

УДК 539.374

© 1995 г. И.В. Симонов

ОЦЕНКИ ДАВЛЕНИЙ, ТЕМПЕРАТУР И КОЭФФИЦИЕНТА СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ОБТЕКАНИИ ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ СРЕДЫ

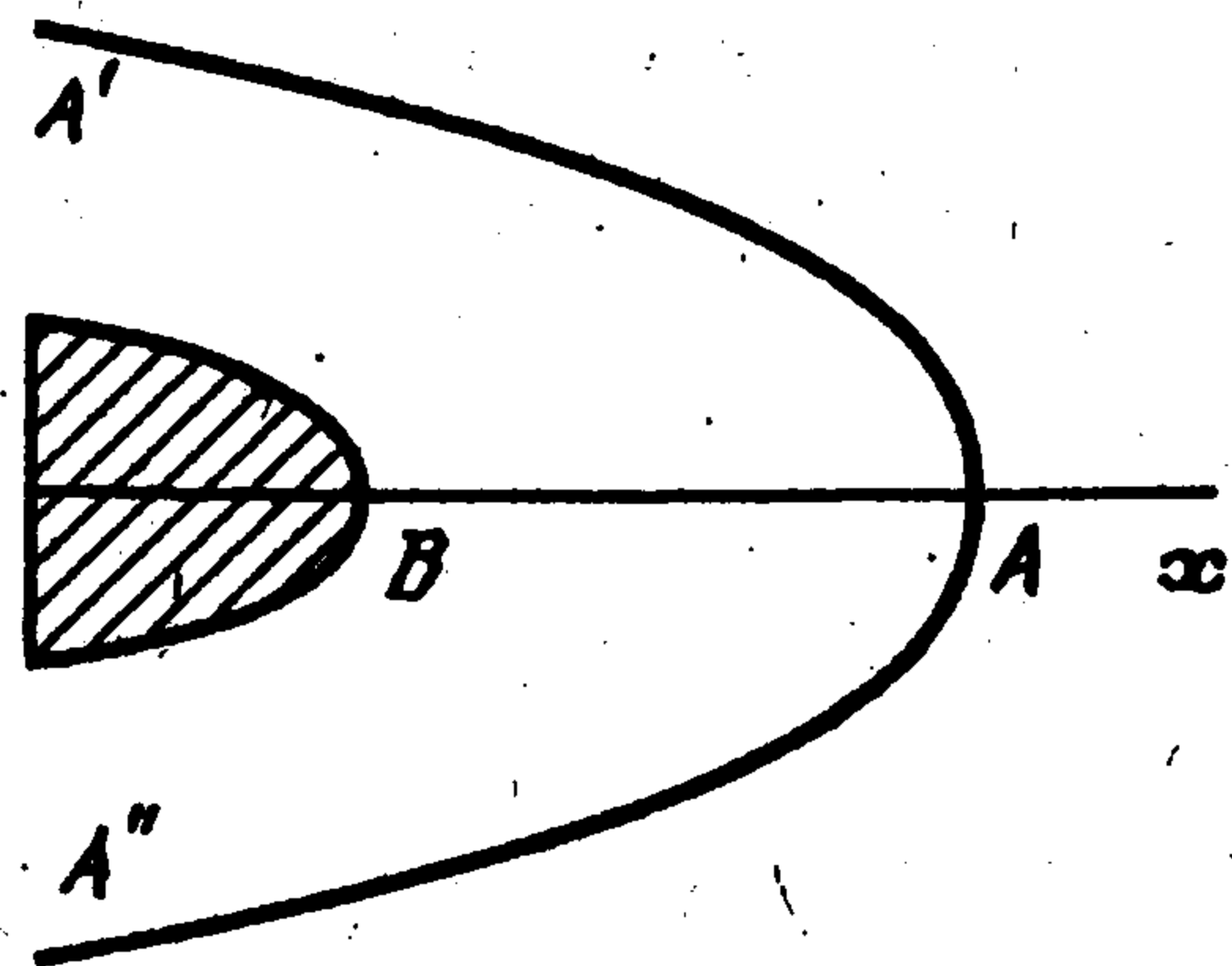
Из законов сохранения на фронте головной ударной волны и интеграла Бернулли за фронтом получены уравнения для определения плотности, давления и температуры в точке торможения установившегося сверхзвукового потока обтекаемым телом. Используются различные определяющие соотношения среды: в форме уравнения Ми – Грюнайзена (грунты, металлы) и Тэта (жидкость). На основании гипотезы о выравнивании поля контактных давлений с ростом скорости обтекания, подкрепленной известными расчетами, дается оценка сверху и снизу коэффициента лобового сопротивления. Приводятся результаты расчетов для двух типов песков, глины и воды. Найдены поправки при учете теплопроводности, вязкости и пластичности.

