

УДК 539.3:534.1

© 1995 г. И.И. Ворович, О.Д. Пряхина, О.М. Тукодова,
М.Р. Фрейгейт

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СЛОИСТЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ И АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Метод построения функции влияния для многослойной изотропной среды (матрицы-символа Грина) [1] обобщается на случай, когда слои обладают электроупругими или анизотропными свойствами. Решение получено для пьезокристаллов класса *6mm* гексагональной сингонии (поляризованная вдоль оси *z* пьезокерамика). Предложенный подход применим и к другим задачам электроупругости. В случае, когда пьезоэлектрические и диэлектрические константы равны нулю, получена матрица-символ Грина для трансверсально-изотропной слоистой среды. Исследована динамическая контактная задача и проведен численный анализ влияния анизотропных свойств слоев на поведение массивного штампа при нестационарном нагружении.

1. Гармонические колебания электроупругого слоя. Пусть электроупругий слой занимает область $|z| \leq h$, $-\infty < x, y < \infty$. В качестве электроупругого материала рассмотрим пьезокристаллы класса *6mm* гексагональной сингонии (пьезокерамику, поляризованную в направлении оси *z*). На верхней и нижней границах слоя заданы механические нагрузки $te^{-i\omega t}$, $ge^{-i\omega t}$ и плотности распределения электрических зарядов на поверхности (нормальные составляющие электрической индукции или электрического смещения) $d_1e^{-i\omega t}$ и $d_2e^{-i\omega t}$ соответственно.

Электроупругие гармонические колебания слоя описываются следующими уравнениями в квазистатическом приближении [2] (в безразмерных амплитудах параметров, общий для всех характеристик множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опущен):

$$\begin{aligned} \partial_1\theta + \Delta u + \Omega^2 u &= 0, \quad \partial_2\theta + \Delta v + \Omega^2 v = 0 \\ \partial_3\theta^0 + \Delta^0(w + e_1\psi) + \Omega^2 w &= 0 \\ \partial_3\theta^* + \Delta^0(e_1 w - \varepsilon_1\psi) &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \theta &= \alpha_2 f + \partial_3(\alpha_3 w + e_0\psi), \quad \Delta = \alpha_1 \Delta^0 + \partial_3^2 \\ \theta^0 &= \alpha_3 f + \partial_3(\delta_0 w + e_3\psi), \quad \Delta^0 = \partial_1^2 + \partial_2^2 \\ \theta^* &= e_0 f + \partial_3(e_3 w - \varepsilon_3\psi), \quad f = \partial_1 u + \partial_2 v, \quad \alpha_2 = \alpha_0 - \alpha_1 \\ \alpha_0 &= \frac{c_{11}}{c_{44}}, \quad \beta_0 = \frac{c_{12}}{c_{44}}, \quad \gamma_0 = \frac{c_{13}}{c_{44}}, \quad \delta_0 = \frac{c_{33}}{c_{44}}, \quad \alpha_{1,2} = \frac{\alpha_0 \mp \beta_0}{2} \\ \alpha_3 &= 1 + \gamma_0, \quad e_1 = \frac{e_{15}l}{c_{44}}, \quad e_2 = \frac{c_{31}l}{c_{44}}, \quad e_3 = \frac{c_{33}l}{c_{44}} \end{aligned}$$

$$e_0 = e_1 + e_2, \quad \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_{11}l^2}{c_{44}}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_{33}l^2}{c_{44}}, \quad \Omega^2 = \frac{\rho\omega^2 a^2}{c_{44}}$$

Символы ∂_i ($i = 1, 2, 3$) означают дифференцирование по $x/a, y/a, z/a$ соответственно, x, y, z – декартова система координат. Вектор-функция $w(x, y, z) = \{u, v, w, \psi\}$ имеет своими компонентами u, v, w – горизонтальные и вертикальные смещения точек среды, ψ – потенциал электрического поля, ω – круговая частота колебаний, ρ – плотность материала, a – характерный линейный размер (например, полуширина электрода), l – нормирующий множитель, имеющий размерность электрического поля E , $c_{ij} = c_{ij}^E$, e_{ij}, ε_{ij} – соответственно размерные упругие, пьезоэлектрические и диэлектрические постоянные.

Задачу разобьем на две: симметричную и кососимметричную.

Граничные условия симметричной задачи имеют вид:

$$\begin{aligned} z = \pm h: \quad \partial_3 u + \partial_1(w + e_1 \psi) &= \pm(t_1 - r_1)/2 \\ \partial_3 v + \partial_2(w + e_1 \psi) &= \pm(t_2 - r_2)/2 \\ \gamma_0 f + \partial_3(\delta_0 w + e_3 \psi) &= (t_3 + r_3)/2 \\ e_2 f + \partial_3(e_3 w - \varepsilon_3 \psi) &= (d_1 + d_2)/2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $t = \{t_1, t_2, t_3, d_1\}$, $r = \{r_1, r_2, r_3, d_2\}$, $t_{1,2}$ и $r_{1,2}$ – горизонтальные и t_3, r_3 – вертикальные компоненты векторов механической нагрузки, $d_{1,2}$ – нормальные составляющие векторов электрической индукции, действующие на верхнюю и нижнюю грани слоя соответственно.

Граничные условия кососимметричной задачи отличаются от (1.2) тем, что $\pm(t_{1,2} - r_{1,2})$ заменяется на $t_{1,2} + r_{1,2}$, $t_3 + r_3$ на $\pm(t_3 - r_3)$, а $d_1 + d_2$ на $\pm(d_1 - d_2)$.

