УДК 622.011+539.375

© 1995 г. Ю.Н. Гордеев

ТРЕЩИНА ГИДРОРАЗРЫВА В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Рассматривается задача о плоской и осесимметричной дискообразной трещинах гидроразрыва [1, 2] в насыщенных жидкостью трасверсально-изотропных пороупругих средах. Трещина расклинивается потоком вязкой фильтрующейся в пласт жидкостью разрыва. Напряженное состояние и деформации пороупругой среды описываются уравнениями Био [3]. Для стационарной "идеальной" дискообразной трещины, давление вдоль которой постоянно, найдено аналитическое решение.

В классической теории гидроразрыва [1, 2, 4, 5] изотропного пласта при описании распространения трещин эффектами, связанными с пороупругостью среды, пренебрегали [6–9]. Однако в большинстве практически интересных задачах пороупругие эффекты являются существенны [10–12]. С другой стороны, реальные среды, в которых проводится гидроразрыв, как правило, анизотропны.

Для изотропной пороупругой среды задачи гидроразрыва рассматривались ранее [10–18]. В данной работе развивается метод решения указанных задач гидроразрыва для трансверсально-изотропных сред и получены результаты, которые являются обобщением подхода и некоторых результатов работы [18].

1. Постановка задачи. Пусть плоская (осесимметричная) трещина в бесконечном насыщенном жидкостью трансверсально-изотропном пористом пространстве и однородном сжимающем поле напряжений σ_∞ поддерживается в раскрытом состоянии нагнетаемой в нее жидкостью. Нагнетаемая жидкость, двигаясь вдоль (радиально) трещины, может фильтроваться через ее стенки в пористое пространство. Предполагается, что плоскость трещины перпендикулярна оси симметрии x_2, а ось x_1 направлена вдоль (лежит в плоскости) трещины. Кроме того, предполагается, что радиус скважины r_0 много меньше длины трещины L, поэтому эффектами, связанными с наличием скважины, можно пренебречь.

Для описания деформации трансверсально-изотропной насыщенной жидкостью пористой среды воспользуемся уравнениями теории связанной консолидации Био [3] ($i, j, k = 1, 2, 3$; по повторяющимся индексам производится суммирование):

$$\nabla_j \sigma_{ij} = 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{1.1}$$

$$\left\| \begin{matrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{12} \\ \dfrac{E}{2(1-\nu)\rho_0}[m-m_0] \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \dfrac{1}{E} & -\dfrac{\nu'}{E'} & -\dfrac{\nu}{E} & 0 & \dfrac{2(1-\nu)\eta}{E'} \\ -\dfrac{\nu'}{E'} & \dfrac{1}{E'} & -\dfrac{\nu'}{E'} & 0 & \dfrac{2\eta(1-\nu)}{E'}\eta' \\ -\dfrac{\nu}{E} & -\dfrac{\nu'}{E'} & \dfrac{1}{E} & 0 & \dfrac{2(1-\nu)\eta}{E} \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{G'} & 0 \\ \eta & \dfrac{E}{E'}\eta' & \eta & 0 & \dfrac{1}{B}\left(2\eta+\dfrac{E}{E'}\eta'\right) \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ p \end{matrix} \right\| \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} m + \nabla_i(\rho_0 u_i) = 0 \tag{1.3}$$

$$u_l = -\frac{k_1\delta_{li}}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_i}p, \quad k_1 = k_3 \neq k_2 \tag{1.4}$$

Здесь (1.1) – уравнение равновесия, (1.2) – определяющие соотношения, (1.3) – уравнения непрерывности для фильтрующейся жидкости, (1.4) – закон Дарси для трансверсально-изотропной пористой среды; σ_{ij} – тензор суммарных напряжений, ε_{ij} – тензор деформаций, E, E' – модули Юнга и ν, ν' – коэффициенты Пуассона пороупругой среды, G, G' ($G = E/([2(1+\nu)])$) – модули сдвига, p – поровое давление; m – масса поровой жидкости в единице объема, m_0, ρ_0 – масса и плотность поровой жидкости в недеформируемом состоянии, k_1, k_3 и k_2 – коэффициенты проницаемости в плоскости перпендикулярной оси симметрии и в направлении оси симметрии, μ – вязкость жидкости, u_i – скорость фильтрации в i-м направлении; δ_{ij} – символ Кроненекера.

Параметры η и η' могут быть выражены через параметры α и α', введенные в [14]

$$\eta = \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{\nu' E}{(1-\nu)E'}\alpha'\right), \quad \eta' = \frac{1}{2(1-\nu)}(\alpha' - 2\nu'\alpha)$$

$$\alpha = \{1 - \lambda_1[\lambda_2 + \nu'\lambda_3]\}/(2b+b'), \quad \alpha' = \{1-\lambda_1[2\nu''\lambda_2 + (1-\nu)\lambda_3]\}/(2b+b')$$

$$\lambda_1 = \frac{E}{1-\nu-2\nu'\nu''}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\nu_u-\nu_u''}{E_u}, \quad \lambda_3 = \frac{1-2\nu_u'}{E_u'}$$

$$\frac{\nu_u''}{E_u} = \frac{\nu_u'}{E_u'}, \quad \frac{\nu''}{E_u} = \frac{\nu'}{E'}, \quad b = \frac{(1-A)B}{2}, \quad b' = AB$$

где E_u и E_u' – модули Юнга и ν_u, ν_u' – коэффициент Пуассона соответствует условиям, когда жидкость не может уйти из среды, A, B – параметры Скемптона.

Движение нагнетаемой жидкости вдоль трещины будем описывать уравнением непрерывности и законом Пуазейля

$$\frac{\partial}{\partial t}w + \frac{1}{x_1^n}\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1^n wu) = -2\upsilon_L, \quad u = -\frac{w^2}{12\mu}\frac{\partial}{\partial x_1}p_c \tag{1.5}$$

где w – раскрытие берегов трещины, p_c – давление нагнетаемой в трещину жидкости разрыва, u – скорость движения жидкости в трещине, υ_L – скорость утечки жидкости разрыва в пласт через стенки трещины, n – показатель симметрии задачи ($n = 0$ – плоская трещина, $n = 1$ – осесимметричная трещина).