Некоторые геологические среды отличаются сравнительно низкими значениями скорости звука (несколько сот метров в песках, лессах, фирне). Поэтому, например, при исследовании физико-механических свойств таких структур на поверхностях планет методом динамических пенетрационных испытаний могут возникать сверхзвуковые режимы движения научно-исследовательской станции-зонда и связанная с этим необходимость оценки давления и температуры.

При обработке экспериментальных данных [1] показано, что гидродинамическая часть силы сопротивления при дозвуковом движении тела в прочной среде описывается также как в жидкости соответствующей плотности. Силы же, зависящие от прочности, стабилизируются и становятся малыми при околосвуковых скоростях. Аналогичный вывод следует из асимптотического анализа задачи обтекания тонких тел упругопластическим потоком [2]. Упрощенные модели сверхзвуковых движений тел минимального сопротивления [3, 4], основанные на известной гипотезе Лаврентьева о близости полей напряжений и скоростей в жидкости и в прочной среде, содержат априорные представления о влиянии сжимаемости среды и нуждаются в калибровке. Кроме того, с точки зрения прочности обтекаемого тела важно знать максимальные давления и температуру на его поверхности. Определение этих величин – главная цель предлагаемой работы.

Не прибегая к решению сложной задачи обтекания жесткого тела плотной средой в целом, аналитическими методами получены сравнительно простые уравнения и квадратуры для расчетов давления, плотности и температуры на фронте головной волны и в точке торможения потока. Среда описывается уравнением состояния Ми – Грюнайзена и линейным законом скорость волны – скорость частиц за фронтом [5–10] или уравнением Тэта [11]. Точность аппроксимации соответствует реальной точности экспериментальных данных по ударным адиабатам и термодинамическим параметрам. Вычисления проведены для геологических сред (пески, глина, вода) в области скоростей обтекания от 0,5 до 4 км/с, давлений до ~ 10 ГПа – до тех пор, пока ударник из высокопрочных материалов не будет с очевидностью разрушаться. Как оказалось, приращения давления за фронтом скачка доминируют над амплитудой этого скачка при небольших числах Маха ($M < 2$), но и при $2 < M < 4$ порядок величины этого приращения такой же, как и у амплитуды. Температурные всплески оказались невелики по сравнению с температурами плавления жаростойких сплавов и, по-видимому, из-за кратковременности процесса мало повлияют на прочность

ударника. Важно, что наблюдается устойчивость найденных величин по отношению к вариациям параметров среды. Так, коэффициенты давлений при скорости менее 3 км/с не превышают значения 1,4 для всех случаев. Предложены оценки коэффициента сопротивления, а также оценки влияния вязкости, теплопроводности и пластичности – факторов, неучитываемых в основном контексте. Подобные экспериментальные данные в указанной области скоростей отсутствуют, а численный эксперимент проведен только для воды [12–14]. Сходные элементы содержатся в теоретических работах [15, 16]. Так, главным из них в [16] является предположение о кавитационном характере обтекания. Однако вопросы термодинамики в [15, 16] не затрагивались. Поэтому полученные результаты, хотя и не обладают полнотой, дают новую и важную информацию о характеристиках обтекания и могут использоваться при отладках вычислительных алгоритмов.



Вообще говоря, существование режима кавитационного обтекания автоматически следует из известной гипотезы М.А. Лаврентьева о близости характеристик высокоскоростного течения в жидкости и в прочной среде. Конкретно кавитационное обтекание тела в прочной среде, по-видимому впервые, упоминается при изложении закрытых работ английских исследователей в военные годы [17], а также в работах [1, 3, 4].

1. Физические предпосылки. Осесимметричное затупленное абсолютно жесткое тело обтекается сверхзвуковым установившимся безграничным потоком конденсированной, невязкой и нетеплопроводной среды. Изучаются режимы отрывного обтекания. Для простоты считаем, что линия отрыва задана конфигурацией обтекаемого контура с изломом (диск, сегмент параболоида, и др.). Прочностными эффектами ввиду высокого уровня давления пренебрегаем.

В сверхзвуковом установившемся режиме обтекания $M = U_- / D_0 > 1$, где U_- и D_0 – скорости набегающего потока и слабой ударной волны в среде, впереди тела формируется головная сильная ударная волна $A'A''$ (фигура). Перед фронтом этой волны поток не возмущен:

$$U = U_-, \quad P = 0, \quad T = T_-, \quad V = V_-, \quad E = 0 \quad (1.1)$$

где U – массовая скорость, P – давление, T – температура, V, E – удельные объем и внутренняя энергия. Параметры скачком меняются при пересечении фронта (индекс плюс) и непрерывным образом за фронтом (индекс звездочка в точке торможения B). Для описания состояния твердой среды примем известное уравнение Ми – Грюнайзена, воды – уравнение Тэта.

