УДК 538.4

© 1995 г. А.Б. Родин, И.С. Шикин

ЭВОЛЮЦИЯ АЛЬФВЕНОВСКОГО РАЗРЫВА В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Исследуется задача об эволюции альфвеновского разрыва в магнитной гидродинамике с учетом диссипативных процессов при произвольном значении угла поворота поперечной компоненты магнитного поля.

Было показано [1] существование стационарной структуры в виде бегущей волны для плоских альфвеновских разрывов. В данной работе в рамках модельного уравнения для слабонелинейных альфвеновских волн получено автомодельное решение, описывающее эволюцию произвольного разрыва.

1. В качестве исходной рассматривается система одномерных магнитогидродинамических уравнений с диссипацией, представленной вязкостью и магнитной вязкостью. Предполагается, что все величины зависят только от переменных x и t. В безразмерном виде данная система имеет вид

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=-\frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial B^2}{\partial x}+\frac{1}{R_e}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\rho\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)=B_x\frac{\partial B_y}{\partial x}+\frac{1}{R_e}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2},\quad \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}\right)=B_x\frac{\partial B_z}{\partial x}+\frac{1}{R_e}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t}+u\frac{\partial s}{\partial x}\right)=\frac{1}{R_e}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{R_m}\left\{\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}\right)^2\right\}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(uB_y-\upsilon B_x)+\frac{1}{R_m}\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2},\quad \frac{\partial B_z}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(wB_x-uB_z)+\frac{1}{R_m}\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad B_x=\text{const}$$

В данной системе u, υ, w – компоненты вектора скорости, а B_x, B_y, B_z – вектора магнитной индукции, R_e – число Рейнольдса, R_m – магнитное число Рейнольдса. Система приводится к безразмерному виду при помощи альфвеновской скорости, характерного размера и характерных величин плотности, магнитного поля, энтропии и температуры.

Представим B_y и B_z в виде $B_y=B\sin\theta$, $B_z=B\cos\theta$, где B – величина поперечной компоненты магнитного поля, а θ – угол направления магнитного поля в плоскости (y, z).

В дальнейшем существенным будет предположение о малости диссипации, которое можно представить в виде

$$\varepsilon=1/R_e+1/R_m \tag{1.1}$$

где ε – малый параметр.

Сделаем замену независимых переменных по формулам

$$\xi=\varepsilon(x-t\cos\alpha),\quad \tau=\varepsilon^3 t \tag{1.2}$$

(α – угол между направлением оси x и невозмущенным магнитным полем, а $\cos\alpha$ – безразмерная альфвеновская скорость).

Далее, согласно методике [2], разлагая все переменные по степеням параметра ε и подставляя затем в исходную систему, получим, аналогично [1], модельное уравнение

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}-\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}+\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\int\limits_{-\infty}^{\xi}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)^2 d\xi\right\}=0 \tag{1.3}$$

В уравнении (1.3) θ – младший член в разложении по степеням ε угла поворота θ. Младшие члены в разложении компонент **v** и **B** выражаются через θ следующим образом:

$$B_{y0}=\sin\alpha\sin\theta,\quad B_{z0}=\sin\alpha\cos\theta,\quad \upsilon_0=-\sin\alpha\sin\theta,\quad w_0=\sin\alpha(1-\cos\theta)$$

Заметим, что из процедуры разложения следует, что первые ненулевые члены в разложении других величин (ρ, u, s, T, p) имеют более высокий порядок. Существенно также, что при учете в числе механизмов диссипации теплопроводности и второй вязкости вид уравнения (1.3) не изменяется.

2. Будем искать автомодельное решение (1.3) в виде

$$\theta=\theta(y),\ y=2\xi\tau^{-1/2} \tag{2.1}$$

Подстановка (2.1) в (1.3) приводит к уравнению

$$y\theta'+4\theta''+4\theta'\int\limits_{-\infty}^{y}\theta'^2 dy=0 \tag{2.2}$$

Штрихом здесь и далее обозначено дифференцирование по y.