На берегах трещины ставятся граничные условия

$$p_c(x_1, t) = p(x_1, x_2 = 0, t) \tag{1.6}$$

$$\upsilon_L(x_1, t) = -\frac{k_2}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_2}p(x_1, x_2 = 0+0, t) \tag{1.7}$$

2. Плоская задача. Для плоского деформируемого состояния ($\varepsilon_{33} = 0$), которое и будет рассматриваться ниже, определяющие соотношения (1.2) принимают вид

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \dfrac{E[m-m_0]}{2(1-\nu)\rho_0} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dfrac{1-\nu^2}{E} & -\dfrac{(1+\nu)\nu'}{E'} & 0 & \dfrac{2\eta(1-\nu^2)}{E} \\ -\dfrac{(1+\nu)\nu'}{E'} & \dfrac{1-\nu'^2\Xi}{E'} & 0 & \dfrac{2\eta(1-\nu)}{E'}\left[\dfrac{\eta'}{\eta}+\nu'\right] \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{2G'} & 0 \\ \eta'(1+\nu) & (\eta'+\nu'\eta)\Xi & 0 & \chi \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ p \end{Vmatrix}$$

$$\Xi = E / E', \quad \chi = B^{-1}[2\eta(1-2\eta B(1-\nu))+\eta'\Xi] \tag{2.1}$$

При этом уравнения равновесия (1.1) в декартовых координатах x_1 и x_2 могут быть записаны в виде

$$\partial\sigma_{ij} / \partial x_j = 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{2.2}$$

Тождественно удовлетворяя уравнениям равновесия (2.2) для плоской задачи, введем функцию Эйри (α, α' = 1, 2; по повторяющимся греческим индексам суммирование не производится)

$$\alpha_{\alpha\beta} = (-1)^{\alpha+\beta}\partial^2 F / \partial x_{3-\alpha}\partial x_{3-\beta} \tag{2.3}$$

Из условий совместности деформаций

$$\partial^2\varepsilon_{11} / \partial x_2^2 + \partial^2\varepsilon_{22} / \partial x_1^2 = 2\partial^2\varepsilon_{12} / \partial x_1\partial x_2$$

и определяющих соотношений (2.1) при учете (2.3) получим

$$a_1\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}F + a_2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2}F + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}F = -2\eta\left(b\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}p + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}p\right) \tag{2.4}$$

$$a_1 = \frac{1-\nu'^2\Xi}{1-\nu^2}\Xi, \quad a_2 = 2\frac{1-\nu'\Xi}{1-\nu}, \quad b = \frac{\eta'/\eta+\nu'}{1+\nu}\Xi$$

Для решения уравнения (2.4) введем комплексные переменные по формулам: $z_\alpha = x_1 + i\mu_a x_2$ и сопряженные к ним $z_\alpha^* = x_1 - i\mu_a x_2$.

Пусть числа μ_1 и μ_2 – корни уравнения

$$\mu^4 - a_2\mu^2 + a_1 = 0 \tag{2.5}$$

Тогда левая часть уравнения (2.4) может быть записана в виде

$$16(\mu_1\mu_2)^2\frac{\partial^4}{\partial z_1\partial z_1^*\partial z_2\partial z_2^*}F$$

Для того чтобы получить комплексное представление правой части уравнения (2.4), воспользуемся свойствами корней уравнения (2.5). Они либо действительны ($\mu_1 = \mu_1$, $\mu_2 = \mu_2$, $\mu_3 = -\mu_1$, $\mu_4 = -\mu_2$), либо комплексно-сопряженные ($\mu_1 = \mu$, $\mu_2 = \bar{\mu}$, $\mu_3 = -\mu$, $\mu_4 = -\bar{\mu}$). Если корни уравнения (2.5) действительны, то $z_\alpha^* = \bar{z}_\alpha$. Если комплексно-сопряженные, то $z_\alpha^* = \bar{z}_{3-\alpha}$. Равные корни соответствуют изотропной теории упругости [20], этот случай не будем рассматривать. Исходя из сказанного, для уравнения (2.4) может быть получено следующее комплексное представление:

$$\frac{\partial^4}{\partial z_1\partial z_1^*\partial z_2\partial z_2^*}F = -\frac{1}{2}\eta\sum_{\alpha=1}^{2}\kappa_{3-\alpha}\frac{\partial^2}{\partial z_\alpha\partial z_\alpha^*}p, \quad \kappa_\alpha = \frac{b-\mu_\alpha^2}{\mu_\alpha^2(\mu_{3-\alpha}^2-\mu_\alpha^2)} \tag{2.6}$$

(независимые переменные x_1 и x_2 выражены через комплексные переменные z_1, z_1^* или через z_2, z_2^*).

Для интегрирования уравнения (2.6) используем следующий прием [19]. Независимые переменные x_1, x_2 и функции F, p будем считать комплексными. Тогда новые переменные z_1, z_1^* и z_2, z_2^* в этом случае станут независимыми. В тоже время независимые переменные z_1, z_1^* могут быть выражены через z_2, z_2^* и наоборот. После выполнения необходимых вычислений возвращаются к исходным переменным, когда x_1

и x_2 – действительны, z_α и z_α^* ($\alpha = 1,2$) становятся сопряженными значениями одной комплексной переменной.

Интегрируя уравнение (2.6) и учитывая, что при переходе к действительным переменным x_1 и x_2 функция Эйри F должна быть действительной, получим

$$F = \sum_{\alpha=1}^{2} \left\{ f_\alpha(z_\alpha) + f_\alpha^*(z_\alpha^*) - \frac{1}{2}\eta\kappa_\alpha \int_{z_{0\alpha}}^{z_\alpha} \int_{z_{0\alpha}^*}^{z_\alpha^*} d\xi_\alpha d\xi_\alpha^* p(\xi_\alpha, \xi_\alpha^*) \right\} \tag{2.7}$$

где $f_1(z_1)$, $f_2(z_2)$, $f_1^*(z_1^*)$, $f_2^*(z_2^*)$ – аналитические функции z_{01}, z_{01}^*, z_{02}, z_{02}^* – некоторые постоянные.

Учитывая, что при переходе к действительным переменным x_1 и x_2 функция Эйри F должна быть действительной, получим: для действительных и различных корней уравнения (2.5) $f_\alpha^*(z_\alpha^*) = \overline{f_\alpha(z_\alpha)}$, и комплексно-сопряженных корней $f_\alpha^*(z_\alpha^*) = \overline{f_{3-\alpha}(z_{3-\alpha})}$.

Подставив (2.7) в (2.3), получим представление для компонент тензора напряжений

$$\sigma_{11} = -2\,\mathrm{Re} \sum_{\alpha=1}^{2} \mu_\alpha^2 \left\{ \Phi'_\alpha(z_\alpha) + \frac{1}{2}\eta\kappa_\alpha [p - Q_\alpha] \right\} \tag{2.8}$$

$$\sigma_{22} = 2\,\mathrm{Re} \sum_{\alpha=1}^{2} \left\{ \Phi'_\alpha(z_\alpha) - \frac{1}{2}\eta\kappa_\alpha [p + Q_\alpha] \right\} \tag{2.9}$$

$$\sigma_{12} = 2\,\mathrm{Im} \sum_{\alpha=1}^{2} \mu_\alpha \left\{ \Phi'_\alpha(z_\alpha) + \frac{1}{2}\eta\kappa_\alpha Q_\alpha \right\} \tag{2.10}$$

$$Q_\alpha = \frac{\partial}{\partial z_\alpha^*} \int_{z_{0\alpha}}^{z_\alpha} d\xi_\alpha p(\xi_\alpha, z_\alpha^*) \tag{2.11}$$

Здесь $\Phi_\alpha(z_\alpha) = f'_\alpha(z_\alpha)$ – аналитические функции.