В пористой среде и при сравнительно небольшой амплитуде ударной волны происходит необратимое объемное деформирование среды при догрузении за фронтом и, следовательно, предположение об изэнтропичности, существенно упрощающее анализ, теряет смысл. В этом случае в отсутствие необходимых экспериментальных данных о механическом поведении пористой среды в условиях высокого давления и температуры дадим верхнюю и нижнюю оценку искомых величин, исходя из предположения или адиабатичности или изэнтропичности процесса догружения.

Можно показать, что по крайней мере при умеренных значениях числа Маха скачок располагается далеко от носовой части тела (по сравнению с его поперечным размером). Это означает, что переход $A \Rightarrow B$ осуществляется при значительной вариации искомых функций и не может быть аппроксимирован согласно простейшим схемам (например, по методу Ньютона). Поэтому состояния в точке симметрии на фронте

волны A и в точке торможения B свяжем при помощи интеграла Бернулли для сжимаемой жидкости при условии торможения потока $U_* = 0$:

$$P_* U_* - P_+ V_+ - \frac{U_+^2}{2} + V_- \int_{\theta_+}^{\theta_*} P_s(\theta) d\theta = 0, \quad \theta = 1 - \frac{V}{V_-} \quad (1.2)$$

Некоторые ограничения, связанные с применимостью интеграла (1.2), обсуждаются в разд. 7. Выпишем также общие законы сохранения на скачке при учете (1.1):

$$P_+ = U_-(U_- - U_+)/V_- = U_+(U_- - U_+)/V_+, \quad E_+ = P_+(V_- - V_+)/2 \quad (1.3)$$

При $M \leq 1$ скачок отсутствует (точка A удаляется на бесконечность вверх по потоку при $M \Rightarrow 1 + 0$), а тогда интеграл Бернулли связывает состояния в точке B и на бесконечности.

Равенства (1.1)–(1.3) замыкаются определяющим соотношением вида $E = E(P, V)$.

2. Уравнение Ми – Грюнайзена. Для описания состояния твердых тел в области высоких давлений и температур примем уравнение в форме Ми – Грюнайзена при использовании ударной адиабаты $P_H = P_H(\theta, V_-)$ и соотношения для определения параметра Грюнайзена [5]

$$\Gamma/V = \Gamma_0/V_0 = \Gamma_-/V_- \quad (2.1)$$

где V_0, Γ_0 – значения параметров сплошной фазы при нормальных условиях, Γ_- – эффективное значение, совпадающее со значением Γ_0 , если $V_0 = V_-$ (пористость отсутствует). Тогда уравнение принимает вид

$$E = E_H(\theta, V_-) + V_-(P - P_H)/\Gamma_-, \quad E_H(\theta, V_-) = \theta V_- P_H(\theta, V_-)/2 \quad (2.2)$$

Привлекая дополнительно термодинамическое равенство $P_s = -(dE/dV)_s$, как обычно, получим сначала обыкновенное дифференциальное уравнение для изэнтропы, а затем его решение при начальном условии старта с ударной адиабаты:

$$P_s = P_H(\theta, V_-) + \frac{\Gamma_-}{2} \int_{\theta_+}^{\theta} \left(1 - x \frac{\partial}{\partial x}\right) P_H(x, V_-) \exp[\Gamma_-(x - \theta)] dx \quad (2.3)$$

Будем ориентироваться ниже на экспериментальные ударные адиабаты. Для многих сред они аппроксимируются линейной зависимостью между волновой D и массовой u скоростями в лабораторной системе координат [5]:

$$D = D_0 + \lambda u \Rightarrow P_H = D_0^2 \theta / V_- (1 + \lambda \theta)^2 \quad (2.4)$$

В условиях (2.2) уравнение изэнтропы (2.3) примет вид (2.5), а при подстановке в интеграл (1.2) получим уравнение для определения деформации $\theta_* = 1 - V_*/V_-$ в точке торможения. Приведем окончательный вид системы соотношений для нахождения искомых величин P_* , V_* и коэффициента давления C_P :

$$P_* = P_s(\theta_*) = P_H(\theta, V_-) - \Gamma_- V_-^{-1} D_0^2 I(\theta_*, \theta_+), \quad C_P = 2V_- U_-^{-2} P_* \quad (2.5)$$

$$\theta_*(2 - \theta_*)(1 - \lambda \theta_*)^{-2} - 2[1 + \Gamma_-(1 - \theta_*)]I(\theta_*, \theta_+) = M^2$$

$$I = \int_{\theta_+}^{\theta_*} \exp[\Gamma_-(x - \theta)] \frac{\lambda x^2 dx}{(1 - \lambda x)^2}$$