Решение системы (1.1) ищем в виде

$$u = \partial_1 f_1 + \partial_2 f_2, \quad v = \partial_2 f_1 - \partial_1 f_2, \quad w = w, \quad \psi = \psi \quad (1.3)$$

После подстановки (1.3) в (1.1) и преобразований получим в преобразованиях Фурье по x, y :

$$\begin{aligned} (-\lambda^2 \alpha_0 + \partial_3^2 + \Omega^2)A - \lambda^2 \partial_3(\alpha_3 W + e_0 \Psi) &= 0 \\ \alpha_3 \partial_3 A + \partial_3^2(\delta_0 W + e_3 \Psi) - \lambda^2(W + e_1 \Psi) + \Omega^2 W &= 0 \\ e_0 \partial_3 A + \partial_3^2(e_3 W - \varepsilon_3 \Psi) - \lambda^2(e_1 W - \varepsilon_1 \Psi) &= 0 \\ (-\lambda^2 \alpha_1 + \partial_3^2 + \Omega^2)B = 0 \quad (\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad A = -\lambda^2 f_1, \quad B = -\lambda^2 f_2) \end{aligned} \quad (1.4)$$

где α, β – параметры преобразования Фурье.

Из последнего уравнения (1.4) находим

$$k^2 - \alpha_1 \lambda^2 + \Omega^2 = 0, \quad k_4 = \pm(\alpha_1 \lambda^2 - \Omega^2)^{1/2} = \pm \sigma_4$$

Составим характеристическое уравнение системы (1.4) в виде:

$$\begin{aligned} \mu_1 k^6 + \mu_2 k^4 + \mu_3 k^2 + \mu_4 &= 0 \\ \mu_1 &= -\varepsilon_3 \delta_0 - e_3^2, \quad \mu_2 = \Omega^2(\mu_1 - \varepsilon_3) + \lambda^2 c_1 \\ \mu_3 &= -\varepsilon_3 \Omega^4 + \lambda^2 \Omega^2(\varepsilon_3 + \alpha_0 \varepsilon_3 + \chi_5 + \chi_6) + \lambda^4 c_2 \\ \mu_4 &= \Omega^4 \lambda^2 \varepsilon_1 - \Omega^2 \lambda^4(\chi_7 + \varepsilon_1 \alpha_0) + \lambda^6 \alpha_0 \chi_7 \\ c_1 &= \varepsilon_3 + e_0 \chi_1 - \alpha_3 \chi_2 + \chi_5 - \alpha_0 \mu_1 \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$c_2 = \alpha_3 \chi_4 - e_0 \chi_3 - e_1^2 - \alpha_0 \epsilon_3 - \alpha_0 \chi_5 - \epsilon_1$$

$$\chi_1 = e_0 \delta_0 - \alpha_3 e_3, \quad \chi_2 = e_0 e_3 + \alpha_3 \epsilon_3$$

$$\chi_3 = e_0 - \alpha_3 e_1, \quad \chi_4 = e_0 e_1 + \alpha_3 \epsilon_1$$

$$\chi_5 = \epsilon_1 \delta_0 + 2e_1 e_3, \quad \chi_6 = \epsilon_1 + e_0^2, \quad \chi_7 = \epsilon_1 + e_1^2$$

Как показывает анализ [2], это бикубическое уравнение относительно параметра k для известных пьезокерамик имеет два действительных корня $k_1 = \pm \sigma_1$ и четыре комплексно-сопряженных $\pm(k_2 \pm ik_3) = \pm \sigma_{2,3}$.

Для симметричной задачи решение можно представить в виде

$$A = \sum_{i=1}^3 p_i W_i \operatorname{ch} \sigma_i z, \quad W = \sum_{i=1}^3 W_i \operatorname{sh} \sigma_i z, \quad \Psi = \sum_{i=1}^3 s_i W_i \operatorname{sh} \sigma_i z \quad (1.6)$$

$$B = b \operatorname{ch} \sigma_4 z$$

$$s_i = (\chi_1 \sigma_i^2 + \Omega^2 e_0 - \chi_3 \lambda^2) / (\chi_4 \lambda^2 - \chi_2 \sigma_i^2) \quad (1.7)$$

$$p_i = \lambda^2 \sigma_i (\alpha_3 + e_0 s_i) / (\sigma_i^2 - \alpha_0 \lambda^2 + \Omega^2)$$

а для кососимметричной задачи в аналогичном виде при замене $\operatorname{sh}(\cdot) \leftrightarrow \operatorname{ch}(\cdot)$.

Граничные условия симметричной задачи (1.2) преобразуются к виду

$$z = \pm h: \quad \partial_3 A - \lambda^2 (w + e_1 \Psi) = \mp \lambda^2 Q_1^+ / 2$$

$$\gamma_0 A + \partial_3 (\delta_0 w + e_3 \Psi) = Q_3^+ / 2 \quad (1.8)$$

$$e_2 A + \partial_3 (e_3 w - \epsilon_3 \Psi) = Q_4^+ / 2$$

$$\partial_3 B = \mp \lambda^2 Q_2^+ / 2$$

Для кососимметричной задачи величины $\mp Q_1^+$, $\mp Q_2^+$ заменяются на $-Q_1^-$, $-Q_2^-$, а Q_3^+ , Q_4^+ на $\pm Q_3^-$, Q_4^- соответственно.

Здесь

$$Q_1^\pm = i \lambda^{-2} [(T_1 \mp R_1) \alpha + (T_2 \mp R_2) \beta]$$

$$Q_2^\pm = i \lambda^{-2} [(T_1 \mp R_1) \beta + (T_2 \mp R_2) \alpha]$$

$$Q_3^\pm = T_3 \pm R_3, \quad Q_4^\pm = D_1 \pm D_2$$

T_i, R_i, D_i – преобразования Фурье t_i, r_i, d_i соответственно.