Из (2.9), (2.10), учитывая равенства

$$\kappa = \sum_{\alpha=1}^{2} \kappa_\alpha = \frac{b}{a_1} = \frac{(1-\nu)(\eta'/\eta + \nu')}{1-\nu'^2\Xi}, \qquad \sum_{\alpha=1}^{2} \kappa_\alpha \mu_\alpha^2 = 1 \tag{2.12}$$

выразим действительные и мнимые части аналитических функций Φ'_α через тензор напряжений и поровое давление

$$2\,\mathrm{Re} \sum_{\alpha=1}^{2} \Phi'_\alpha(z_\alpha) = \sigma_{22} + \kappa\eta p + \eta\,\mathrm{Re} \sum_{\alpha=1}^{2} \kappa_\alpha Q_\alpha \tag{2.13}$$

$$2\,\mathrm{Im} \sum_{\alpha=1}^{2} \mu_\alpha \Phi'_\alpha(z_\alpha) = \sigma_{12} - \eta\,\mathrm{Im} \sum_{\alpha=1}^{2} \mu_\alpha \kappa_\alpha Q_\alpha \tag{2.14}$$

Найдем также представление поля перемещений пороупругой среды через эти же аналитические функции Φ'_α.

Подставив (2.8)–(2.10) в (2.1) и учитывая соотношения

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial}{\partial x_2} u_2, \qquad \frac{\partial}{\partial x_2} = i\mu_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial z_\alpha} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha} \right) \tag{2.15}$$

получим поле смещений

$$u_2 = 2\,\mathrm{Im} \sum_{\alpha=1}^{2} q_\alpha \left\{ \Phi_\alpha(z_\alpha) + \frac{1}{2}\eta\kappa_\alpha Q_\alpha \right\}, \qquad q_\alpha = (\mu_\alpha E')^{-1}[(1+\nu)\nu'\mu_\alpha^2 + 1 - \nu'^2\Xi]$$

Ниже потребуется частная производная от поля смещений по переменной x_1

$$\frac{\partial}{\partial x_1}u_2 = 2\,\mathrm{Im}\sum_{\alpha=1}^{2} q_\alpha\left\{\Phi'_\alpha(z_\alpha)+\frac{1}{2}\eta\kappa_\alpha Q_\alpha\right\},\qquad \frac{\partial}{\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial z_\alpha}+\frac{\partial}{\partial z^*_\alpha};\qquad \alpha=1,2 \tag{2.16}$$

Задав нагрузку на верхнем и нижнем берегах трещины, получим задачу Дирихле во внешности разреза для двух аналитических функций $\Phi'_\alpha(z_\alpha)$ $(\alpha=1,2)$ (2.14), (2.15). Использовав принцип суперпозиции, представим поля напряжений и смещений в виде суммы двух полей: одно из них соответствует сплошному телу под действием нагрузок, приложенных внутри тела (σ_∞ – однородное сжимающее напряжение, p_∞ – невозмущенное давление поровой жидкости), а второе – телу с разрезом, к поверхностям которого приложены нагрузки. При этом граничные условия на берегах трещины имеют вид

$$\sigma_{22}^{\pm}=\sigma_\infty - p(x_1,t),\quad \sigma_{12}^{\pm}=0,\quad x_2=0\pm 0 \tag{2.17}$$

Кроме того, для решения краевой задачи (2.12), (2.13) необходимо задать значения функций $\mathrm{Im}\,Q_\alpha$ на берегах трещины $x_2=0\pm 0$.

Можно показать, что на берегах трещины $\mathrm{Re}\,Q_\alpha=0$ $(\alpha=1,2)$. В частности, в осесимметричном случае это будет показано ниже.

Следовательно, краевая задача (2.14), (2.15), (2.17) для функций $\Phi'_\alpha(z_\alpha)$ $(\alpha=1,2)$ может быть записана в виде

$$2\,\mathrm{Re}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}\Phi'_\alpha(z_\alpha)\right]^{\pm}=-\Sigma^{\pm}(x_1,t),\qquad 2\,\mathrm{Im}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}\mu_\alpha\Phi'_\alpha(z_\alpha)\right]^{\pm}=\eta T^{\pm}(x_1,t),\qquad |x_1|<l \tag{2.18}$$

$$\Sigma^{\pm}(x_1,t)=p(x_1,t)-\sigma_\infty-\eta\kappa(p(x_1,t)-p_\infty),\qquad T^{\pm}(x_1,t)=-\mathrm{Im}\sum_{\alpha=1}^{2}\mu_\alpha\kappa_\alpha Q_\alpha^{\pm}$$

Решение краевой задачи Дирихле для разреза (2.18) может быть получено стандартными методами [19] и имеет вид

$$\Phi'_\alpha(z)=-\frac{\mu_{3-\alpha}}{2\pi i(\mu_{3-\alpha}-\mu_\alpha)\sqrt{z^2-l^2}}\int_{-l}^{l}\frac{\sqrt{\zeta^2-l^2}\,\Sigma(\zeta,t)d\zeta}{\zeta-z}-$$

$$-\frac{\eta\kappa}{2\pi(\mu_{3-\alpha}-\mu_\alpha)}\int_{-l}^{l}\frac{T(\zeta,t)d\zeta}{\zeta-z}+\frac{\mu_{3-\alpha}}{(\mu_{3-\alpha}-\mu_\alpha)}\frac{C_0}{\sqrt{l^2-z^2}},\qquad T=\frac{T^{+}-T^{-}}{2} \tag{2.19}$$

(C_0 – некоторая постоянная).

Подставив функции $\Phi'_\alpha(z_\alpha)$ $(\alpha=1,2)$ в (2.16), используя формулы Сохоцкого–Племеля и интегрируя по x_1, найдем раскрытие трещины в трансверсально-изотропной пороупругой среде

$$w(x_1,t)=\frac{2[1-\nu'^2\Xi](\mu_1+\mu_2)}{\pi E'\mu_1\mu_2}\left\{\int_{x_1}^{l}\int_{0}^{\xi}\frac{\Sigma(\zeta,t)\xi d\zeta d\xi}{\sqrt{\xi^2-\zeta^2}\sqrt{\xi^2-x_1^2}}+\pi\eta\sum_{\alpha=1}^{2}\kappa_\alpha\int_{x_1}^{l}d\xi T_\alpha(\xi,t)\right\},$$

$$T_\alpha=\frac{T_\alpha^{+}-T_\alpha^{-}}{2},\qquad T_\alpha^{\pm}=\mathrm{Im}\,Q_\alpha^{\pm} \tag{2.20}$$

При этом критерий разрушения Г.И. Баренблатта [2] для трансверсально-изотропной среды может быть записан в виде

$$\int_{0}^{l}\frac{\Sigma(\zeta,t)\zeta^n d\zeta}{\sqrt{l^2-\zeta^2}}=\frac{K_l}{\sqrt{2l}} \tag{2.21}$$

где K_l – модуль сцепления, для плоской трещины $n=0$ и для осесимметричной – $n=1$.

