambda \to 0$ и $\lambda \to \infty$.

3. Подставим в правую часть равенства (1.2) вместо $w(r)$ m-ю собственную функцию $\varphi_m(r)$. Используя полученные ранее результаты [8], можно выписать замкнутое приближенное решение уравнения (1.2) вида (2.7), относительно $q_m^N(r)$, [10].

В свою очередь контактные давления $q_m^N(r)$ можно представить в виде ряда (2.1). Имеем

$$q_m^N(r) = \sum_{j=0}^{\infty} \Sigma_j^m \varphi_j(r), \quad \Sigma_j^m = \int_0^1 q_m^N(r)\varphi_j(\rho)\rho d\rho \tag{3.1}$$

Конкретный вид Σ_j^m приведен в [10].

Считаем, что функция $p(r) \in C^4(0, 1)$ (или в более общем виде $p(r) \in L^2(0, 1)$), т.е. может быть представлена в виде ряда

$$p(r) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m \varphi_m(r), \quad p_m = \int_0^1 p(\rho)\varphi_m(\rho)\rho d\rho \tag{3.2}$$

Тогда, подставив разложения (2.3), (3.1), (3.2) в (1.1), имеем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов w_m, которую запишем в каноническом виде [7]

$$w_m - \frac{a}{k_m^4}\sum_{j=0}^{\infty} w_j \mathrm{E}_j^m = \frac{p_m}{k_m^4}, \quad m=0,1,2,\ldots; \ a=-1 \tag{3.3}$$

Имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left|\frac{p_m}{k_m^4}\right|^2 \leqslant M\sum_{m=0}^{\infty}|p_m|^2 < \infty$$

при наложенных ограничениях на $p(r)$.

Из оценки (2.9) и условия равновесия пластинки

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 q(r)rdrd\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 p(r)rdrd\varphi$$

Имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty}k_m^{-8}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\mathrm{E}_j^m\right|^2 \leqslant \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\left|\mathrm{E}_j^m\right|^2 \leqslant M(\Pi_N,\Sigma_\infty)\sum_{m=0}^{\infty}|p_m|^2 < \infty$$

Таким образом, на основании теоремы 3а ([7], с. 503), если знчение $a = -1$ не является характеристическим значением для системы (3.3), то она может быть решена методом редукции (путем замены системой из n уравнений с n неизвестными):

$$w_m - \frac{a}{k_m^4}\sum_{j=0}^{n-1} w_j \mathrm{E}_j^m = \frac{p_m}{k_m^4}, \quad m=0,1,\ldots,n-1; \ a=-1 \tag{3.4}$$

причем при n, достаточно больших, система (3.4) разрешима и имеет место сходимость приближенных решений к точному.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. При выполнении условий (1.4), если $p(r) \in V_i(0, 1)$, $i = 0$ или $i = 1$ ($V_1(0, 1) \equiv C^4(0, 1)$, $V_2(0, 1) \equiv L^2(0, 1)$), система уравнений (1.1), (1.2) однозначно разрешима для $w(r) \in V_i(0, 1)$ ($i = 0$ или $i = 1$) $q(r) \in \overset{(0)+}{C}_{1/2}(-1, 1)$ при $0 < \lambda < \lambda^*$ и $\lambda > \lambda^a$, где λ^* и λ^a – некоторые фиксированные значения λ. При этом имеет место оценка

$$\|w(r)\|_{V_i(0,1)} \leqslant m(\Pi_N,\Sigma_\infty)\|p(r)\|_{V_i(0,1)}$$

$$\|q(r)\|_{\overset{(0)+}{C}_{1/2}(-1,1)} \leqslant m_1(\Pi_N,\Sigma_\infty)\|p(r)\|_{V_i(0,1)}$$