С помощью замены

$$\theta'=\lambda,\ \theta''=\mu(\lambda) \tag{2.3}$$

получим уравнение первого порядка, решение которого имеет вид

$$\mu^2=-\tfrac{1}{2}\lambda^2\ln|\lambda|-\lambda^4-\lambda^2 c,\ c=-a^2-\tfrac{1}{2}\ln a,\ a>0 \tag{2.4}$$

Согласно (2.3) получим решение в параметрической форме с параметром λ:

$$d\theta=\lambda\mu^{-1}d\lambda,\ dy=\mu^{-1}d\lambda \tag{2.5}$$

Подставляя первое из полученных выражений в (2.4), имеем зависимость

$$\theta(\lambda)=\pm\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}f(\lambda)d\lambda,\ \text{где}\ f(\lambda,a)=\left(\tfrac{1}{2}\ln\left|\frac{a}{\lambda}\right|+a^2-\lambda^2\right)^{-1/2}, \tag{2.6}$$

изображенную на фиг. 1. Точка (0, 0) на фиг. 1 соответствует состоянию при $y\to-\infty$; точки $(0, \theta_*)$ и $(0, -\theta_*)$ соответствуют двум ветвям решения при $y\to+\infty$. Далее ограничимся рассмотрением случая $\theta>0$, поскольку обе ветви решения симметричны. При изменении λ от 0 до a в формуле (2.6) выбирается знак плюс; в точке $(a, \theta_*/2)$ знак меняется на противоположный.

Зависимость θ_* от a выражается формулой

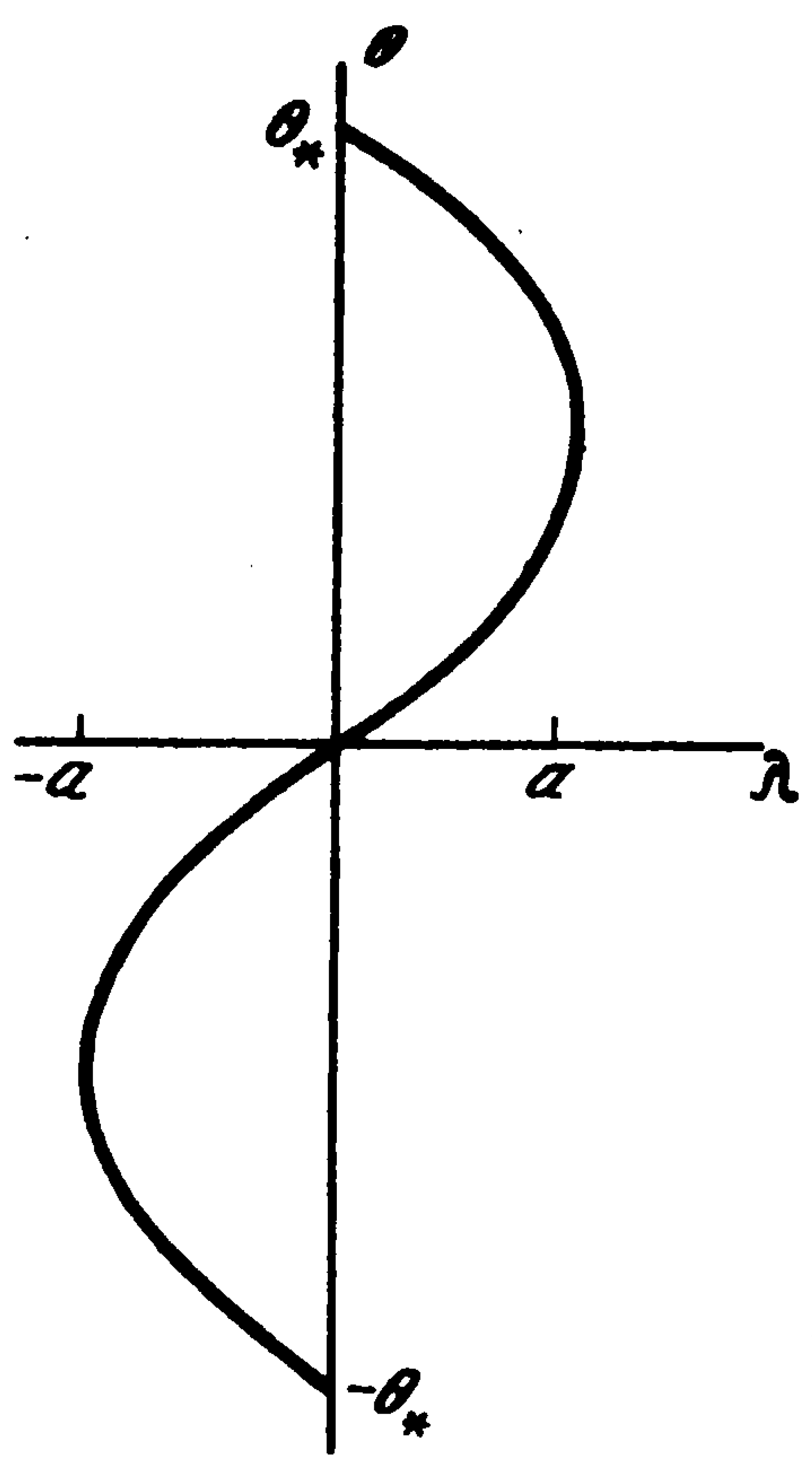
$$\theta_*(a)=2\int\limits_0^a f(\lambda,a)d\lambda \tag{2.7}$$