Так как в $\Sigma(\zeta, t)$ входит параметр η, то полученный критерий разрушения отличается от этого же критерия для упругого тела.

В предельном случае $\eta \to 0$ формула (2.20) дает раскрытие трещины гидроразрыва в трансверсально-изотропном упругом теле. Если при этом $\mu_1 = \mu_2 = 1$, то (2.21) переходит в формулу Снеддона для изотропного упругого тела.

Второе слагаемое в выражении (2.20) дает нелокальный вклад в раскрытие трещины распределения порового давления жидкости в среде p. Вопрос о вычислении этого слагаемого будет рассмотрен для осесимметричной задачи в разд. 6.

Следовательно, при таком подходе удается проинтегрировать ту часть уравнений связанной теории трансверсально-изотропной пороупругости, которая описывает деформации среды. При этом задача о гидроразрыве сводится к уравнениям переноса порового давления (1.3), (1.4) и функционалу, связывающему раскрытие трещины (2.20) с поровым давлением. Уравнения переноса жидкости после преобразований могут быть приведены к одному уравнению типа диффузии только относительно порового давления с нелокальным источником, связанным с изменением пористости среды при ее деформации.

3. Осесимметричная задача. Для описания осесимметричной деформации насыщенной жидкостью пористой среды и фильтрации в ней жидкости используются уравнения связанной консолидации (1.1), (1.2) в цилиндрической системе координат $(i, j, k = r, \varphi, z)$.

В отличие от плоского деформированного состояния, когда вводилась функция Эйри, а затем находилось решение с помощью теории аналитических функций, для пространственной осесимметричной задачи этот подход неприменим. Поэтому для пространственной пороупругой задачи поступим следующим образом: запишем уравнения равновесия в перемещениях, а затем будем решать их, используя теорию обобщенных аналитических функций [20].

Уравнения равновесия в перемещениях имеют вид

$$\left[A_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + A_{11}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\right]w_1 + (A_{13} + A_{44})\frac{\partial^2}{\partial z\partial r}w_2 = b_1\frac{\partial}{\partial r}p$$

$$(A_{13} + A_{44})\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial z}w_1 + \left[A_{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + A_{44}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\right]w_2 = b_2\frac{\partial}{\partial r}p \tag{3.1}$$

$$b_1 = \frac{2(1-\nu)}{E}\eta\left(A_{11} + A_{12} + A_{13}\Xi\frac{\eta'}{\eta}\right) \qquad b_2 = \frac{2(1-\nu)}{E'}\eta'\left(A_{33} + 2A_{13}\frac{\eta}{\eta'\Xi}\right)$$

где w_1 – радиальное смещение, w_2 – смещение в направлении оси симметрии задачи.

В отличие от уравнений равновесия для упругой среды в уравнения равновесия для пороупругого тела (3.1) вошли производные от порового давления, поэтому метод решения этих уравнений, предложенный в [20], в данном случае непосредственно неприменим.

Введем обозначения

$$D = A_{13} + A_{44}, \quad A_j = A_{33} - A_{44}\mu_j^{-2}, \quad B_j = A_{11}\mu_j^{-2} - A_{44}; \quad j = 1,2 \tag{3.2}$$

где μ_j – корни характеристического уравнения

$$D^2\mu_j^{-2} = A_jB_j \tag{3.3}$$

Умножив первое уравнение (3.1) на B_1D, а второе на A_1D, преобразуем их к виду

$$A_{11}B_1\frac{\partial}{\partial r}G_1 + A_{44}D\frac{\partial}{\partial z}G_2 = 0, \quad A_{33}D\frac{\partial}{\partial z}G_1 - A_1A_{44}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)G_2 = C\frac{\partial}{\partial z}p \tag{3.4}$$

$$G_1 = -\frac{Db_1}{A_{11}} p + D\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) w_1 + A_1 \frac{\partial}{\partial z} w_2, \quad G_2 = B_1 \frac{\partial}{\partial z} w_1 - D \frac{\partial}{\partial r} w_2 \tag{3.5}$$

$$C = D(b_2 A_1 - b_1 D A_{33} / A_{11})$$

Решая последовательно сначала систему (3.4), а потом (3.5), найдем перемещения w_1, w_2 в пороупругой среде. Выбор коэффициента при поровом давлении p в (3.5) позволяет исключить $\partial p/\partial r$ из системы (3.4), что является необходимым условием для применения теории обобщенных аналитических функций.

Уравнения (3.4) представим в виде

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial z}(p_2 U_2)\right] = -\mu_2^{-1} \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial z}(p_2 V_2)\right]$$

$$\mu_2^{-1} \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial z}(p_2 U_2)\right] = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)\left[\frac{\partial}{\partial z}(p_2 V_2)\right] + \eta_2 \frac{\partial}{\partial z} p \tag{3.6}$$

$$p_2 \frac{\partial}{\partial z} U_2 = \frac{G_1}{A_{44}(\mu_2^{-2} - \mu_1^{-2})}, \quad p_2 \frac{\partial}{\partial z} V_2 = \frac{DG_2}{A_{11} B_1 \mu_2^{-2}(\mu_2^{-2} - \mu_1^{-2})}$$

$$\eta_2 = CD = [\mu_2 A_{11} A_1 B_1 A_{44}(\mu_2^{-2} - \mu_1^{-2})]^{-1}$$

Введем комплексные переменные, сопряженные к ним переменные и производные по этим переменным по формулам

$$t_\alpha = \mu_\alpha z + ir, \quad t_\alpha^* = \mu_\alpha z - ir, \quad \alpha = 1,2 \tag{3.7}$$

$$2\frac{\partial}{\partial t_\alpha} = \mu_\alpha^{-1} \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\partial}{\partial r}, \quad 2\frac{\partial}{\partial t_\alpha^*} = \mu_\alpha^{-1} \frac{\partial}{\partial z} + i \frac{\partial}{\partial r}$$

Сначала умножим первое уравнение (3.6) на i и сложим со вторым уравнением, а затем умножим первое уравнение (3.6) на $-i$ и также сложим со вторым уравнением, тогда при учете (3.7) получим

$$2\frac{\partial}{\partial t_2^*}\psi_2 - \frac{\psi_2 - \psi_2^*}{t_2 - t_2^*} = \eta_2 \frac{\partial}{\partial z} p, \quad 2\frac{\partial}{\partial t_2}\psi_2^* - \frac{\psi_2 - \psi_2^*}{t_2 - t_2^*} = \eta_2 \frac{\partial}{\partial z} p \tag{3.8}$$

где $\psi_2 = \frac{\partial}{\partial z}(p_2 \Lambda_2)$, $\psi_2^* = \frac{\partial}{\partial z}(p_2 \Lambda_2^*)$ и $\Lambda_2 = U_2 + iV_2$, $\Lambda_2^* = U_2 - iV_2$.