Температуру в точке торможения вычислим, суммируя ее приращения на фронте и вдоль изэнтропы. Скачок на фронте определяется интегрированием уравнения, которое выводится из термодинамического тождества:

$$dT/T = dS/c_V - \Gamma dV/V \quad (2.6)$$

Таблица 1

M	ρ_+	ρ_{+i}	ρ_{+a}	P_{+i} ГПа	P_{+a} ГПа	P_{+i} ГПа	P_{+a} ГПа	ΔT_{+i} К	ΔT_{+a} К	C_{Pi}	C_{Pa}
Песок А											
1,2	1,07	1,27	1,26	0,04	0,35	0,33	20	67	75	1,17	1,11
1,5	1,16	1,32	1,31	0,13	0,57	0,53	44	80	98	1,21	1,14
2	1,26	1,39	1,38	0,35	1,04	0,97	77	104	145	1,26	1,16
2,5	1,33	1,44	1,43	0,65	1,67	1,52	111	134	207	1,29	1,18
3	1,39	1,48	1,46	1,04	2,44	2,22	153	174	285	1,31	1,19
5	1,50	1,56	1,55	3,46	6,99	6,30	431	449	786	1,35	1,21
7	1,56	1,60	7,26	13,9	911	932				1,37	
Песок В											
1,1	1,07	1,40	1,38	0,22	2,02	2,64	20	93	145	1,22	1,16
1,5	1,32	1,60	1,55	1,49	4,09	3,74	111	167	315	1,33	1,22
2	1,57	1,82	1,75	3,98	7,75	6,96	340	396	697	1,42	1,27
2,5	1,77	1,99	1,92	7,46	12,6	11,2	762	830	1303	1,47	1,32
Глина											
1,1	1,07	1,37	0,41	4,04	57	12	1,21				
1,5	1,29	1,55	2,81	8,11	117	84	1,31				
2	1,52	1,73	7,49	15,3	349	315	1,39				
2,5	1,69	1,88	14,0	24,8	814	772	1,44				

где S – энтропия, c_V – удельная теплоемкость при постоянном объеме, и уравнения для энтропии вдоль ударной адиабаты [5]:

$$2TdS = (V_- - V)dP + PdV \quad (2.7)$$

Связь температур T_+ и T_* определяется интегрированием уравнения (2.6) при $dS = 0$. В результате имеем

$$T_+ = T_- \exp(\Gamma_- \theta_+) + D_0^2 c_V^{-1} I(\theta_+, 0), \quad T_* = T_+ \exp[\Gamma_- (\theta_* - \theta_+)] \quad (2.8)$$

Плотная среда. В качестве примера плотной геологической среды ($V_0 = V_-$) рассмотрим глину влажностью $w = 4\%$ с параметрами [6–8]:

$$D_0 = 1600 \text{ м/с}, \quad \lambda = 1,47, \quad 1/V_- = 2,15 \times 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad c_V = 980 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}, \quad \Gamma_0 = 0,9$$

Последние два значения скорректированы согласно обычному аддитивному подходу к расчету смесей. Значения искомых величин, рассчитанные по уравнениям (2.4), (2.5), (2.8), приведены в табл. 1. Указаны приращения температур $\Delta T_+ = T_+ - T_-$ и $\Delta T_* = T_* - T_-$, давления приведены в ГПа. Сравнительный анализ дан ниже.

Пористая среда. Сухой песок является пористой геологической средой с относительно низкой скоростью распространения возмущений D_0 . Экспериментальные данные по ударной адиабате одного типа песка (песок А) и значения c_V и Γ_0 представлены в [7–9]:

$$D_0 = 500 \text{ м/с}, \quad \lambda = 2,4, \quad 1/V_- = 1,66 \times 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad 1/V_0 = 2,65 \times 10^3 \text{ кг/м}^3,$$

$$c_V = 790 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}, \quad \Gamma_- = 1 \quad (692 < D < 2900 \text{ м/с}, \quad 1,4 < M < 5,8, \quad 0,1 < P_H < 5 \text{ ГПа})$$

В указанном диапазоне амплитуд ударной волны происходит разрушение частиц песка и заполнение пор [9]. За фронтом имеет место догружение и дальнейшее необратимое уменьшение пористости. Такой процесс нельзя считать изэнтропическим. Построение точного уравнения процесса затруднено отсутствием данных по сжимаемости песка при высоких давлениях, скоростях деформирования и температурах. Поэтому ограничимся оценкой искомых величин сверху и снизу.