Из (2.7) следует, что

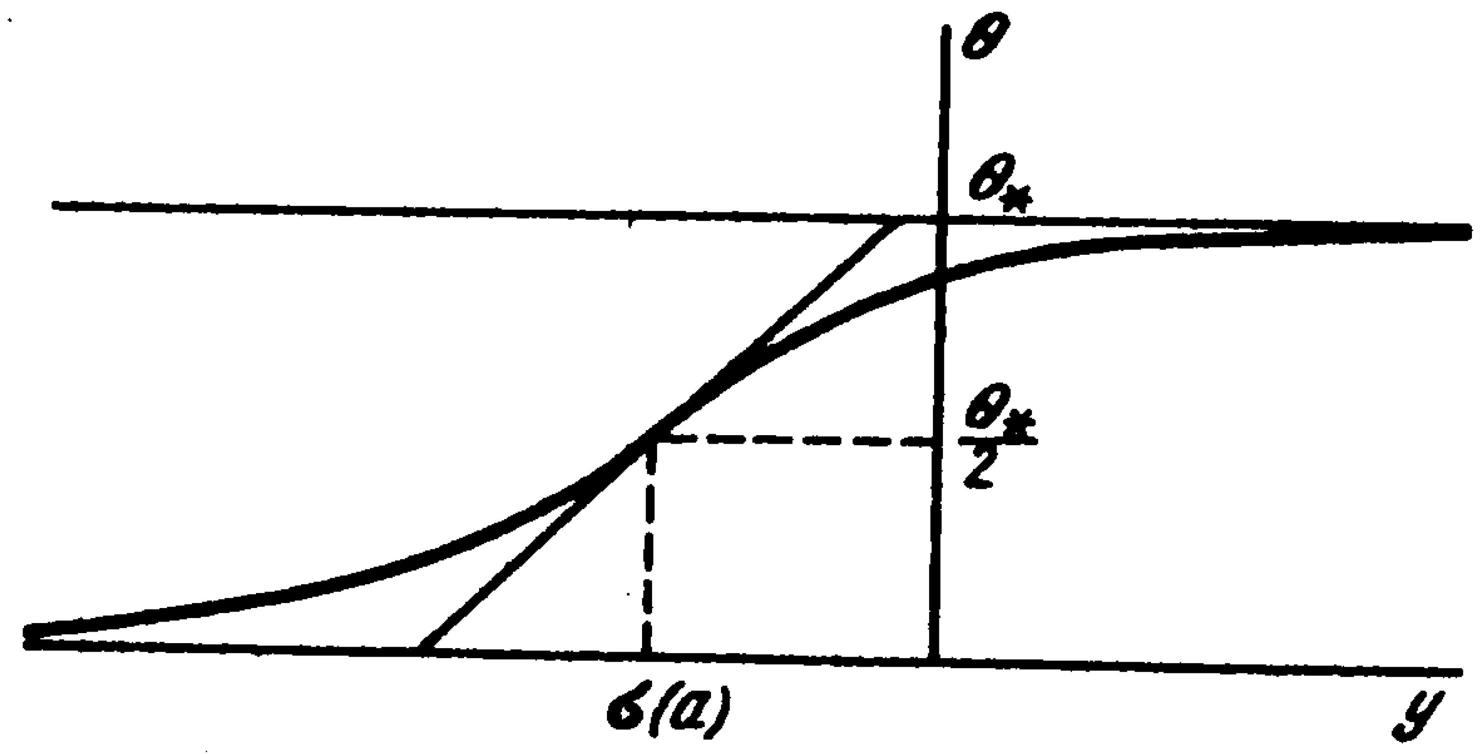
$$\lim_{a\to0}\theta_*(a)=0,\quad \lim_{a\to\infty}\theta_*(a)=\pi,\quad \frac{d\theta_*}{da}>0$$