Интегрируя (3.8), найдем

$$\psi_2 = \chi_2 + \frac{1}{2}\eta_2 \frac{\partial}{\partial z} \int_{t_{20}^*}^{t_2^*} p\,d\xi_2^*, \quad \psi_2^* = \chi_2^* + \frac{1}{2}\eta_2 \frac{\partial}{\partial z} \int_{t_{20}}^{t_2} p\,d\xi_2 \tag{3.9}$$

Здесь χ_2 и χ_2^* – произвольные обобщенные аналитические функции (т.е. функции, удовлетворяющие уравнениям: $2\partial\chi_2 / \partial t_2^* - (\chi_2 - \chi_2^*)/(t_2 - t_2^*) = 0$ и $2\partial\chi_2^* / \partial t_2 - (\chi_2 - \chi_2^*)/(t_2 - t_2^*) = 0$ [20]).

Вводя вместо обобщенных аналитических функций χ_2 и χ_2^* функции $\varphi_2 = \partial(p_2\chi_2)/\partial z$ и $\varphi_2^* = \partial(p_2\chi_2^*)/\partial z$, которые также являются обобщенными аналитическими функциями, и интегрируя уравнения (3.9), получим

$$p_2(U_2 + iV_2) = p_2\varphi_2 + \frac{1}{2}\eta_2 \int_{t_{20}^*}^{t_2^*} p\,d\xi_2^*, \quad p_2(U_2 - iV_2) = p_2^*\varphi_2 + \frac{1}{2}\eta_2 \int_{t_{20}}^{t_2} p\,d\xi_2 \tag{3.10}$$

(постоянная p_2 будет определена ниже).

Выражения (3.10) дают решение системы уравнений (3.4). Используя эти решения, будем искать решение линейной системы уравнений (3.5) в виде супперпозиции

$$\begin{Vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} w_{11} \\ w_{21} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} w_{12} \\ w_{22} \end{Vmatrix} \tag{3.11}$$

$$D\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)w_{11} + A_1\frac{\partial}{\partial z}w_{21} = G_1 + \alpha_1 p, \quad B_1\frac{\partial}{\partial z}w_{11} - D\frac{\partial}{\partial r}w_{21} = G_2 \tag{3.12}$$

$$D\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)w_{12} + A_1\frac{\partial}{\partial z}w_{22} = \alpha_2 p, \quad B_1\frac{\partial}{\partial z}w_{12} - D\frac{\partial}{\partial r}w_{22} = 0 \tag{3.13}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{Db_1}{A_{11}}, \quad \alpha_1 = \frac{A_2 C}{A_{33}A_{44}D(\mu_2^{-2} - \mu_1^{-2})} \tag{3.14}$$

Решение системы (3.12) дается выражениями

$$w_{11} = -p_2\omega_2 V_2, \quad w_{21} = p_2 U_2, \quad \omega_2 = D(\mu_2 B_2)^{-1} \tag{3.15}$$

Система уравнений (3.13) решается с учетом выражений (3.7), (3.14) аналогично системе (3.12)

$$w_{12} = -p_1\omega_1 V_1, \quad w_{22} = p_1 U_1 \tag{3.16}$$

$$p_1(U_1 + iV_1) = p_1\varphi_1 + \frac{1}{2}\eta_1\int_{t_{10}^*}^{t_1^*} p\,d\xi_1^*, \quad p_1(U_1 - iV_1) = p_1\varphi_1^* + \frac{1}{2}\eta_1\int_{t_{10}}^{t_1} p\,d\xi_1$$

$$\eta_1 = \frac{B_1\alpha_2\mu_1}{D^2}, \quad \omega_1 = D(\mu_1 B_1)^{-1}, \quad \alpha_2 = \frac{Db_1}{A_{11}} - \alpha_1$$

(φ_1, φ_1^* – некоторые обобщенные аналитические функции, постоянная p_1 будет определенна ниже).

Так как из (3.11), (3.15), (3.16) следует, что

$$w_1 = -p_1\omega_1 V_1 - p_2\omega_2 V_2, \quad w_2 = p_1 U_1 + p_2 U_2 \tag{3.17}$$

то на функции U_j, V_j $(j = 1,2)$ наложим условия четности, которые вытекают из условий симметрии задачи

$$U_j(z,r) = U_j(z,-r), \quad V_j(z,r) = -V_j(z,-r)$$

Откуда при учете (3.10) следует, что $\varphi_j(t_j) = \varphi_j^*(t_j^*)$.

Рассмотрим два возможных случая корней уравнения (3.3):

1°. $\operatorname{Im}\mu_j = 0$, то $U_j = \overline{U}_j$, $V_j = \overline{V}_j$, т.е. $\varphi_j^*(t_j) = \overline{\varphi_j(t_j)}$;

2°. $\operatorname{Im}\mu_j \neq 0$, $\mu_1 = \overline{\mu}_2$, то $U_j = \overline{U}_j$, $V_{3-j} = \overline{V}_{3-j}$, т.е. $\varphi_{3-j}^*(t_{3-j}) = \overline{\varphi_{3-j}(t_{3-j})}$

Таким образом, с учетом условий четности из (3.10), (3.11), (3.15), (3.16) получим

$$w_1 = \operatorname{Re}\sum_{\alpha=1}^{2}\{i\omega_\alpha p_\alpha\varphi_\alpha - I_\alpha^-\}, \quad w_2 = \operatorname{Re}\sum_{\alpha=1}^{2}\{p_\alpha\varphi_\alpha + I_\alpha^+\} \tag{3.18}$$

$$I_\alpha^{\pm} = \frac{i}{4}\eta_\alpha\left[\int_{t_{\alpha0}}^{t_\alpha} p\,d\xi_\alpha \pm \int_{t_{\alpha0}^*}^{t_\alpha^*} p\,d\xi_\alpha^*\right]$$

Положим $p_i = q_i$ (здесь и ниже используем обозначения введенные в разд. 3) и выразим напряжения через деформации из (1.2), тогда учитывая (3.18) и то, что корни характеристического многочлена могут быть либо действительными, либо комплексносопряженными, получим представление для компонент тензора напряжений через две обобщенные аналитические функции

$$\operatorname{Re}\sum_{\alpha=1}^{2}\varphi'_{\alpha}(z_{\alpha})=\sigma_{zz}+\kappa\eta p+\eta\operatorname{Re}\sum_{\alpha=1}^{2}\kappa_{\alpha}Q_{\alpha} \tag{3.19}$$

$$\operatorname{Im}\sum_{\alpha=1}^{2}\mu_{\alpha}\varphi'_{\alpha}(z_{\alpha})=\sigma_{rz}-\eta\operatorname{Im}\sum_{\alpha=1}^{2}\mu_{\alpha}\kappa_{\alpha}Q_{\alpha} \tag{3.20}$$

$$Q_{\alpha}=\frac{\partial}{\partial t_{\alpha}^{*}}\int_{t_{0\alpha}}^{t_{\alpha}}d\xi_{\alpha}p(\xi_{\alpha},t_{\alpha}^{*})$$

Для перехода от обобщенных аналитических функций φ_{α} $(\alpha=1,2)$ к обычным аналитическим функциям используем интегральные операторы S_i^{-1} и S_i $(i=1,2)$ [20].