Так, можно использовать ударную адиабату (2.4) как уравнение процесса быстрого нагружения. Действительно, реальный скачок в песке размазан на ширину нескольких характерных размеров микроструктуры и при относительно небольших поперечных размерах тела можно считать, что ударное нагружение продолжается вплоть до точки В, только в два этапа. Тогда в расчетной модели (2.5) следует положить $I \equiv 0$, уравнение для θ_* станет квадратным и нужный корень определяется по формуле

$$\theta_* = (1 + M^2 - \sqrt{1 + (2 - \lambda^{-1})M^2}) / (\lambda M^2 + 1)$$

Давление P_* затем находится по уравнению ударной адиабаты (2.4), а температуру T_* будем рассчитывать по первой формуле (2.8), как и T_+ , при замене θ_+ на θ_* . При этом, очевидно, будут завышены тепловая часть внутренней энергии, производство энтропии и температура, а для механических характеристик P_* , $\rho_* = V_-/V_*$ (относительная плотность) и C_P получим оценку снизу. Обратные оценки получаются, если исходить из приближения изэнтропы (2.5)–(2.8). Отметим, что расчеты дают весьма узкий интервал для истинных значений механических параметров, а ширина интервала для температуры T_* существенно растет с амплитудой скачка.

Численные значения величин, помеченных там, где это необходимо, индексами i (изэнтропа) и a (адиабата) представлены в табл. 1. Там же приведены результаты для песка В, представляющего собой искусственно полученную кварцевую крошку (α -фаза). Параметры его ударной адиабаты измерены в более высоком диапазоне скоростей и давлений [10]:

$$D_0 = 1250 \text{ м/с}, \quad \lambda = 1,375, \quad 1/V_- = 1,75 \times 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad 1/V_0 = 2,65 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$$

$$c_V = 790 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}, \quad \Gamma_- = 1 \quad (2,1 < D < 4,14 \text{ км/с}, \quad 1,68 < M < 3,3, \quad 2,28 < P_H < 15,4 \text{ ГПа})$$

Для обоих типов песков рассчитанные "изэнтропические" и "адиабатические" значения параметров подчиняются неравенствам

$$\rho_{*a} < \rho_{*i}, \quad P_{*a} < P_{*i}, \quad C_{Pa} < C_{Pi}, \quad T_{*a} > T_{*i}$$

Как показали расчеты, максимальные давления P_{*a} и P_{*i} близки по величине. При $M < 5$ относительная разность не превысила 11%. Приращения же температур не слишком различаются только при небольших амплитудах скачка. Естественно полагать, что истинные значения лежат внутри интервалов, причем сначала ближе к "адиабатическим" значениям, затем по мере роста числа Маха и истощения пористости на фронте волны, они должны приближаться к результатам расчета по изэнтропе.

Сравнение результатов для различных типов песков и глины при одинаковой скорости обтекания указывает на близкие величины давлений ($P_{*a} = 6,3; 7,0; \text{ и } 8,1$ ГПа при $U_- \cong 2,5$ км/с соответственно). Близкие же приращения температур наблюдаются только у песков, у глины они существенно меньше: $T_{*i} = 732, 679$ и 400 К. Отметим низкую чувствительность рассчитываемых величин к вариации коэффициента Грюнайзена. Так, увеличение параметра Γ_0 в полтора раза привело к увеличению температуры T_* только на 10% (глина), значения же P_* практически не изменились. Это важно, так как этот коэффициент определяется из экспериментов косвенно и с невысокой точностью.

Вырожденный случай пористой среды ($D_0 = 0$). Известно, что при некотором значении пористости (для мягких металлов $\sim 0,5$ [5]) характерная скорость D_0 обращается в нуль и этот случай вырождения следует рассмотреть отдельно. Соотношения на фронте (2.4), (2.8) при $D = U_- = \lambda u$ принимают вид

$$\theta_+ = \frac{1}{\lambda}, \quad P_+ = \frac{\theta_+ U_-^2}{V_-} = \frac{U_-^2}{\lambda V_-}, \quad T_+ = \frac{U_-^2}{2\lambda^2 c_v} + T_-, \quad E_+ = \frac{U_-^2}{2\lambda^2}$$