Из последнего граничного условия (1.8) находим h , в результате

$$B = -\lambda^2 \operatorname{ch} \sigma_4 z (2 \sigma_4 \operatorname{sh} \sigma_4 h)^{-1} Q_2^+$$

Остальные граничные условия (1.8) дают систему для определения неизвестных коэффициентов W_i :

$$LW = F, \quad F = \frac{1}{2} \{-\lambda^2 Q_1^+, Q_3^+, Q_4^+\}$$

Элементы матрицы $L = \|L_{ij}\|$ ($i, j = 1, 2, 3$) таковы:

$$L_{1j} = l_{1j} \operatorname{sh} \sigma_i h, \quad L_{ij} = l_{ij} \operatorname{ch} \sigma_i h, \quad i = 2, 3$$

$$l_{1j} = -\lambda^2 (1 + e_1 s_j) + \sigma_j p_j$$

$$l_{2j} = \sigma_j (\delta_0 + e_3 s_j) + \gamma_0 p_j \quad (1.9)$$

$$l_{3j} = \sigma_j(e_3 - \varepsilon_3 s_j) + e_2 p_j$$

Учитывая, что $\lambda^2 U = i\alpha A + i\beta B$ и $\lambda^2 V = i\beta A - i\alpha B$, решение симметричной задачи (1.6) запишем в виде

$$W(z) = A_h^+(z)Q^+, \quad Q^+ = \{Q_1^+, Q_2^+, Q_3^+, Q_4^+\}, \quad W = \{U, V, W, \Psi\}$$

Аналогичным образом строится решение кососимметричной задачи:

$$W(z) = A_h^-(z)Q^-$$

Матрицы $A_h^\pm(z)$ имеют следующую структуру:

$$A_h^\pm(z) = \begin{vmatrix} -i\alpha\lambda^2 M_1^\pm & -i\beta\lambda^2 N^\pm & i\alpha M_2^\pm & i\alpha M_3^\pm \\ -i\beta\lambda^2 M_1^\pm & +i\alpha\lambda^2 N^\pm & i\beta M_2^\pm & i\beta M_3^\pm \\ -\lambda^2 K_1^\pm & 0 & K_2^\pm & K_3^\pm \\ -\lambda^2 R_1^\pm & 0 & R_2^\pm & R_3^\pm \end{vmatrix}$$

$$K_i^+ = \frac{1}{2\Delta^+} \sum_{j=1}^3 m_{ij} s_j(z), \quad R_i^+ = \frac{1}{2\Delta^+} \sum_{j=1}^3 s_j m_{ij} s_j(z), \quad M_i^+ = \frac{1}{2\lambda^2 \Delta^+} \sum_{j=1}^3 p_j m_{ij} c_j(z),$$

$$N^+ = \text{ch} \sigma_4 z (2\sigma_4 \lambda^2 \text{sh} \sigma_4 h)^{-1}, \quad \Delta^+ = \sum_{j=1}^3 l_{1j} m_{1j} t_j$$

$$m_{11} = l_{22} l_{33} - l_{32} l_{23}, \quad m_{12} = l_{31} l_{23} - l_{21} l_{33}, \quad m_{13} = l_{21} l_{32} - l_{22} l_{31}$$

$$m_{21} = l_{13} l_{32} t_3 - l_{12} l_{33} t_2, \quad m_{22} = l_{11} l_{33} t_1 - l_{13} l_{31} t_3$$

$$m_{23} = l_{12} l_{31} t_2 - l_{11} l_{32} t_1, \quad m_{31} = l_{12} l_{23} t_2 - l_{13} l_{22} t_3$$

$$m_{32} = l_{13} l_{21} t_3 - l_{11} l_{23} t_1, \quad m_{33} = l_{11} l_{22} t_1 - l_{12} l_{21} t_2$$

$$s_j(z) = \frac{\text{sh} \sigma_j z}{\text{ch} \sigma_j h}, \quad c_j(z) = \frac{\text{ch} \sigma_j z}{\text{ch} \sigma_j h}, \quad t_j = \text{th} \sigma_j h$$

Элементы $\Delta^-, K_i^-, R_i^-, M_i^-, N^-$ получаются заменой $\text{sh} \leftrightarrow \text{ch}$ в $\Delta^+, K_i^+, R_i^+, M_i^+, N^+$ соответственно.

Общее решение задачи

$$W(z) = A_h^+(z)Q^+ + A_h^-(z)Q^-$$

Введем две матрицы специального вида

$$C^\pm = \begin{vmatrix} \pm i\alpha\lambda^{-2} & \pm i\beta\lambda^{-2} & 0 & 0 \\ \pm i\beta\lambda^{-2} & \mp i\alpha\lambda^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Тогда $Q^\pm = C^+ T \pm C^- R$ и решение для слоя запишется так:

$$W(z) = B_+(z)T + B_-(z)R \tag{1.10}$$

$$B_\pm(z) = (A_h^+(z) \pm A_h^-(z))C^\pm =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha^2 m_1^\pm + \beta^2 n^\pm & \alpha\beta(m_1^\pm - n^\pm) & \pm i\alpha m_2^\pm & \pm i\alpha m_3^\pm \\ \alpha\beta(m_1^\pm - n^\pm) & \beta^2 m_1^\pm + \alpha^2 n^\pm & \pm i\beta m_2^\pm & \pm i\beta m_3^\pm \\ -i\alpha k_1^\pm & -i\beta k_1^\pm & \pm k_2^\pm & \pm k_3^\pm \\ -i\alpha r_1^\pm & -i\beta r_1^\pm & \pm r_2^\pm & \pm r_3^\pm \end{vmatrix} \tag{1.11}$$

$$m_i^\pm = M_i^- \pm M_i^+, \quad n^\pm = N^- \pm N^+, \quad k_i^\pm = K_i^- \pm K_i^+, \quad r_i^\pm = R_i^- \pm R_i^+$$