4. Перейдем к асимптотическому определению осадок поверхности полупространства вне плиты. Уравнение (1.2) было получено в результате использования следующего представления вертикальных перемещений поверхности полупространства:

$$f(r) = \frac{1}{s\lambda}\int_0^{\infty} Q(\alpha)L(\lambda\alpha)J_0(\alpha r)d\alpha \tag{4.1}$$

Найдем аналитическое выражение для функции $f(r)$ в (4.1), когда $L(\alpha) \in \Pi_N$, $r > 1$. Для $L(\alpha) \in \Pi_N$ функция $Q^N(\alpha)$ получена в аналитическом виде при построении решения уравнения (1.2). Используя формулу (4.1), получим выражение для функций $f(r)$, $r > 1$ если $L(\alpha) \in \Pi_N$; будем обозначать его $f^N(r)$. Согласно (2.4), функцию $Q^N(\alpha)$ можно записать в виде

$$Q^N(\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} w_m Q_m^N(\alpha)$$

Соответствующие выражения для функций $f_m^N(r)$ имеют вид

$$f_m^N(r) = \frac{2}{\pi}A_m\{G(r,k_m) - B_m G(r,ik_m) +$$

$$+\sum_{n=1}^{N} D_n b_n \lambda^{-1} I_n \left[\Psi_n(k_m) - B_m \Psi_n(ik_m) + \sum_{j=1}^{N} C_j^m \gamma_n(ia_j\lambda^{-1}) \right] \Bigg\}, \quad r>1, \quad m=0,1,2,... \tag{4.2}$$

$$\Psi_n(a) = L_N^{-1}(\lambda a)\gamma_n(a), \quad \gamma_n(a) = \frac{a\sin a}{b_n^2\lambda^{-2} + a^2}$$

$$I_n = \int_1^r \frac{\exp[\lambda^{-1} b_n (t-1)]}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt, \quad G(Ar) = \int_0^1 \frac{\cos At}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt$$

$$D_n = (a_n^2 b_n^{-2} - 1) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^{N} \frac{-b_n^2 + a_i^2}{-b_n^2 + b_i^2}$$

Окончательно получим

$$f^N(r) = \sum_{m=0}^{M} w_m f_m^N(r), \quad r>1 \tag{4.3}$$

где w_m – те же величины, что и в (2.3).

Возникает вопрос об использовании формул (4.2), (4.3) для определения осадки поверхности неоднородного полупространства, т.е. в случае, когда трансформанта ядра $L(\alpha)$ обладает свойствами (1.5) и функция $L(\alpha)$ принадлежит классу функций $S_{N,M}$. Согласно теореме 1 решение (2.7), представленное формулами (3.1) и (2.4), является асимптотически точным решением уравнения (1.2) для $L(\alpha)$, принадлежащих классу функций $S_{N,M}$ при $\lambda \to 0$ и $\lambda \to \infty$. Подставив это асимптотическое решение q^N в (1.2) для $L(\alpha) \in S_{N,M}$, найдем приближенное выражение для осадки поверхности неоднородного полупространства вне плиты, $f^s(r)$ в общем случае, когда $L(\alpha) \in S_{N,M}$:

$$f^s(r) = (\Pi_N + \Sigma_M) q^N(r), \; r > 1$$

Асимптотические свойства решения системы уравнений (1.1), (1.2) установлены на конечном отрезке $r \in [0; 1]$. Покажем, что подобные асимптотические свойства сохраняются для определяемой приближенно функции $f(r)$ при $r \in (1; \infty)$.