Таким образом, если φ – обобщенная аналитическая функция, то $\Phi=S^{-1}\varphi$ – обычная аналитическая функция.

Выберем в качестве контура интегрирования в операторах S_i^{-1} и S_i прямую линию, перпендикулярную оси z и проходящую через $z=z_0$. В этом случае операторы S_i^{-1} и S_i не зависят от индекса i, т.е. $S_i^{-1}=S^{-1}$ и $S_i=S$, и могут быть, когда φ_i и Φ_i удовлетворяют условиям четности, записаны в виде

$$\Phi_i(t_i)=S^{-1}\varphi_i=\operatorname{sign}(y)\frac{d}{dy}\int_0^y[r\operatorname{Re}\varphi_i(\tau_i)+iy\operatorname{Im}\varphi_i(\tau_i)]\frac{dr}{\sqrt{y^2-r^2}}=s_0^{-1}\operatorname{Re}\varphi_i+is_1^{-1}\operatorname{Im}\varphi_i$$

$$\varphi_i(t_i)=S\Phi_i=\frac{2}{\pi r}\int_0^r[r\operatorname{Re}\Phi_i(\sigma_i)+iy\operatorname{Im}\Phi_i(\sigma_i)]\frac{dy}{\sqrt{r^2-y^2}}=s_0\operatorname{Re}\Phi_i+is_1\operatorname{Im}\Phi_i \tag{3.21}$$

$$(\tau_i=t_i=\mu_i z+ir,\quad x=z=z_0,\quad \zeta_i=\sigma_i=\mu_i x+iy).$$

Используя операторы s_k^{-1} $(k=0,1)$, перейдем в представлениях (3.19), (3.20) от обобщенных аналитических функций к обычным аналитических функциям

$$\operatorname{Re}\sum_{\alpha=1}^{2}\Phi'_{\alpha}(z_{\alpha})=s_0^{-1}\left[\sigma_{zz}+\kappa\eta p+\eta\operatorname{Re}\sum_{\alpha=1}^{2}\kappa_{\alpha}Q_{\alpha}\right] \tag{3.22}$$

$$\operatorname{Im}\sum_{\alpha=1}^{2}\mu_{\alpha}\Phi'_{\alpha}(z_{\alpha})=s_1^{-1}\left[\sigma_{rz}-\eta\operatorname{Im}\sum_{\alpha=1}^{2}\mu_{\alpha}\kappa_{\alpha}Q_{\alpha}\right]$$

Сформулируем для аналитических функций $\Phi'_{\alpha}(z_{\alpha})$ $(\alpha=1,2)$ смешанную краевую задачу, используя принцип суперпозиции, т.е. представляя поля напряжений и смещений в виде суммы двух полей, одно из которых соответствует сплошному телу нагруженному нагрузками, приложенными внутри тела (σ_{∞} – однородное сжимающее напряжение, p_{∞} – невозмущенное давление поровой жидкости), а второе – телу с разрезом на поверхности которого приложены нагрузки

$$\sigma_{zz}=p-\sigma_{\infty},\quad \sigma_{rz}=0 \tag{3.23}$$

Операторы s_k^{-1} $(k=0,1)$ ставят в соответствие пространственному осесимметричному деформируемому состоянию (z,r) плоское состояние симметричное относительно оси $x=0$ $(y=z,\ r\to x)$. Приняв во внимание, что значения радикалов, входящих в операторы s_k^{-1} на разных берегах разреза, отличаются знаком, и положив константы

$t_{\alpha 0}$, $t^*_{\alpha 0}$ $(\alpha = 1,2)$ нулю, для выполнения условий симметрии (относительно оси $x = 0$), из (3.22) получим

$$\operatorname{Re}\left[\sum_{\alpha=1}^{2} \Phi'_\alpha(z_\alpha)\right]^{\pm} = [s_0^{-1}\Sigma(r,t)]^{\pm}, \quad \operatorname{Im}\left[\sum_{\alpha=1}^{2} \mu_\alpha \Phi'_\alpha(z_\alpha)\right]^{\pm} = \eta[s_1^{-1}T(r,t)]^{\pm} \tag{3.24}$$

$$|x_1| < l, \quad \Sigma^{\pm}(r,t) = p(r,t) - \sigma_\infty - \eta\kappa(p(r,t) - p_\infty), \quad T^{\pm}(r,t) = -\operatorname{Im}\sum_{\alpha=1}^{2} \mu_\alpha \kappa_\alpha Q_\alpha^{\pm}$$

Здесь учтено, что как будет показано ниже, $\eta \operatorname{Re}\sum_{\alpha=1}^{2} \kappa_\alpha Q_\alpha = 0$.

Решение краевой задачи Дирихле для разреза (3.24) аналогично (2.19).

Продифференцировав выражение (3.18) по r и перейдя от обобщенных аналитических функций $\varphi'_\alpha(z_\alpha)$ к аналитическим функциям $\Phi'_\alpha(z_\alpha)$ при помощи операторов s_k и s_k^{-1} $(k = 1,2)$, подставим в это выражение функции $\Phi'_\alpha(z_\alpha)$, найденные из решения краевой задачи (3.24). Тогда, используя формулы Сохоцкого–Племеля и интегрируя по r, найдем раскрытие трещины

$$w(r,t) = \frac{2(1-\nu'^2\Xi)(\mu_1+\mu_2)}{\pi E'\mu_1\mu_2}\left\{\int_r^l \int_0^\xi \frac{\Sigma(\zeta,t)\zeta d\zeta d\xi}{\sqrt{\xi^2-\zeta^2}\sqrt{\xi^2-r^2}} + \pi\eta\sum_{\alpha=1}^{2}\kappa_\alpha W_\alpha\right\} \tag{3.25}$$

$$W_\alpha = \int_r^l T_\alpha(\xi,t)d\xi, \quad T_\alpha = (T_\alpha^+ - T_\alpha^-)/2, \quad T_\alpha^{\pm} = \operatorname{Im} Q_\alpha^{\pm}$$

Здесь был использован критерий разрушения Г.И. Баренблатта для трансверсально-изотропной среды (2.21).

Все выводы, касающиеся критерия разрушения, различных предельных случаев и уравнения переноса порового давления, которые были сделаны в разд. 2 для плоского деформированного состояния, будут справедливы и для осесимметричной задачи.

В следующих разделах будет найдено решение стационарной осесимметричной задачи и показано, как перейти во втором слагаемом формулы (3.25) к действительным переменным.