2. Построение матрицы-символа Грина для многослойной среды. Пусть среда представляет собой пакет из N , жестко соединенных между собой слоев, толщины $H = 2(h_1 + \dots + h_N)$ с жестко заземленной нижней гранью и занимает область $-H \leq z \leq 0$, $-\infty < x, y < \infty$. Воспользуемся полученным выше решением (1.10), (1.11) для слоя. Введем локальную систему координат для каждого слоя

$$z_k = z + 2(h_1 + \dots + h_{k-1}) + h_k, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

Произведем формальное разделение слоев. Тогда смещение точек k -слоя U, V, W и электрический потенциал Ψ будут определяться в размерных параметрах выражением

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_k(z_k) &= [\mathbf{B}_+(z_k)\mathbf{T}_{k-1} + \mathbf{B}_-(z_k)\mathbf{T}_k] a / c_{44}^k, \quad k = 1, 2, \dots, N \\ \mathbf{W}_k &= \{U, V, W, \Psi / l\}, \quad \mathbf{T}_k = \{T_1, T_2, T_3, Dl\} \end{aligned}$$

где \mathbf{T}_k – вектор, компоненты которого – усилия и электрическая индукция, характеризующие взаимодействие между слоями, \mathbf{T}_0 – вектор, заданный на поверхности среды.

Отметим, что при вычислении элементов матриц $\mathbf{B}_\pm(z_k)$ в (1.10), (1.11) следует использовать упругие, пьезо- и диэлектрические модули соответствующего слоя.

Выпишем условия стыковки слоев

$$\mathbf{W}_k(-h_k) = \mathbf{W}_{k+1}(h_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (2.1)$$

и условие на нижней грани пакета слоев

$$\mathbf{W}_N(-h_N) = 0 \quad (2.2)$$

Из (2.1) имеем рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_+(-h_k)\mathbf{T}_{k-1} + [\mathbf{B}_-(-h_k) - g_k\mathbf{B}_+(h_{k+1})]\mathbf{T}_k &= \\ = g_k\mathbf{B}_-(h_{k+1})\mathbf{T}_{k+1}, \quad g_k = c_{44}^k / c_{44}^{k+1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из (2.2) определяем

$$\mathbf{T}_N = -\mathbf{B}_-^{-1}(-h_N)\mathbf{B}_+(-h_N)\mathbf{T}_{N-1} \quad (2.4)$$

Используя (2.3), (2.4) выражаем \mathbf{T}_k через поверхностную нагрузку \mathbf{T}_0 :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_k &= (-1)^k \prod_{i=k}^1 \mathbf{F}_i^{-1} \mathbf{B}_+(-h_i) \mathbf{T}_0, \quad k = 1, 2, \dots, N \\ \mathbf{F}_N &= \mathbf{B}_-(-h_N), \quad \mathbf{F}_k = \mathbf{B}_-(-h_k) - g_k\mathbf{B}_+(h_{k+1}) + \\ &+ g_k\mathbf{B}_-(h_{k+1})\mathbf{F}_{k+1}^{-1}\mathbf{B}_+(-h_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \end{aligned}$$

В результате перемещения точек многослойной среды и электрический потенциал будут определяться в безразмерном виде выражением

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{K}(\alpha, \beta, z, \omega) \mathbf{T}_0 \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\alpha, \beta, z, \omega) &= (-1)^{k-1} (\mathbf{B}_+(z_k) - \mathbf{B}_-(z_k) \mathbf{F}_k^{-1} \mathbf{B}_+(-h_k)) \times \\ &\times \prod_{i=k-1}^1 \mathbf{F}_i^{-1} \mathbf{B}_+(-h_i) / g_k^0, \quad g_k^0 = c_{44}^k / c_{44}^1, \quad k = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (2.6)$$

Установлено, что при $\lambda \rightarrow \infty$, асимптотическое поведение матрицы \mathbf{K} на поверхности среды при $z = 0$ совпадает с аналогичным поведением \mathbf{K} для слоя. Имеем $\mathbf{K}(\alpha, \beta, 0, \omega) \sim \mathbf{B}_+(h_1)$ и:

$$m_1^+ \sim |\lambda|^{-3} M_1^0, \quad m_{2,3}^+ \sim \lambda^{-2} M_{2,3}^0, \quad r_1^+ \sim \lambda^{-2} R_1^0, \quad r_{2,3}^+ \sim |\lambda|^{-1} R_{2,3}^0$$

$$k_1^+ \sim \lambda^{-2} K_1^0, \quad k_{2,3}^+ \sim |\lambda|^{-1} K_{2,3}^0, \quad n^+ \sim |\lambda|^{-3} \alpha_1^{-1/2}$$

$$K_i^0 = \frac{1}{\Delta^0} \sum_{j=1}^3 \kappa_{ij}, \quad R_i^0 = \frac{1}{\Delta^0} \sum_{j=1}^3 b_j \kappa_{ij}, \quad M_i^0 = \frac{1}{\Delta^0} \sum_{j=1}^3 a_j \kappa_{ij}$$

$$b_j = \frac{\chi_1 \eta_j^2 - \chi_3}{\chi_4 - \chi_2 \eta_j^2}, \quad a_j = \frac{\eta_j (\alpha_3 + e_0 b_j)}{\eta_j^2 - \alpha_0}, \quad \Delta^0 = \det L^0$$