Плотность постоянна на фронте и равна плотности сплошной фазы при нормальных условиях ($V_+ = V_0$). Другими словами, реализуется так называемая модель "снегоочистителя". Постулируя изэнтропичность процесса догружения и уравнение состояния сплошной фазы вида (2.2) с нормальной ударной адиабатой $D = D_1 + \lambda u$, аналогично изложенному в разд. 2, получим уравнение изэнтропы за фронтом скачка и уравнение для определения деформации $\Theta_* = 1 - V_*/V_0$:

$$P_s(\Theta) = P_H(\Theta, V_0) + P_+ \exp(\Gamma_0 \Theta) - \Gamma_0 V_0^{-1} D_1^2 I(\Theta, 0)$$

$$P_* = P_s(\Theta_*), \quad T_* = T_+ \exp(\Gamma_0 \Theta_*), \quad \frac{\Theta_*(2 - \Theta_*)}{(1 - \lambda \Theta_*)^2} - 2 \left(1 + \Gamma_0 \frac{V_*}{V_0} \right) I(\Theta_*, 0) =$$

$$\frac{2(\lambda - 1)U_-^2}{\lambda^2 D_1^2} \left\{ \frac{\lambda + 1}{2} + \frac{1}{\Gamma_0} - \left(\frac{1}{\Gamma_0} + \frac{V_*}{V_0} \right) \exp(\Gamma_0 \Theta_*) \right\}$$

При еще бóльших значениях пористости величина D_0 отрицательна, но тогда, если сохраняет силу линейный закон (2.2), предыдущее рассмотрение справедливо и при условии $M < 0$.

3. Уравнение Тэта. Поскольку выше некоторого значения $P > 8$ ГПа динамическая и статическая адиабаты для воды начинают различаться, для описания движения тела в воде будем использовать скорректированное уравнение Тэта и интерполяционную формулу для скачка температуры [11]:

$$P_H(\rho) = \frac{0,309(\rho^n - 1)}{1 + 0,7(\rho - 1)^4} \text{ ГПа}, \quad \Delta T_H = 26,3 \rho_H P_H(\rho_H), \quad \rho = \frac{V_-}{V} \quad (3.1)$$

Для движений при числах Маха $M < 2$ целесообразно использовать уравнение Тэта без поправочного члена в знаменателе. Тогда расчет сводится к решению алгебраи-

Таблица 2

M	ρ_+	ρ_*	P_+ , ГПа	P_* , ГПа	ΔT_+ , К	ΔT_* , К	C_p	$C_{x0}C_p$	C_{xe}
0,5	1	1,10	0	0,30	0	—	1,05	0,86	1,02
1	1	1,26	0	1,33	0	—	1,15	0,95	1,1
1,5	1,20	1,39	0,84	3,14	41	69	1,24	1,02	
2	1,33	1,49	2,25	5,85	86	107	1,30	1,07	1,2
2,5	1,46	1,6	4,44	9,51	185	210	1,35	1,11	
3	1,59	1,72	7,50	14,2	324	349	1,40	1,15	1,25
3,5	1,73	1,85	11,6	19,9	539	568	1,44	1,18	

ческого уравнения для плотности на скачке и последующего вычисления величин в точке торможения по конечным формулам

$$nM^2(1 - \rho_+^{-1}) = \rho_+^n - 1, \quad \frac{\rho_*}{\rho_+} = \left[1 + \frac{M^2(n-1)}{2\rho_+^{n+1}} \right]^{1/(n-1)}, \quad P_* = \frac{c_-^2}{nV_-}(\rho_*^n - 1)$$

$$n = 7,3, \quad c_- = 1500 \text{ м/с}, \quad V_- = 10^{-3} \text{ м}^3/\text{кг}$$

В расчетах при $M > 1$ с применением прежнего алгоритма (2.4)–(2.8) параметры λ и Γ_0 подбирали из условия совпадения P_+ и T_+ со значениями по формулам (5.1):

$$\lambda = 2, \quad \Gamma_0 = 0,7 \quad (0 < M < 2); \quad \lambda = 1,9; 1,8, \quad \Gamma_0 = 0,85 \quad (M = 2,5; 3)$$

а коэффициент теплоемкости оценивали по данным [11]: $c_V = 3700 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}$. Результаты вычислений объединены в табл. 2.

Если сравнить численные значения для воды с данными табл. 1, то можно отметить следующее. Вследствие разной теплоемкости воды и глины приращения температур также резко различаются и при одинаковых скоростях обтекания относятся приблизительно как коэффициенты c_V . Отношения давлений P_* , грубо говоря, такое же, как и начальных плотностей, а уплотнения ρ_* также заметно выше у глины.