Не нарушая общности, считаем $M = 1$. В этом случае

$$\Sigma_1 q^N(r) = \int_0^1 q^N(\rho)\rho \left[\int_0^\infty \frac{C\lambda^{-1}\alpha}{\alpha^2 + D^2\lambda^{-2}} J_0(\alpha s) J_0(\alpha\rho) d\alpha \right] d\rho =$$

$$= C\lambda^{-1} K_0(rD\lambda^{-1}) \int_0^1 q^N(\rho) I_0(\rho D\lambda^{-1}) \rho d\rho, \quad r>1$$

Используя асимптотические свойства цилиндрических функций мнимого аргумента, получим оценки

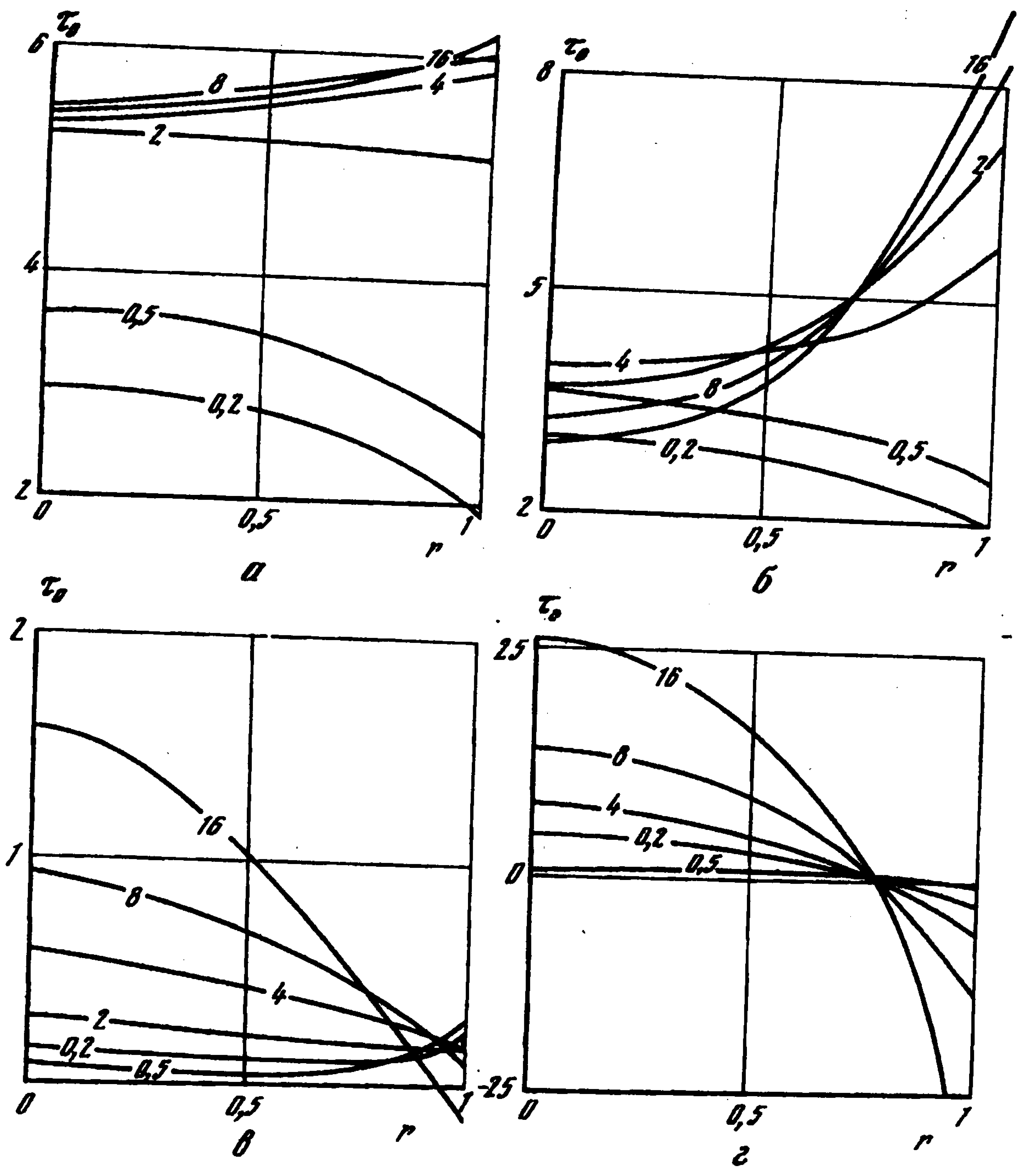
$$\max_{r>1} \left| \Sigma_1 q^N(r) \right| \leq M^* \exp(-D\lambda^{-1}\delta), \quad \lambda \to 0, \quad (\lambda > \lambda^*), \quad \delta = r - \rho > 0$$