κ_{ij} – алгебраические дополнения элементов матрицы $L^0 = \|\zeta_{ij}\|$ ($i, j = 1, 2, 3$), причем

$$\zeta_{1j} = \eta_j a_j - 1 - e_1 b_j, \quad \zeta_{2j} = \eta_j (\delta_0 + e_3 b_j) + \gamma_0 a_j$$

$$\zeta_{3j} = e_3 - \varepsilon_3 b_j + e_2 a_j$$

η_i – корни кубического уравнения

$$\mu_1 k^3 + c_1 k^2 + c_2 k + \alpha_0 \chi_7 = 0$$

Решение для многослойной среды, жестко сцепленной с упругим полупространством, получим, устремив толщину нижнего слоя к бесконечности. Заменяя систему координат $z^* = z_N - h_N$ в нижнем слое и произведя предельный переход, получим

$$F_N = 0, \quad F_{N-1} = B_-(-h_{N-1}) - g_{N-1} B_+^\infty(0)$$

$$F_k = B_-(-h_k) - g_k B_+(h_{k+1}) + g_k B_- (h_{k+1}) F_{k+1}^{-1} B_+(-h_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, N-2$$

$$z = z_k - 2 \sum_{i=1}^k h_i + h_k, \quad k = 1, 2, \dots, N-1; \quad z = z^* - 2 \sum_{i=1}^{N-1} h_i, \quad k = N$$

Матрица $B_-^\infty(z^*) \equiv 0$, $B_+^\infty(z^*) = 2A_\infty^+(z^*)C^+$ имеет элементы

$$k_i^+ = \frac{1}{\Delta^\infty} \sum_{j=1}^k m_{ij} \exp(\sigma_j^N z), \quad r_i^+ = \frac{1}{\Delta^\infty} \sum_{j=1}^3 s_j m_{ij} \exp(\sigma_j^N z)$$

$$m_i^+ = \frac{1}{\lambda^2 \Delta^\infty} \sum_{j=1}^k p_j m_{ij} \exp(\sigma_j^N z), \quad n^+ = \frac{\exp(\sigma_4^N z)}{\sigma_4^N \lambda^2}, \quad \Delta^\infty = \det L^\infty$$

m_{ij} – алгебраические дополнения элементов матрицы $L^\infty = \|l_{ij}\|$ ($i, j = 1, 2, 3$), l_{ij} , p_j , s_j определяются формулами (1.9), (1.7), σ_j^N – корни характеристического уравнения (1.5) для полупространства.

В частности, для полупространства имеем простую формулу

$$W(z) = B_+^\infty(z) T_0$$

Для слоя, жестко сцепленного с полупространством, получаем перемещение в слое

$$W(z) = (B_+(z+h_1) - B_-(z+h_1) F_1^{-1} B_+(-h_1)) t_0$$

в полупространстве

$$W(z) = -B_+^\infty(z+2h_1) F_1^{-1} B_+(-h_1) t_0 / g_2^0, \quad F_1 = B_-(-h_1) - g_1 B_+^\infty(0)$$

Применив обратное преобразование Фурье к (2.5), получим интегральное представление решения для многослойной среды

$$w(x, y, z) = \frac{e^{-i\alpha x}}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(z) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta \quad (2.7)$$

3. Смешанная динамическая задача. Пусть на поверхности среды $z = 0$ заданы

смешанные граничные условия. В области S заданы смещения и электрический потенциал:

$$w(x, y, 0, \omega) = u^0(x, y, \omega), \quad (x, y) \in S$$

Вне области S напряжения и нормальная составляющая электрической индукции отсутствуют

$$t^0 = 0, \quad (x, y) \notin S$$

Тогда из представления (2.7) получим систему интегральных уравнений четвертого порядка

$$\iint_S k(x - \xi, y - \zeta, \omega) t^0(\xi, \zeta, \omega) d\xi d\zeta = u^0(x, y, \omega) \quad (3.1)$$

$$k(x, y, \omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} K(\alpha, \beta, 0, \omega) e^{-i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta$$

относительно неизвестного вектора $t^0\{t_1, t_2, t_3, d\}$. Контуры интегрирования σ_1, σ_2 выбираются в соответствии с принципом предельного поглощения [3].

Задачи такого рода о возбуждении колебаний электродом в электроупругом слое с жестко заземленной нижней гранью рассматривались ранее [4, 5]. При этом одиночный электрод, как простейший преобразователь электроупругих волн, моделировался полосовым штампом. Получены формулы, позволяющие определять контактные давления и электрическую индукцию во всей области контакта электрода со средой, включая границы, а также упругие и электрические характеристики вне этой области. Полученные соотношения остаются справедливыми и для электроупругой многослойной среды, изменяется лишь вид подынтегральной матрицы – функции ядра системы интегральных уравнений, участвующей в построенных решениях. В этом случае матрица – функция K определяется выражением (2.6).

4. Построение матрицы-функции Грина для трансверсально-изотропной слоистой среды. Метод построения матрицы K , рассмотренный в разд. 2, распространяется на многослойные анизотропные среды. В качестве примера рассмотрим трансверсально-изотропную среду, уравнения которой получим, положив в (1.1) и (1.2) пьезо- и диэлектрические постоянные равными нулю. В этом случае на поверхности среды задается трехмерный вектор нагрузки $t^0\{t_1, t_2, t_3\}$ и смещения точек слоистой среды $w\{u, v, w\}$ определяются формулами (2.5)–(2.7). Матрица K имеет размер 3×3 и получается вычеркиванием из (1.11) четвертой строки и столбца. После упрощений определяющие функции имеют вид

$$M_1^+ = \frac{l_2 c_1(z) - l_1 c_2(z)}{2\lambda^2 \Delta^+}, \quad M_2^+ = \frac{b_1 t_1 c_2(z) - b_2 t_2 c_1(z)}{2\lambda^2 \Delta^+}$$