4. Стационарное решение. Рассмотрим стационарную задачу гидроразрыва трансверсально-изотропной пористой, насыщенной жидкостью среды, осесимметричной неподвижной трещиной радиуса $l = \text{const}$. Здесь предполагается, что поровое давление жидкости зависит только от координат r и z ($p(r, \varphi, z, t) = p(r, z)$). При этом уравнение переноса жидкости в трансверсально-изотропной пористой среде (1.3), (1.4) в цилиндрической системе координат сводится к уравнению Лапласа для порового давления

$$\frac{k_1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}p\right) + k_2\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}p\right) = 0 \tag{4.1}$$

В силу симметрии задачи относительно плоскости $z = 0$ сформулируем краевую задачу для уравнения Лапласа (4.1) в верхней полуплоскости $z > 0$

$$p(r,z=0) - p_\infty = p_0(r) - p_\infty, \quad 0 \le r < l; \quad \frac{\partial}{\partial z}p(r,z=0) = 0, \quad r > l \tag{4.2}$$

$$p(r,z\to\infty) - p_\infty = 0$$

Краевая задача (4.1), (4.2) в цилиндрической системе координат может быть решена методом парных интегральных уравнений [21].

Рассмотрим частный случай "идеальной" трещины, т.е. трещины с высокой гидравлической проводимостью. Распределение давления жидкости в такой трещине можно приближенно считать постоянным вдоль ее берегов

$$p_0(r) = p_0 = \text{const} \tag{4.3}$$

Решение краевой задачи (4.1), (4.2) при (4.3) имеет вид

$$p(r,z)=\frac{2}{\pi}(p_0-p_\infty)\arcsin\left(\frac{2l}{\rho^++\rho^-}\right),\quad \rho^\pm=\sqrt{(l\pm r)^2+\chi^2z^2},\quad \chi=\sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \tag{4.4}$$

Переходя в выражении (4.4) к комплексным переменным t_j, t_j^* (3.7), получим

$$p(r,z)=p\left(\frac{t_j-t_j^*}{2i},\ \frac{t_j+t_j^*}{2\mu_j}\right)=\tilde{p}(t_j,t_j^*)=\frac{2}{\pi}(p_0-p_\infty)\arcsin Z \tag{4.5}$$

$$Z=2l[f(t_j,t_j^*)+f(t_j^*,t_j)]^{-1}$$

$$f(u,\upsilon)=([l-i(1-\alpha_j)u+i\alpha_j\upsilon][l+i(1-\alpha_j)\upsilon-i\alpha_j u])^{1/2},\quad \alpha_j=(\mu_j^2+\chi^2)/(2\mu_j^2)$$

Далее тильда над давлением $\tilde{p}(t_j,t_j^*)$ опускается.

Раскрытие трещины гидроразрыва в трансверсально-изотропной пороупругой среде можно получить, подставив (4.5) в (3.25),

$$w(r)=\frac{2[1-\nu'^2\Xi](\mu_1+\mu_2)}{\pi E'\mu_1\mu_2}\left\{l[p_0-\sigma_\infty+\eta\kappa(p_0-p_\infty)]\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2}+\pi\eta\sum_{\alpha=1}^{2}\kappa_\alpha W_\alpha\right\} \tag{4.6}$$

Функции W_α определяются через элементарные функции, однако, в общем случае, они достаточно громоздки и их вид зависит от параметров a_j, т.е. от корней характеристического уравнения (3.3) μ_j ($j=1,2$) и отношения $\chi=\sqrt{k_1/k_2}$. Поэтому приведем функции W_α только для действительных корней μ_j характеристического уравнения, а следовательно и действительных α_j,

Если $\sqrt{1/2}\leqslant\alpha_j\leqslant 1$, то имеем

$$\begin{gathered}W_\alpha=-\frac{2\alpha_j-1}{\sqrt{\beta_j}}\left\{\frac{\pi}{2}-\frac{r}{l}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{\beta_j}}{2\alpha_j-1}\frac{r}{\sqrt{l^2-r^2}}\right)-\right.\\
-\frac{2\alpha_j-1}{\sqrt{1-8\beta_j}}\operatorname{arcctg}\left(\frac{2\sqrt{\beta_j}}{\sqrt{1-8\beta_j}}\frac{l}{\sqrt{l^2-r^2}}\right)-\\
-\sum_{k=1}^{2}\left[\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+k-\alpha_j}{1-k+\alpha_j}}-\frac{r}{l}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(1-\alpha_j)\alpha_{kj}^-}{\alpha_j[l+(-1)^k\alpha_j r]}}-\right.\\
-\frac{1}{2(2\alpha_j-1)}\left(\arcsin\left([4(k-\alpha_j)^2-1]\sqrt{1-(k-\alpha_j)^2}\right)-\right.\\
\left.\left.\left.-\arcsin\left(\frac{(-1)^k(2\alpha_j-1)l+2\beta_j r}{l}\right)-\arcsin\left(\frac{b_{kj}}{a_{kj}^+}\right)\right)\right]\right\}\end{gathered} \tag{4.7}$$

$$\beta_j=\alpha_j(1-\alpha_j),\quad a_{kj}^\pm=l\pm(-1)^k(1-\alpha_j)r,\quad b_{kj}=(-1)^k(2\alpha_j-1)l-(1-2\beta_j)r$$

В предельном случае $\alpha_j\to 1$ ($\mu_j\to\chi$) получим раскрытие трещины в изотропной пороупругой среде

$$w(r)=\frac{2(1-\nu^2)}{\pi G}l\left\{[p_0-\sigma_\infty+\eta(p_0-p_\infty)]\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2}+\right.$$

$$
+\eta(p_0-p_\infty)\left[\sqrt{2}-\sqrt{1+\frac{r}{l}}-\sqrt{1-\frac{r}{l}}+\sqrt{1-\left(\frac{r}{l}\right)^2}\right]\Bigg\} \tag{4.8}
$$

Если $\alpha_j<\sqrt{1/2}$, то выражение $8\alpha_j^2-8\alpha_j+1$ в (4.7) становится отрицательным и в этом случае, рассматривая $\operatorname{arcctg} z$ и $\sqrt{z}$ как функции комплексных переменных и переходя от $\operatorname{arcctg} z$ к логарифмической функции, формула (4.7) может быть преобразована к действительному выражению. Рассмотренный диапазон изменения a_j ($j=1,2$) отвечает корням характеристического уравнения, удовлетворяющим неравенству $\mu_j>\chi$ ($j=1,2$).

Аналогично можно поступить и при $\alpha_j>1$, т.е. $\mu_j<\chi$. Здесь также надо рассматривать функции, входящие в формулу (4.7), как функции комплексных переменных и после соответствующих преобразований она также может быть приведена к функции действительной переменной.