4. Оценки коэффициента сопротивления. Коэффициент давления C_p характеризует влияние сжимаемости среды и довольно слабо изменяется в изученном диапазоне скоростей обтекания: $1,135 < C_{p\alpha} < 1,214$, $1,5 < M < 5$, (песок А). При этом экстраполированные значения C_p при $M = 1$ равны 1,053; 1,1; 1,15; 1,2 для воды, песка А и песка В и глины, соответственно, а при $U_- < 3 \text{ км/с}$ величина C_p не превысила 1,4 для всех случаев. Важно, что этот коэффициент определяет верхнюю границу коэффициента лобового сопротивления C_x , равного произведению силы сопротивления на $2 \times V_- / U_-^2$. Это утверждение следует из условия $P \leq P_*$ на смачиваемой поверхности. С другой стороны, если бы форма распределения давления P по этой поверхности была инвариантна по отношению к числу Маха, то тогда $C_x = C_{x0}C_p$, где C_{x0} – значение C_x при $M = 0$. Однако, как показали расчеты обтекания конусов сжимаемой водой [12], это распределение выравнивается с ростом числа Маха: $P \rightarrow P_*$, $C_x \rightarrow C_p - 0$. При $M = 2-3$ коэффициент C_p уже давал неплохую аппроксимацию значения C_x сверху. Таким образом, заключаем, что

$$C_{x0}C_p < C_x < C_p \quad (4.1)$$

Для диска $C_{x0} = 0,82$ [13], и интервал (4.1) достаточно узкий. Так, арифметические средние от концов интервала (4.1) $\langle C_x \rangle = 1/2 C_p (C_{x0} + 1)$ (табл. 2) совпадают с результатами численного эксперимента C_{xe} [13]. Для шара $C_{x0} = 0,44$ и оценка (4.1) грубая.

5. Оценки влияния теплопроводности, вязкости и пластичности. Для линейно вязкой и теплопроводной жидкости уравнение изменения энергии частицы записывается в виде [14]:

$$\frac{DH}{Dt} = V \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i \tau_{ij}) + kV \Delta T, \quad H = \frac{1}{2} U_i^2 + E + PV \quad (5.1)$$

$$\tau_{ij} = 2\eta \left(e_{ij} - \frac{1}{3} e \delta_{ij} \right), \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{dU_i}{dx_j} + \frac{dU_j}{dx_i} \right), \quad e = e_{ii} \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

где x_i – декартова система координат ($x_1 = x$ – ось), U_i – составляющие вектора скорости, η – коэффициент вязкости, τ_{ij} – компоненты тензора вязких напряжений, k – коэффициент теплопроводности. Из условий симметрии на оси $r = (x_2^2 + x_3^2)^{1/2} = 0$ и отсутствия вращений вокруг оси для не равных тождественно нулю компонент получим

$$U_r = \partial U_r / \partial x = \partial U / \partial r = \tau_{rx} = 0, \quad r = 0, \quad U = U_1 \quad (5.2)$$

Далее, используя (5.2) и уравнение линейной теплопроводности с коэффициентом теплоемкости при постоянном давлении c_p , приведем закон сохранения энергии (5.1) для частицы на оси AB в установившемся потоке к виду

$$U \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{4}{3} \eta V \left(\frac{\partial}{\partial x} U \frac{\partial U}{\partial x} + \left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 \right) + U c_p \frac{\partial T}{\partial x} \quad (5.3)$$

Уравнение (5.3) может служить основой для вычисления поправок к нулевому приближению. Сначала отдельно изучим влияние теплопроводности. Интегрируя (5.3) вдоль AB при $\eta = 0$ получим

$$H_* - H_+ = c_p (T_* - T_+) \quad (5.4)$$

Левая часть равенства (5.4) совпадает с левой частью уравнения (1.2). Оценивая вклад температуры согласно методу возмущений, приходим к выводу, что правая часть (5.4) (возмущение) составляет около 1% (несколько процентов) от старшего члена $P_* V_*$ в случае глины (песков). Это находится в пределах принятой точности.

Обратимся теперь к изучению влияния вязкости, полагая $k = 0$. С целью вывода аналитической оценки зададимся некоторой конкретной формой носовой части тела (полусфер радиуса a) и будем считать, что распределение скорости вдоль AB не слишком отличается от аналогичного распределения в потоке идеальной несжимаемой жидкости, обтекающей шар: $U = U_+ (1 - a^3/x^3)$, где координата x отсчитывается от центра шара. Действительно, эта функция удовлетворяет условиям в точке B точно, а в точке A приближенно (в силу утверждения об удаленности фронта) и можно полагать, что отрыв потока, тонкий пограничный слой и сжимаемость не повлияют значительно на это распределение. При подстановке в (5.3), интегрировании "в среднем" обеих частей получившегося равенства от a до координаты фронта L и сравнении "осредненного" возмущения $\langle H_1 \rangle$ со слагаемым из "нулевого приближения", получим следующее условие малости влияния вязкости:

$$\langle H_1 \rangle = 3 \int_a^L H_1(x) \frac{a^3}{x^4} dx = \frac{12\eta U_+ V_+}{7a} \ll \frac{1}{2} U_+^2 \rightarrow \eta \ll \frac{7a U_+}{24 V_+}$$

Данная оценка является ориентировочной при ответе на вопрос, следует ли вводить в рассмотрение вязкость. Например, у глицерина при нормальной температуре

$\eta \sim 1 \text{ Па} \cdot \text{с}$ и из оценки следует $a \gg 10^{-6} \text{ м}$. Эта оценка значительно улучшается в случае гораздо менее вязких жидкостей или при учете разогрева, к которому величина η , как известно, весьма чувствительна.

