УДК 539.3

© 1995 г. Д.Д. Захаров

ПОСТАНОВКА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СТАТИКИ ТОНКИХ УПРУГИХ АСИММЕТРИЧНО-СЛОИСТЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН И РЕШЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Определяется внутреннее напряженно-деформируемое состояние (НДС) пластины при связанном изгибе и растяжении–сжатии–сдвиге. Доказывается эллиптичность двумерных уравнений равновесия для материалов слоев с анизотропией общего вида, выводятся естественные краевые условия. Перемещения выражаются через функции комплексного переменного, позволяющие свести основные краевые задачи к определению таких функций по значениям вещественной части их линейных комбинаций на боковой поверхности пластины. Выводятся условия однозначности функций, связанные с самоуравновешенностью краевой нагрузки. Указываются точные решения краевых задач для конечного эллипса, в том числе под действием полиномиальных лицевых нагрузок. Приводятся решения задач для пластины с эллиптическим вырезом, включая случай несамоуравновешенных краевых нагрузок, а также сингулярной задачи о пластине с нагруженным конечным сквозным разрезом или жесткой вставкой. Для односвязных областей, конформно отображаемых на круг, точные решения строятся по формуле Шварца. Предлагаемый метод является новой разновидностью метода Колосова–Мусхелишвили–Лехницкого для неклассических слоистых пластин и обладает теми же достоинствами и недостатками. Основное отличие от известной плоской задачи или задачи изгиба состоит в увеличении размерности.

1. Рассмотрим пластину, состоящую из N идеально сцепленных слоев, материалы которых обладают прямолинейной анизотропией общего вида. Пусть j-й слой занимает область $\Omega[z_j, z_{j+1}]$, $\mathbf{x} \in \Omega \subseteq R^2$ ($\mathbf{x} = \mathbf{i}_\alpha x_\alpha$, $x_3 \equiv z$ – декартовы координаты). Матрицу жесткостей и толщину слоя обозначим $\mathbf{G}_j$, $h_j = z_{j+1} - z_j$ соответственно. Будем считать, что отношение полутолщины пластины h к характерному продольному размеру рисунка деформации L задает малый параметр ε, а отношения геометрических и упругих констант слоев несоизмеримы с ε. Нормальные и касательные нагрузки на лицевых поверхностях пластины определим равенствами

$$\sigma_{zz} = \sigma^{\mp}(\mathbf{x}), \quad \sigma_{\alpha z} = \varepsilon^{-1}\tau^{\mp}_{\alpha}(\mathbf{x}); \quad z_{1,N+1} = z^{\mp} \tag{1.1}$$

Были получены [1–3] асимптотически точные ($\varepsilon \to 0$) двумерные уравнения, описывающие НДС пластины с несимметричной укладкой слоев по толщине. Перемещения и напряжения раскладывались в асимптотические ряды по степеням ε, главные члены для продольных перемещений $\mathbf{U}$ и прогиба W оказывались одинаковы во всех слоях. Разрешающие уравнения статики имеют вид:

$$\begin{aligned}&\partial_\beta \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_1)\mathbf{u} - \partial_\beta \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_2)\operatorname{grad} W + T_\alpha = 0\\ &-\partial^2_{\alpha\beta}\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_2)\mathbf{u} + \partial^2_{\alpha\beta}\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_3)\operatorname{grad} W = T\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$T_\alpha=\varepsilon^{-1}(\tau_\alpha^+-\tau_\alpha^-),\quad T=\sigma^+-\sigma^-+\varepsilon^{-1}\operatorname{div}(z^+\tau^+-z^-\tau^-)$$

$$\mathbf{U}=\mathbf{u}(\mathbf{x})-z\operatorname{grad}W,\quad W=w(\mathbf{x})$$

$$e_{\alpha\beta}=\varepsilon_{\alpha\beta}+z\theta_{\alpha\beta},\quad \varepsilon_{\alpha\beta}=\tfrac{1}{2}(\partial_\beta u_\alpha+\partial_\alpha u_\beta),\quad \theta_{\alpha\beta}=-\partial^2_{\alpha\beta}w$$