Таким образом, полученное решение определяет эволюцию альфвеновского разрыва с произвольным углом поворота поперечной компоненты магнитного поля θ_*, $-\pi<\theta_*<\pi$.

Зависимость θ от y, определяемая (2.5), изображена на фиг. 2. Кривая $\theta(y)$ обладает центральной симметрией относительно точки с координатами $(\sigma(a), \theta_*/2)$ (центр разрыва),



Фиг. 1



Фиг. 2

где $\sigma(a)$ определяется соотношением

$$\sigma(a) = -4\int_0^a f(\lambda, a)\lambda d\lambda \qquad (2.8)$$

Тангенс угла наклона касательной к кривой $\theta(y)$ в точке $\sigma(a)$ равен a.

Определим ширину разрыва δ как разность между абсциссами точек пересечения с прямыми $\theta = 0$ и $\theta = \theta_*$ касательной, проведенной к кривой $\theta(y)$ в точке $(\sigma, \theta_*/2)$. Согласно фиг. 2 имеем: $\delta(a) = \theta_*(a)/a$, причем $\delta(a)$ монотонно убывает с ростом a. В исходных безразмерных переменных ширина разрыва Δ при учете (2.1), (1.1) и (1.2) выражается в виде

$$\Delta = \theta_*(a)a^{-1}(1/R_e + 1/R_m)^{1/2}t^{1/2} \qquad (2.9)$$

Формула (2.9) согласуется с результатом решения задачи о скорости расплывания зоны альфвеновского разрыва в линейной постановке [3].

Скорость расширения зоны разрыва уменьшается при возрастании θ_*. В пределе при $\theta_* \to \pi$ скорость расплывания стремится к нулю (в соответствии с тем, что при $\theta_* = \pi$ альфвеновский разрыв имеет стационарную структуру). Центр разрыва движется по газу с зависящей от времени скоростью

$$V_* = \cos\alpha - \tfrac{1}{4}\sigma(a)t^{-1/2}(1/R_e + 1/R_m)^{1/2}$$

причем функция $\sigma(a)$ определена формулой (2.8).

Отметим, что в линейной постановке данные факты не имеют места.

Авторы благодарят Н.Е. Сысоева за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nakata T.* Nonlinear alfven waves in a compressible viscous fluid // J. Phys. Soc. Japan. 1991. V. 60. № 6. P. 1952–1958.
2. *Taniuti T.* Reductive perturbation method and far fields of wave equations. // Suppl. Progr. Theor. Phys. 1974. № 55. P. 1–35.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред // М.: Наука, 1982. 623 с.

Москва

Поступила в редакцию
17.V.1993