$$\max_{r>1} \left| \Sigma_1 q^N(r) \right| \leq M^0 \lambda^{-1+\varepsilon}, \quad \lambda \to \infty \; (\lambda > \lambda^0), \quad \varepsilon > 0, \quad \varepsilon \to 0$$

где постоянные M^* и M^0 не зависят от λ. Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 2. Формулы (4.2), (4.3) являются асимптотически точным представлением осадки поверхности неоднородного по глубине полупространства вне плиты при выполнении условий теоремы (3.1), при $0 < \lambda < \lambda^*$ и при $\lambda > \lambda^0$, где λ^* и λ^0 – некоторые фиксированные значения λ.

Замечание. Аналогичные результаты имеют место в случае изгиба балки лежащей на неоднородной по глубине полосе или на неоднородной полуплоскости. Для доказательства



Фиг. 1, *а, б, в, г*

используются асимптотические свойства приближенных решений соответствующих контактных задач, установленные в [2, 3, 12].

5. В качестве примера рассмотрим изгиб круглой пластины под действием равномерно распределенной нагрузки единичной интенсивности. В этом случае ($p(r) = p = \text{const}$)

$$p_0 = p\sqrt{2}/2; \quad p_m = 0, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Пластина лежит на полупространстве, модуль Юнга которого с глубиной изменяется по закону

$$E(z) = E_0\varphi(z), \quad -1 \leqslant z \leqslant 0; \quad E(z) = E_0\varphi(-1), \quad z < -1$$

Коэффициент Пуассона основания $\nu_0 = 1/3$, $-\infty < z \leqslant 0$, коэффициент Пуассона пластины $\nu_n = 0{,}15$.

Рассмотрим следующие виды неоднородности:

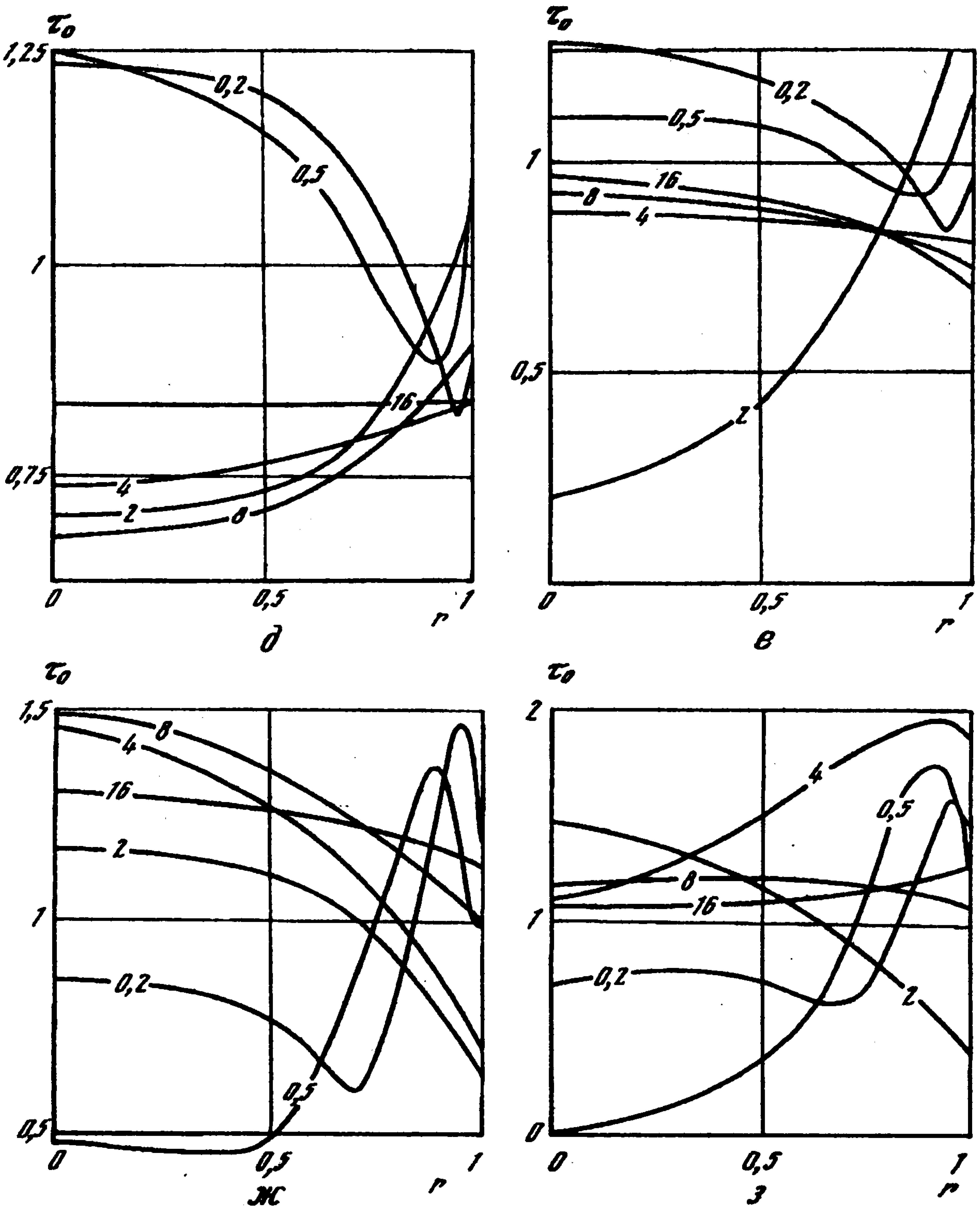
1) монотонная (степенная):

а) возрастающая с глубиной

$$\varphi_1(z) = 0{,}1 - z^{2a_k}, \quad a_k = \ln 0{,}1(k-1)/2\ln 0{,}5, \quad k = 2$$

б) убывающая

$$\varphi_2(z) = 1{,}1 - z^{2a_k}, \quad a_k = \ln(1{,}1 - 0{,}1k)/2\ln 0{,}5, \quad k = 9$$