$$N^+ = \frac{\operatorname{ch} \sigma_4 z}{2\lambda^2 \sigma_4 \operatorname{sh} \sigma_4 h}, \quad \sigma_4^2 = \alpha_1 \lambda^2 - \Omega^2 \quad (4.1)$$

$$K_1^+ = \frac{l_2 a_1 s_1(z) - l_1 a_2 s_2(z)}{2\Delta^+}, \quad K_2^+ = \frac{b_1 a_2 t_1 s_2(z) - b_2 a_1 t_2 s_1(z)}{2\Delta^+}$$

$$\Delta^+ = b_1 l_2 t_1 - b_2 l_1 t_2, \quad a_i = \sigma_i \alpha_3 (\lambda^2 - \Omega^2 - \delta_0 \sigma_i^2)^{-1}$$

$$l_i = \gamma_0 + \delta_0 a_i \sigma_i, \quad b_i = \sigma_i - \lambda^2 a_i, \quad i = 1, 2$$

где σ_i – корни биквадратного уравнения

$$\delta_0 k^4 - [\lambda^2 (1 + \delta_0 \alpha_0 - \alpha_3^2) - \Omega^2 (\delta_0 + 1)] k^2 + (\lambda^2 - \Omega^2) (\alpha_0 \lambda^2 - \Omega^2) = 0, \quad k_{1,2} = \pm \sigma_{1,2} \quad (4.2)$$

В частном случае для изотропной среды

$$\alpha_0 = \delta_0 = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} = 2 \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu}, \quad \beta_0 = \gamma_0 = \frac{\lambda}{\mu} = 2 \frac{\nu}{1 - 2\nu}$$

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{\lambda + \mu}{\mu} = \frac{1}{1 - 2\nu}$$

λ, μ – постоянные Ламе, ν – коэффициент Пуассона.

5. Нестационарная контактная задача. Рассмотрим динамическую контактную задачу о взаимодействии штампа массы m со слоистой трансверсально-изотропной средой, занимающей область $-\infty \leq x, y \leq \infty, -H \leq z \leq 0$. Будем полагать, что штамп имеет плоское основание S и центр масс штампа совпадает с началом координат. На штамп действует нагрузка, изменяющаяся во времени t по заданному закону. Приведенная к центру масс, нагрузка разбивается на силовую составляющую $P(t) = \{P_1, P_2, P_3\}$ и момент $M(t) = \{M_1, M_2, M_3\}$. В начальный момент времени система находится в покое. Смещения точек штампа $u^0(t) = \{u_1^0, u_2^0, u_3^0\}$ определяются в виде $u^0 = u + \varphi \times r$, или

$$u_1^0 = u_1 - \varphi_3 y, \quad u_2^0 = u_2 + \varphi_3 x, \quad u_3^0 = u_3 + \varphi_1 y - \varphi_2 x$$

где u_1, u_2, u_3 – горизонтальные и вертикальная составляющие смещения центра масс штампа, φ – вектор углов поворота относительно центра масс штампа.

Уравнения движения штампа в преобразованиях Лапласа приводятся к виду

$$mp^2 u_i = -P_i + \sum_{k=1}^3 Q_i^k u_k + \sum_{k=4}^6 Q_i^k \varphi_{k-3} \quad (5.1)$$

$$J_i p^2 \varphi_i = -M_i + \sum_{k=1}^3 R_i^k u_k + \sum_{k=4}^6 R_i^k \varphi_{k-3}, \quad i = 1, 2, 3$$

Система (5.1) содержит шесть неизвестных функций u_i, φ_i ($i = 1, 2, 3$), которые и определяют движение штампа массы m ; J_i – моменты инерции около осей x, y, z . Соответствующие усилия и моменты, возникающие в области контакта тела и среды, будут определяться формулами

$$R_1^k = \iint_S q_3^k y dS, \quad R_2^k = -\iint_S q_3^k x dS$$

$$R_3^k = \iint_S (q_2^k x - q_1^k y) dS, \quad Q_i^k = \iint_S q_i^k dS, \quad k = 1, 2, 3$$

Вектор – функции $q^k \{q_1^k, q_2^k, q_3^k\}$ ($k = 1, 2, \dots, 6$) – решения системы интегральных уравнений (3.1) для правой части, когда отлична от нуля лишь одна из компонент $u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, при этом имеющая единичное значение. В нестационарной задаче следует заменить частоту колебаний ω на ip .