При учете пластичности вместо давления должно фигурировать нормальное напряжение σ_x . Поскольку используется экспериментальная адиабата, то соотношения на фронте останутся прежними. За фронтом, согласно асимптотическому подходу [2], примем, что пластичность дает поправку к гидродинамике, вычисляемую как следующая итерация. По-прежнему для получения правильного порядка величины поправки можно считать, что в окрестности точки торможения у полушара характеристики течения близки к тем, которые получаются из асимптотического решения задачи о безотрывном обтекании шара упругопластическим потоком [15]. Тогда поправка к коэффициенту давления будет выглядеть так:

$$\Delta C_p = \frac{4\tau_d V_-}{\sqrt{3}U_-^2} \left(4 \ln \frac{\sqrt{3}\mu}{\tau_d} + 1 \right) \quad (5.5)$$

где τ_d — динамический предел текучести (по Мизесу), μ — модуль сдвига.

Судя по экспериментам [1], предел текучести τ_d , отвечающий состоянию среды за фронтом, есть параметр процесса, много меньший динамического предела упругости, вычисляемого по измерениям амплитуды упругого предвестника, и гораздо более близкий по величине к статическому пределу текучести, превышая его в 1,5–3 раза. Из структуры формулы (5.5) видно, что поправка быстро убывает с ростом скорости обтекания. Для глины ориентировочные значения параметров таковы: $\tau_d \cong 3 \times 10^6 \text{ Па}$, $\mu/\tau_d \cong 10^2$ и при $M > 1,2$ будет $\Delta C_p < 10^{-2}$.

В случае фазовых переходов, которые обнаруживаются, в частности, по изломам ударных адиабат, D -и соотношение часто кусочно-линейно, и тогда расчет несущественно усложняется.

Автор благодарит Л.В. Альтшуллера за полезную информацию.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (16530) и Международного Научного фонда (MN 1000).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бивин Ю.К., Колесников В.А., Флитман Л.М. Определение механических свойств среды методом динамического внедрения // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 5. С. 181–185.
2. Флитман Л.М. Дозвуковое осссимметричное обтекание тонких заостренных тел вращения упругопластическим потоком // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 4. С. 155–164.
3. Симонов И.В. Кавитационное проникание тел минимального сопротивления в прочную среду // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 6. С. 110–119.
4. Бивин Ю.К., Симонов И.В. Оценки глубин проникания жестких тел в грунтовые среды при сверхзвуковых скоростях входа // Докл. РАН. 1993. Т. 328. № 4. С. 447–450.
5. Высокоскоростные ударные явления / Под ред. Николаевского В.Н. М.: Мир, 1973. 533 с.
6. Альтшуллер Л.В., Павловский М.Н. Исследование глины и глинистого сланца при сильных динамических воздействиях // ПМТФ. 1971. № 1. С. 171–176.
7. Николаевский В.Н. Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. 232 с.
8. Дубровский И.М., Егоров Б.В., Рябошапка К.П. Справочник по физике. Киев: Наук. думка, 1986. 557 с.
9. Лагунов В.А., Степанов В.А. Измерение динамической сжимаемости песка при высоких давлениях // ПМТФ. 1963. № 1. С. 88–96.
10. Трунин Р.Ф., Симаков Г.В., Подурец М.А. Сжатие пористого кварца сильными ударными волнами // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1971. № 2. С. 33–39.

11. Кузнецов Н.М. Уравнение состояния и теплоемкость воды в широком диапазоне термодинамических параметров // ПМТФ. 1961. № 1. С. 112–120.
12. Альев Г.А. Отрывное обтекание кругового конуса трансзвуковым потоком воды // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983. № 2. С. 152–154.
13. Бахрах С.М., Винокуров О.А., Горбенко Г.В. и др. Численное исследование процесса проникания с постоянной скоростью в сжимаемую жидкость недеформируемых цилиндров // ПМТФ. 1989. № 5. С. 150–155.
14. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
15. Флитман Л.М. Безотрывное обтекание затупленного тела высокоскоростным упруго-пластическим потоком // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 642–651.
16. Григорян С.С. Приближенное решение задачи о проникании тела в грунт // Изв. РАН. МЖГ. № 4. 1993. С. 18–24.
17. Hill R. Cavitation and the influence of headshape in attack of thick targets by non-deforming projectiles // J. Mech. Phys. Solids. 1980. V. 28. P. 249–263.

Москва

Поступила в редакцию
28.IV.1994