5. Вычисление функции T_α. В общем случае при решении нестационарной задачи гидроразрыва трансверсально-изотропной пороупругой среды возникает необходимость по поровому давлению $p(r,z,t)$, которое является действительной функцией действительных переменных r и z, восстанавливать функции $T_\alpha=\operatorname{Im}(Q_\alpha^+-Q_\alpha^-)/2(\alpha=1,2)$. Для этого перейдем от переменных r и z к комплексным переменным t_j, t_j^* (3.7). Тогда

$$
Q_\alpha=\frac{\partial}{\partial t_\alpha}\int_0^{t_\alpha^*}p\left(\frac{t_\alpha-\tau}{2i},\ \frac{t_\alpha+\tau}{2\mu_\alpha}\right)d\tau=\frac{1}{2i}\int_0^{t_\alpha^*}U\left(\frac{t_\alpha-\tau}{2i},\ \frac{t_\alpha+\tau}{2\mu_\alpha}\right)d\tau+
$$

$$
+\frac{1}{2\mu_\alpha}\int_0^{t_\alpha^*}V\left(\frac{t_\alpha-\tau}{2i},\ \frac{t_\alpha+\tau}{2\mu_\alpha}\right)d\tau \tag{5.1}
$$

$(U=\partial p/\partial r,\ \ V=\partial p/\partial z)$

Граничные значения функций (5.1) при $z=0\pm 0$, используя свойства интегралов Коши, взятых по бесконечной прямой $z=0$ [19], а также условия $U=V=0$ при $r^2+z^2\to\infty$, могут быть представлены в виде

$$
Q_\alpha^\pm=-\frac{1}{2\pi^2}\int_0^r d\tau\int_{-\infty}^{\infty}d\xi\int_{\infty}^{\infty}d\zeta\frac{\mu_\alpha U(\xi,\zeta)\pm iV(\xi,\zeta)}{[2\xi\pm(r-\tau)][2\mu_\alpha\zeta-i(r+\tau)]} \tag{5.2}
$$

При получении формулы (5.2) использовались свойства симметрии функций U, V, связаны с условиями симметрии задачи, $U(-\xi,\zeta)=-U(\xi,\zeta)$, $U(\xi,-\zeta)=U(\xi,\zeta)$, $V(-\xi,\zeta)=V(\xi,\zeta)$, $V(\xi,-\zeta)=-V(\xi,\zeta)$.

Из (5.2), свойств симметрии функций U, V и того факта, что корни характеристического уравнения действительные или комплексно-сопряженные, следует

$$
\operatorname{Re}\sum_{\alpha=1}^{2}\kappa_\alpha(Q_\alpha^++Q_\alpha^-)=0,\qquad T_\alpha=\operatorname{Im}(Q_\alpha^+-Q_\alpha^-)=-\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty d\xi\int_0^\infty d\zeta\zeta V(\xi,\zeta)L_\alpha(r,\xi,\zeta)\} \tag{5.3}
$$

$$
L_\alpha(r,\xi,\zeta)=16\int_0^\infty d\tau\frac{r-\tau}{(2\xi)^2-(r+\tau)^2}\operatorname{Im}\left\{\frac{i\mu_\alpha}{(2\mu_\alpha\zeta)^2+(r+\tau)^2}\right\}
$$

Таким образом, получив в данный момент времени t поле скорости $V=\partial p/\partial z$ в области $r\in[0,\infty)$, $z\in[0,\infty)$ из уравнения переноса поровой жидкости (1.3) и вычислив затем по формуле (5.3) функции T_α, из (3.25) можно восстановить раскрытие трещины.

Работа выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (M2S000).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жлетов Ю.П., Христианович С.А.* О гидравлическом разрыве нефтеносного пласта // Изв. АН СССР. ОТН. 1955. N 5. С. 3–41.
2. *Баренблатт Г.И.* Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1961. N 4. С. 3–56.
3. *Biot M.A.* General theory of three dimensional consolidation // Journal Appl. Phys. 1941. V. 12. N 2. P. 155–165.
4. *Perkins T.K., Kern L.R.* Width of hydraulic fractures. J. Pertol. Technol // 1961. V. 13. N 9. P. 937–949.
5. *Nordgren R.P.* Propagation of a vertical hydraulic fracture // Soc. Petrol. Eng. Journal. 1972. V. 12. N 4. P. 306–314.
6. *Daneshy A.A.* On the design of vertical hydraulic fractures // J. Petrol. Technol. 1973. V. 25. N 1. P. 83–97.
7. *Abe H., Mura T., Keer L.M.* Growth rate of a penny shaped crack in hydraulic fracturi.g of rocks // J. Geophys. Res. 1976. V. 81. N 29. P. 5335–5340.
8. *Nilson R.H.* Similarity solutions for wedge-shaped hydraulic fractures driven into a permeable medium by a constant inlet pressure // Intern. J. Numer. and Analyt. Methods in Geomech. 1988. V. 12 N 5. P. 477–495.
9. *Гордеев Ю.Н., Кудряшов Н.А.* Распространение магистральной трещины под действием движущегося в ней газа // ПМТФ. 1986. Вып. 4. С. 116–122.
10. *Boone T.J., Detournay E.* Response of a vertical hydraulic fracture intersecting a poroelastic formation bounded by semi-infinite impermeable elastic layer // Intern. J. Rock. Mech. Mining Sci. and Geomech Abstr. 1990. V. 27. N 3. P. 189–197.
11. *Detournay E., Cheng A.H.-D., McLennan T.D.* A poroelastic PKN hydraulic fracture model based on an explicit moving algorithm // Trans. ACME J. of Energy Resources Technol. 1990. V. 112. N 4. P. 224–230.
13. *Boone T.J., Ingraffea A.R., Roegiers J.-C.* Simulation of hydraulic fracture propagation in poroelastic rock with application to stress measurement techniques // Intern. J. Rock. Mech. Mining Sci. and Geomech. Abstr. 1991. V. 28. N 1. P. 1–14.
13. *Rice J.R., Cleary M.P.* Some basic stress diffusion solutions for fluid-saturated elastic porous media with compressible constituents // Rev. Geophys. and Space Phys. 1976. V. 14. N 2. P. 227–241.
14. *Thompson M., Willis J.R.* A reformation of the equations of anisotropic poroelasticity // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1991. V. 58. N 3. P. 612–616.
15. *Atkinson C., Craster R.V.* Plane strain fracture in poroelastic media // Proc. Roy. Soc. London. 1991.V. A434. N 1892. P. 605–633.
16. *Atkinson C., Craster R.V.* The application of invariant integrals in diffusive elastic solids // Phil. Trans. Roy. Soc. London. 1992. V. A339. N 1653. P. 231–263.
17. *McNamee J., Gibson R.E.* Diplacement functions and linear transforms applied to diffusion through porous elastic media // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1960. V. 13. N 1. P. 98–111.
18. *Gordeyev Yu.N.* Growth of a crack produced by hydraulic fracture in a poroelastic medium // Intern. J. Rock. Mech. Min. Sci. and Geomech. Abstr. 1993. V. 30. N 3. P. 233–238.
19. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
20. *Александров А.Я., Соловьев Ю.И.* Пространственные задачи теории упругости: применение методов теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1978. 462 с.
21. *Уфлянд Я.С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики. Л.: Наука, 1977. 220 с.

Москва

Поступила в редакцию
24. III. 1994