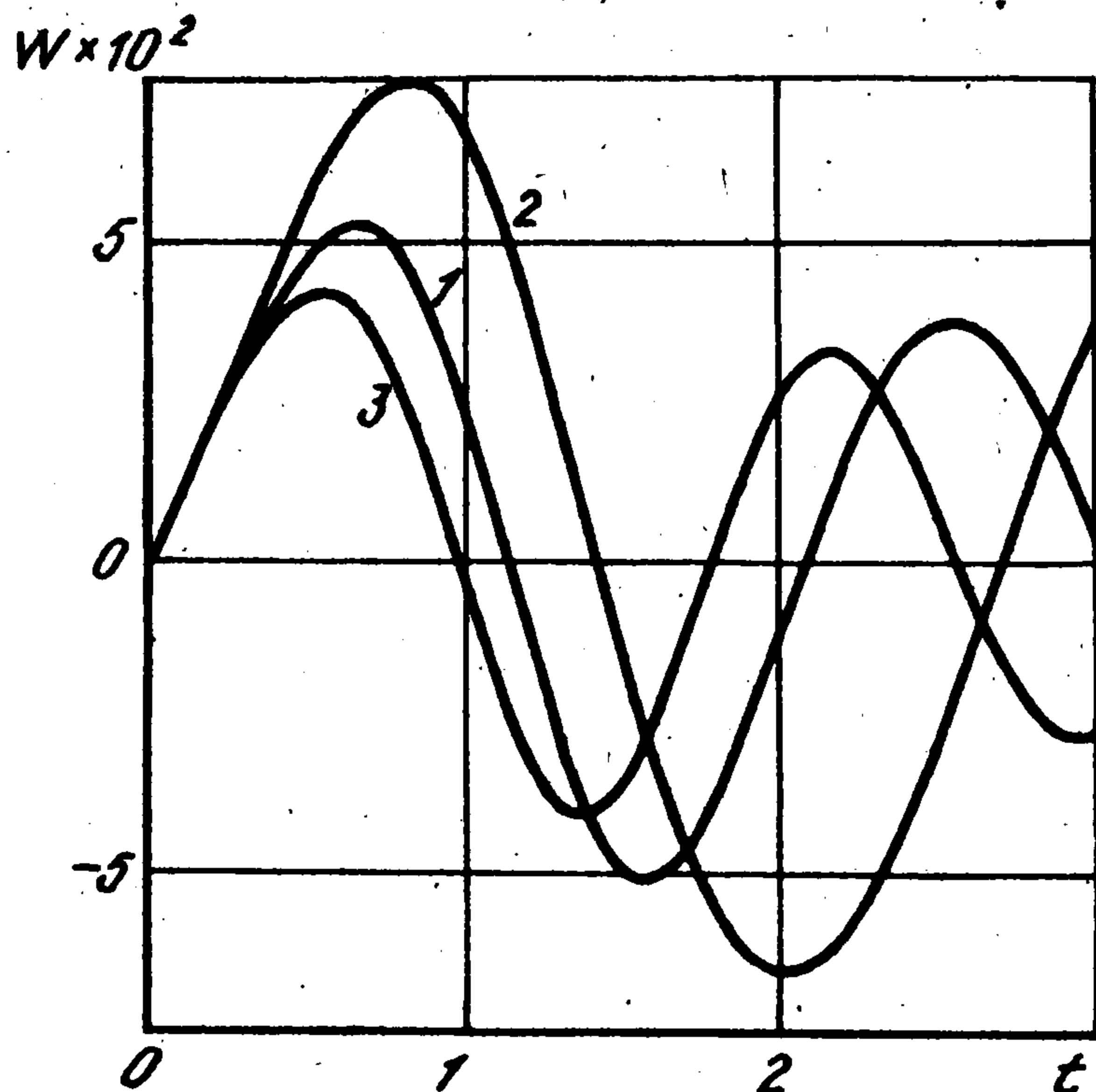
Для полосового штампа ширины $2a$ формулы (5.1) упрощаются и смещения штампа в преобразованиях Лапласа будут определяться выражениями

$$u_1 = [P_1(Jp^2 + R^3) - MQ_1^3] \Delta_0^{-1}, \quad u_2 = P_2(mp^2 + Q_2^2)^{-1}$$

$$\varphi = [M(mp^2 + Q_1^1) - P_1 Q_1^3] \Delta_0^{-1} \quad (5.2)$$

$$\Delta_0 = (mp^2 + Q_1^1)(Jp^2 + R^3) - (Q_1^3)^2$$

$$R^3 = \int_{-a}^a q_2^3(x) x dx, \quad Q_i^k = \int_{-a}^a q_i^k(x) dx, \quad k = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2$$