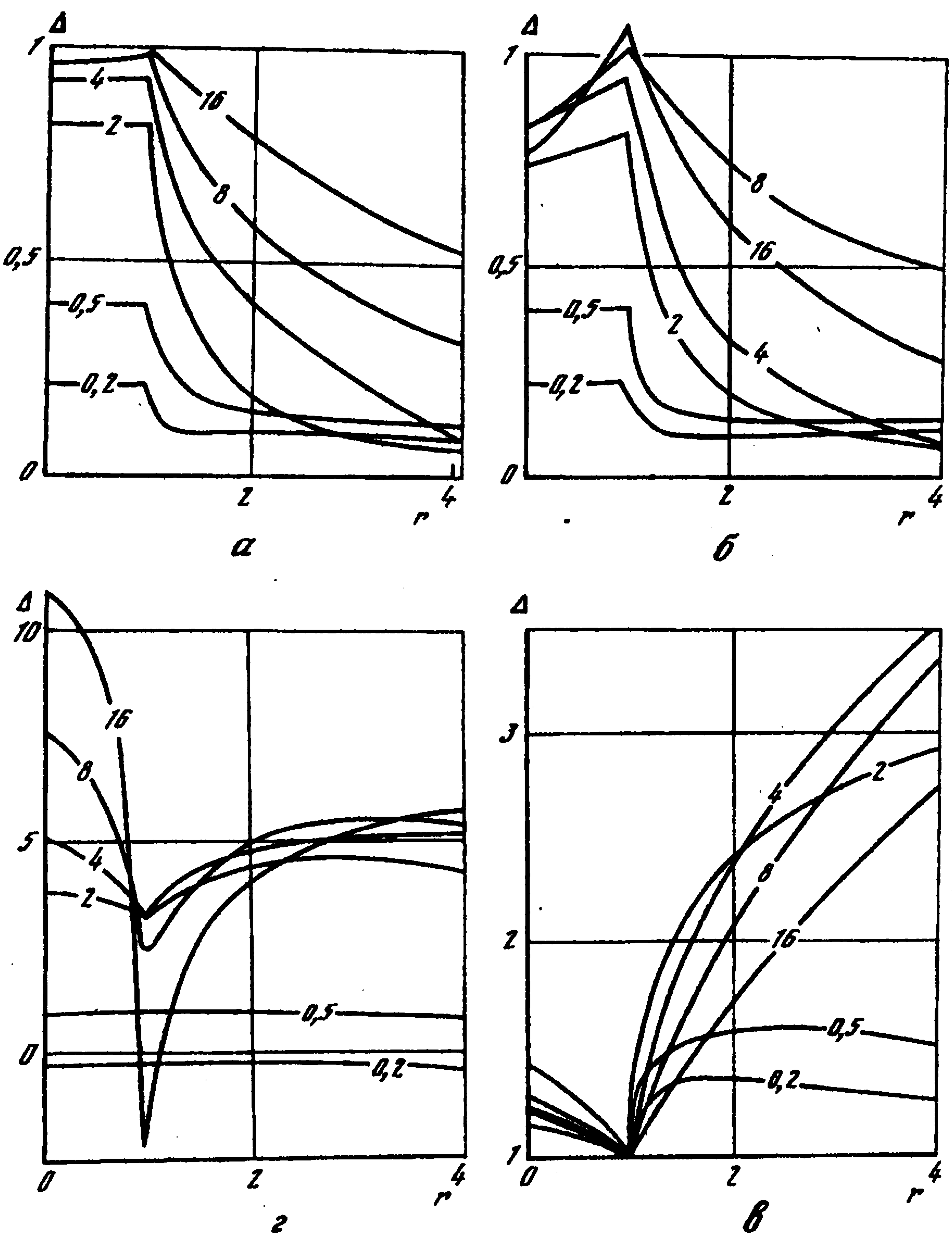


Фиг. 1, *д*, *е*, *ж*, *з*

2) немонотонная (синусоидальная):

$\varphi_3(z) = 1{,}1 + \sin(\pi z)$, $\varphi_4(z) = 0{,}1 - \sin(\pi z)$

На фиг. 1 приведены графики величины $\tau^0(r) = q_n(r)q_0^{-1}(r)$, характеризующей распределение контактных нормальных давлений под пластиной на неоднородном основании по сравнению с однородным $q_0(r)$ при разных значениях λ ($q_0(r)$ соответствует $E(z) \equiv E_0$, $z < 0$). Здесь и ниже фиг. 1, *а*, *в*, *д*, *ж* соответствуют изгибной жесткости пластины $s = 0$, 1, *б*, *г*, *е*, *з* $s = 3$. Цифры на кривых соответствуют значениям λ. На фиг. 1, *а* и *б* τ^0 соответствует закону $\varphi_1(z)$, на фиг. 1, *в* и *г* – $\varphi_2(z)$, 1, *д* и *е* – $\varphi_3(z)$, 1, *ж* и *з* – $\varphi_4(z)$ можно заключить, что в случае монотонно убывающего с глубиной закона неоднородности вида $\varphi_2(z)$ появляются отрицательные контактные давления, свидетельствующие об отрыве пластины от основания (фиг. 1, *ж*, *з*). В этом случае нужно изменить постановку задачи. Зона контакта пластины с основанием может быть определена из условия обращения в нуль контактных давлений на границе зоны. Зона отрыва расширяется при увеличении изгибной жесткости пластины (фиг. 1, *з*).