$$\sigma^j_{\alpha\beta}=\chi_{\alpha\beta}(\mathbf{\Gamma}_j)(\mathbf{u}-z\operatorname{grad}w),\quad (Q_{\alpha\beta},\ M_{\alpha\beta})=\sum_j\int_{z_{j+1}}^{z_j}(1,z)\sigma^j_{\alpha\beta}dz \tag{1.3}$$

$$Q_{\alpha z}=\sum_j\int_{z_j}^{z_{j+1}}\sigma^j_{\alpha z}dz=\partial_\beta M_{\alpha\beta}+\varepsilon^{-1}(z^+\tau^+_\alpha-z^-\tau^-_\alpha);\quad \alpha,\beta=1,2$$

$$\begin{Vmatrix}Q_{\alpha\beta}\\ M_{\alpha\beta}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2\\ \mathbf{D}_2 & \mathbf{D}_3\end{Vmatrix}\begin{Vmatrix}\nu_{\alpha\beta}\\ \kappa_{\alpha\beta}\end{Vmatrix},\quad \begin{aligned}&\nu_{\alpha\beta}=\varepsilon_{\alpha\beta}(1+\delta^\beta_{\alpha+1})\\ &\kappa_{\alpha\beta}=\theta_{\alpha\beta}(1+\delta^\beta_{\alpha+1})\\ &\alpha\beta=11,12,22\end{aligned} \tag{1.4}$$

$$\chi_{11}(\Gamma)=\mathbf{i}_1(\gamma_{11}\partial_1+\gamma_{16}\partial_2)+\mathbf{i}_2(\gamma_{16}\partial_1+\gamma_{12}\partial_2)\quad (1\leftrightarrow 2)$$

$$\chi_{12}(\Gamma)=\mathbf{i}_1(\gamma_{16}\partial_1+\gamma_{66}\partial_2)+\mathbf{i}_2(\gamma_{66}\partial_1+\gamma_{26}\partial_2)$$

$$\mathbf{D}_k=\frac{1}{k}\sum_j(z^k_{j+1}-z^k_j)\mathbf{\Gamma}_j,\quad \mathbf{D}=\begin{Vmatrix}\mathbf{D}_1 & \mathbf{D}_2\\ \mathbf{D}_2 & \mathbf{D}_3\end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{\Gamma}=\begin{Vmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{16} & \gamma_{12}\\ \gamma_{16} & \gamma_{66} & \gamma_{62}\\ \gamma_{12} & \gamma_{62} & \gamma_{22}\end{Vmatrix},\quad \gamma_{pq}=\pm\frac{G^p_q}{G_0},\quad G_0=G\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix} \tag{1.5}$$

где $\sigma^j_{\alpha\beta}$, $e_{\alpha\beta}$ – напряжения и деформации; $Q_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$ – продольные усилия и моменты в сечении пластины ($\delta^\beta_{\alpha+1}$ – символ Кронекера); $Q_{\alpha z}$ – перерезывающее усилие. Величины γ^j_{pq} задают осредненные жесткости в j-м слое; G_0 – главный минор в матрице жесткости $\mathbf{G}$; G^p_q – минор, полученный добавлением p-й строки и q-го столбца к минору G_0 в естественном порядке (знак минус выбирается при pq = 16,26). Громоздкие выражения для напряжений $\sigma^j_{\alpha z}$, σ^j_{zz} не приводим.

Асимптотическая погрешность формул (1.2)–(1.4) составляет $O(\varepsilon)$ для случая общей анизотропии и $O(\varepsilon^2)$ для слоев с локальными продольными плоскостями симметрии упругих свойств.

Отметим, что оценка точности не зависит от укладки и выполняется даже для однослойной пластины.

2. Основное отличие от классической теории пластин Кирхгофа–Лява состоит в том, что вместе с мембранными ($\mathbf{D}_1$), и изгибными ($\mathbf{D}_3$) жесткостями появляются мембранно-изгибные жесткости $\mathbf{D}_2\neq 0$. Процессы изгиба и растяжения–сжатия–сдвига оказываются связанными. Вопросы минимизации такой связи и оптимального расположения системы координат по толщине изучены в [1–2].