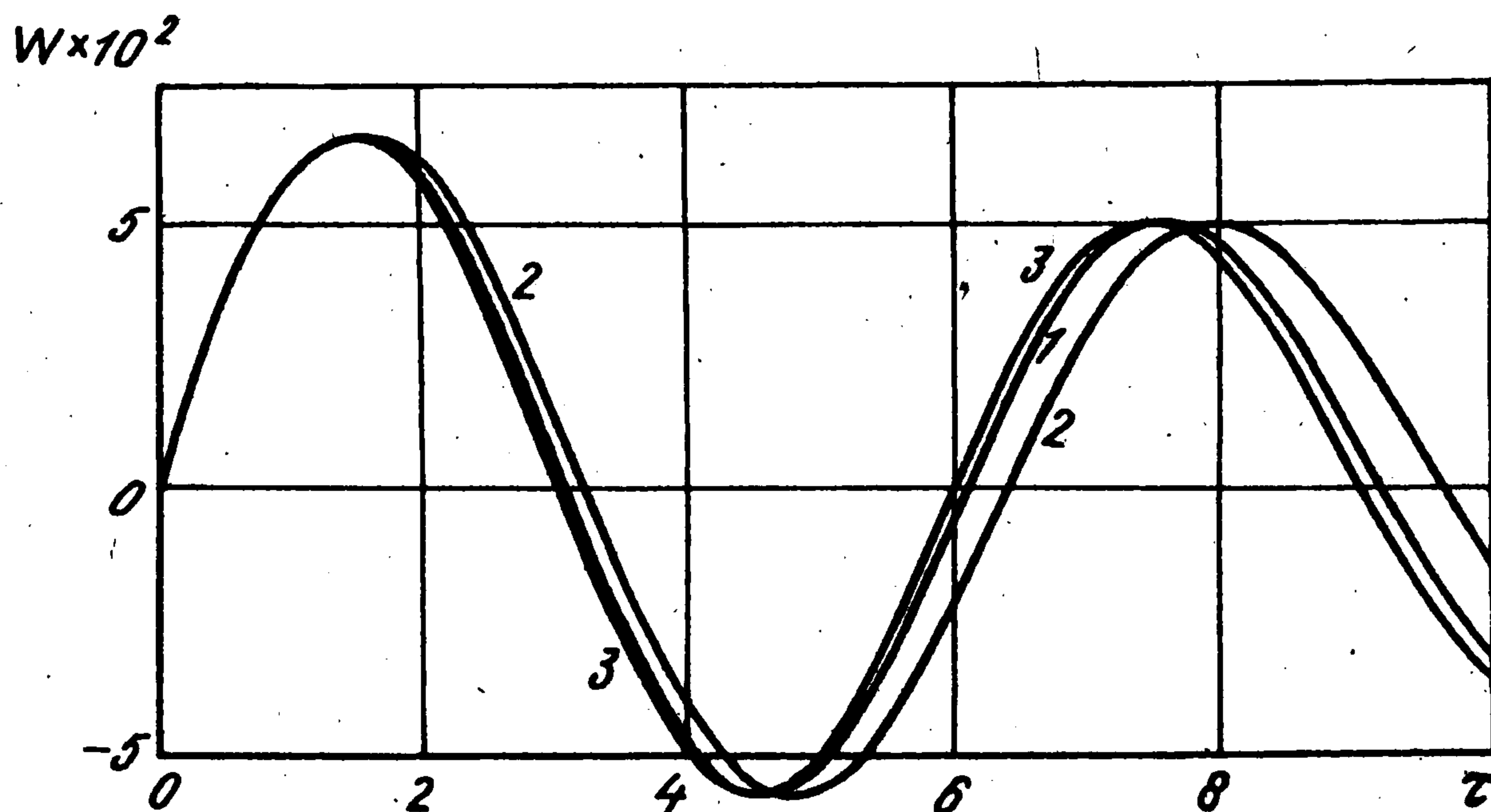


Фиг. 1

нагрузки на полосовой штамп, контактирующий с изотропными многослойными основаниями. Влияние анизотропных свойств слоев на смещения штампа и характер нестационарного процесса в среде можно изучить, воспользовавшись решениями, построенными в [1, 6]. Определяющие функции M_i^\pm , N^\pm , K_i^\pm , Δ^\pm для матрицы K следует взять в виде (4.1) и учесть различное поведение матриц K на бесконечности для изотропной и анизотропной сред.

На фиг. 1 представлены вертикальные смещения штампа, контактирующего без трения с трансверсально – изотропным слоем толщины $H = 0,5$, жестко сцепленным с недеформируемым основанием. На штамп действует вертикальная нагрузка $P(t) = H(t - 0,3)$. Кривая 1 иллюстрирует изотропный слой с параметрами $\alpha_0 = \delta_0 = 3,5$, $\gamma_0 = 1,5$, что соответствует $\nu = 0,3$. Кривые 2 и 3 соответствуют трансверсально – изотропной среде при $\delta_0 = 2,0$ и $5,0$ ($\alpha_0 = 3,5$, $\gamma_0 = 1,5$). Установлено, что изменение параметров α_0 , γ_0 не оказывает влияния на амплитуду и период колебаний штампа и обусловлено видом функционалов (5.3), определяемых при $\lambda = 0$ с учетом выражений (4.1) и (4.2), участвующих в решении.

Фиг. 2 иллюстрирует смещения штампа, взаимодействующего с двухслойной средой.



Фиг. 2

где p – параметр преобразования Лапласа, $q^k \{q_1^k, q_2^k\}$ – решения соответствующих динамических контактных задач

$$Kq^1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad Kq^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad Kq^3 = \begin{Bmatrix} 0 \\ x \end{Bmatrix}$$

$R^3(p)$, $Q_i^k(p)$ строятся методом фиктивного поглощения в аналитическом виде, что упрощает обращение преобразования Лапласа формул (5.2) [1, 6]. При этом численное обращение Лапласа производится с использованием метода Филона, который в рассматриваемых задачах позволяет получить высокую точность вычислений.

Были детально исследованы [1; 6] задачи о действии нестационарного

Верхний слой – изотропная среда толщины $2h_1 = 0,4$, нижний – трансверсально-изотропная среда толщины $2h_2 = 0,4$. При этом анизотропию в нижнем слое введем путем изменения параметра $\delta_0 = \epsilon\alpha_0$. На штамп действует вертикальная нагрузка $P(t) = H(t - 0,1)$. Кривая 1 иллюстрирует задачу для изотропного слоя толщины $H = 2h_1 + 2h_2 = 0,8$ ($\alpha_0 = \delta_0 = 3,5$, $\gamma_0 = 1,5$). Кривые 2 и 3 соответствуют $\epsilon = 0,5$ и $1,5$ в нижнем слое. Кривые совпадают до момента прихода волны, отраженной от линии раздела слоев. С увеличением ϵ уменьшается амплитуда и период колебаний штампа после снятия нагрузки.

Расчеты проводились для вязкоупругих сред. В этом случае $\omega = ipe^{-i\zeta}$, ζ – параметр вязкости среды, $0 \leq 2\zeta \leq 1$ (упругие постоянные – комплексные величины вида $c_{ij}e^{2i\zeta}$). Численное обращение преобразования Лапласа ведется по действительной оси. Для приведенных расчетов $m = 1$ и $\zeta = 0,2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94—01—00575) и Международного Научного фонда (RW 4000).

ЛИТЕРАТУРА

1. Пряхина О.Д., Фрейгейт М.Р. О методе расчета динамики массивного штампа на многослойном основании // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 4. С. 114–122.
2. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 471 с.
3. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
4. Пряхина О.Д., Тукодова О.М. Антиплоская динамическая контактная задача для электроупругого слоя // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 5. С. 844–849.
5. Пряхина О.Д., Тукодова О.М. Об одной плоской смешанной динамической задаче электроупругости // Изв. АН СССР. МГТ. 1990. № 1. С. 80–85.
6. Дорохов И.В., Пряхина О.Д., Фрейгейт М.Р. О действии нестационарной нагрузки на систему, состоящую из массивного штампа и слоистого основания // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 306–312.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
9.II.1994