Фиг. 2, *а, б, в, г*

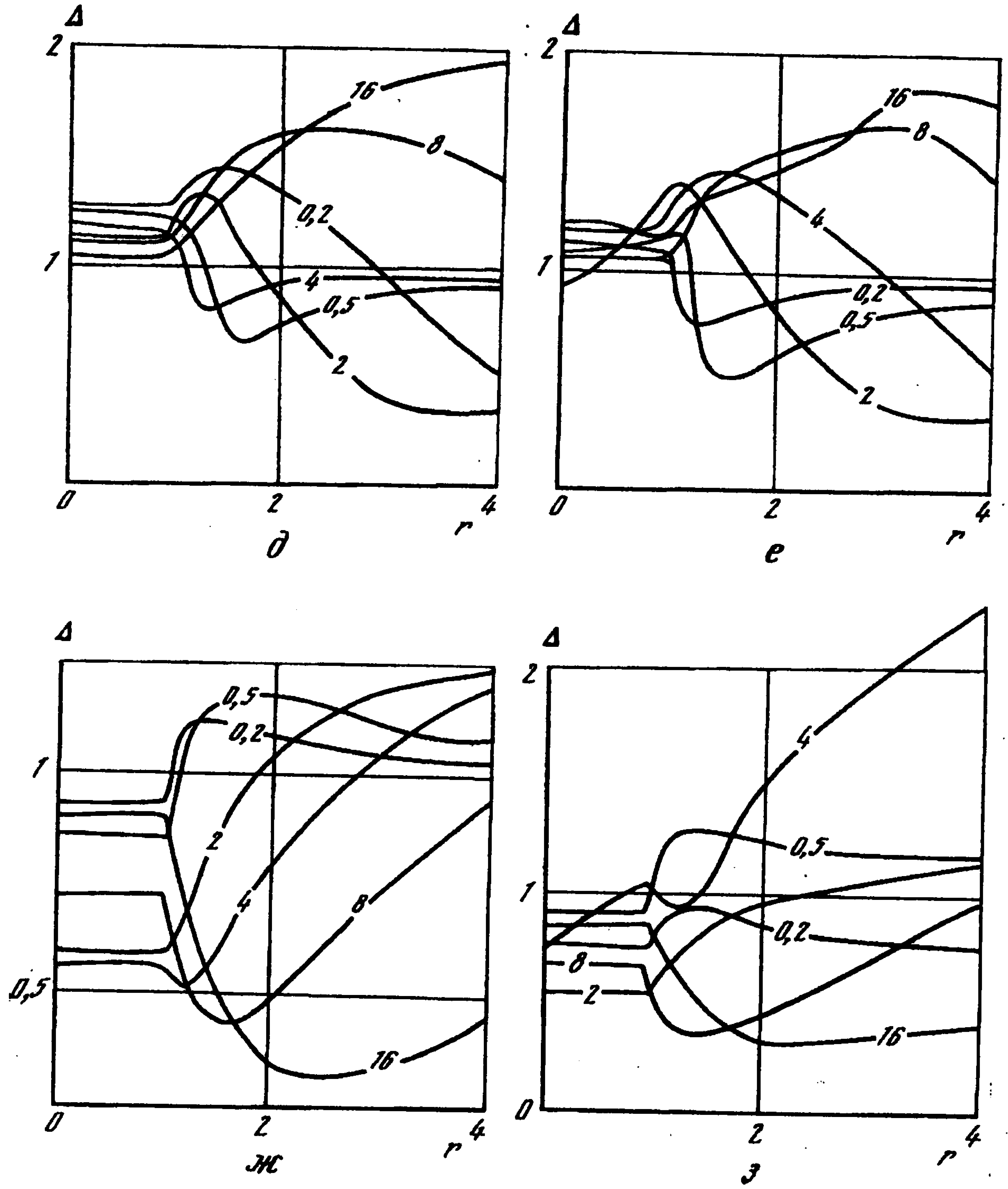
Для немонотонных законов неоднородности $\varphi_3(z)$ и $\varphi_4(z)$ характерно, что в случае когда $\varphi(z)$ у поверхности основания возрастает с глубиной ($\varphi_3(z)$), наблюдается увеличение величины τ^0, характеризующей коэффициент при особенности контактных напряжений, при приближении изнутри к краю пластины. Пластина от основания не отрывается.

Если $\varphi(z)$ у поверхности основания убывает с глубиной ($\varphi_4(z)$), то наблюдается уменьшение величины τ^0 при приближении изнутри к краю пластины. Видно, что распределение контактных давлений существенно зависит как от толщины неоднородного слоя и вида неоднородности, так и от изгибной жесткости пластины.

На фиг. 2 приведены графики, характеризующие величину относительной осадки поверхности неоднородного полупространства по сравнению с однородным (под пластиной и вне ее)

$$\Delta(r) = w_n(r) w_0^{-1}(r), \quad 0 \leqslant r \leqslant 1; \quad \Delta(r) = f_n(r) f_0^{-1}(r), \quad r > 1$$

В случае, когда функция $\varphi(z)$ монотонно возрастает (закон неоднородности ($\varphi_1(z)$) во№ ронка осадки поверхности основания вне пластины более крутая, чем для однородного



Фиг. 2. *д, е, ж, з*

основания (фиг. 2, *а, б*). Обратно, когда функция $\varphi(z)$ монотонно убывает (закон неоднородности ($\varphi_2(z)$)), воронка осадки более полагая, чем для однородного основания (фиг. 2, *в, г*). Для немонотонных законов неоднородности $\varphi_3(z)$, $\varphi_4(z)$ форма воронки существенно зависит от λ – относительной толщины неоднородного слоя под пластиной (фиг. 2, *д, е, ж, з*).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цейтлин А.Н.* Об изгибе круглой пластины, лежащей на линейно деформируемом основании // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 1. С. 99–112.
2. *Айзикович С.Н.* Асимптотическое решение одного класса парных уравнений при малых значениях параметра // Докл. АН СССР. 1990. Т. 313. № 1. С. 48–52.
3. *Айзикович С.М.* Асимптотическое решение одного класса парных уравнений при больших значениях параметра // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319. № 5. С. 1037–1041.
4. *Айзикович С.М., Трубчик И.С.* Изгиб пластин, лежащих на неоднородном основании // Труды 14-й Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек, Кутаиси, 1987. Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1987. Т. 1. С. 47–52.

5. *Айзикович С.М., Александров В.М.* Асимптотические решения контактных задач теории упругости для полупространства и полуплоскости, неоднородных по глубине // Изв. АН Арм. ССР. Механика. 1986. Т. 39. № 3. С. 13–28.
6. *Приварников А.К.* Пространственная деформация многослойного основания // Устойчивость и прочность элементов конструкций. Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1973. С. 27–45.
7. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: Физматгиз, 1959. 684 с.
8. *Айзикович С.М.* Асимптотические решения контактных задач теории упругости для неоднородных по глубине сред // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 148–158.
9. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. 474 с.
10. *Айзикович С.М., Трубчик И.С., Шклярова Е.В.* Расчет круглой пластины, лежащей на неоднородном по глубине полупространстве // Изв. АН МТТ. 1992. № 4. С. 163–171.
11. *Александров В.М.* О решении одного класса парных уравнений // Докл. АН СССР 1973. Т. 210. № 1. С. 55–58.
12. *Айзикович С.М., Трубчик И.С.* Об асимптотических свойствах приближенного решения одного класса парных интегральных уравнений // Докл. АН СССР. 1989. Т. 307. № 2. С. 316–320.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
26.V.1994