Докажем, что в основных свойствах сохраняется преемственность по отношению к классическому случаю. Часть из них очевидна из физических соображений, но заслуживает отдельной формулировки.

Теорема 1. Матрицы обобщенных жесткостей слоев $\mathbf{\Gamma}_j$ положительно определены.

Положительность угловых миноров матрицы $\mathbf{\Gamma}_j$ вытекает из следующих рассуждений:

1°. Все главные миноры исходной матрицы $\mathbf{G}$ положительны;

2°. Величины $\pm G^p_q$ совпадают со значениями окаймляющих миноров, полученных добавлением p-й строки и q-го столбца к минору G_0 снизу и справа;

3°. Для окаймляющих миноров справедлива теорема Сильвестра [4]: если $M = |a_{ij}|_1^m$, $n > m \geqslant 1$, $n \geqslant 2$ – угловой минор матрицы $A = |a_{ij}|_1^n$ и b_{kl} – окаймляющий минор с добавлением к M k-й строки и l-го столбца, то для определителя матрицы окаймляющих миноров $B = |b_{kl}|_{p+1}^m$ выполнено равенство $B = M^{n-p-1}A$.

Теорема 2. Плотность энергии в каждом слое и удельная упругая энергия П пластины в целом положительно определены

$$\pi_j = \tfrac{1}{2}\sigma^j_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta} \geqslant 0, \quad \Pi = \tfrac{1}{2}\int\limits_{\Omega} Q_{\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta}\theta_{\alpha\beta}d\Omega \tag{2.1}$$

Утверждение следует из теоремы 1, равенств $(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22})_j^m = \Gamma_j(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{22})^m$ и (1.4).

Как следствие, получается следующая теорема.

Теорема 3. Полная матрица жесткостей $\mathbf{D}$, матрицы изгибных $\mathbf{D}_3$ и мембранных $\mathbf{D}_1$ жесткостей положительно определены.

Теорема 4. В статике имеет место соотношение энергетического баланса

$$\Pi = \int\limits_{\Omega} T_\alpha u_\alpha + Twd\Omega + \int\limits_{\partial\Omega} Q_n u_n + Q_\tau u_\tau + M_n\theta_n + P_n wd\tau \tag{2.2}$$

$$P_n = Q_{nz} + \partial_\tau M_\tau, \quad \theta_n = -\partial_n w$$

где $\mathbf{n}, \boldsymbol{\tau}$ – векторы внешней нормали и касательной на контуре $\partial\Omega$.

При выводе, уравнения (1.2) умножаются на перемещения u_α, w и интегрируются по объему Ω $[z^-, z^+]$ с применением формул Стокса и Гаусса – Остроградского.

Теорема 5. Пусть контур $\partial\Omega$ разбит на сегменты $\partial\Omega = \bigcup\limits_k L_k$, на каждом из которых задано одно из условий вида

$$1)\ u_n^*,\ u_\tau^*,\ \theta_n^*,\ w^*;\quad 2)\ Q_n^*,\ Q_\tau^*,\ M_n^*,\ P_n^*;\ 3)\ \text{смешанные комбинации.} \tag{2.3}$$

Тогда НДС пластины задано единственным образом.

Действительно, разность любых двух решений будет иметь энергию $\Pi = 0$, и следовательно, $\varepsilon_{\alpha\beta} = \theta_{\alpha\beta} = 0$.

Асимптотический анализ краевых условий и взаимодействия пограничного слоя с внутренним НДС для слоистых пластин – весьма сложная задача. Однако на примере монопластинок [5–7] известно, что естественные краевые условия Кирхгофа выполняются с погрешностью $O(\varepsilon)$. В слоистых пластинах модификация краевых условий требуется, если возникает следующая ситуация ([8]):

1) сильная неравномерность распределения краевых нагрузок по толщине;

2) свойства слоев сильно различаются, вплоть до появления новых малых (больших) параметров, соизмеримых с $\varepsilon^{\pm 1}$.

В случае "плавных" распределений и сравнительно однородных свойств слоев можно ограничиться условиями (2.3).

3. Приведем решение краевой задачи для жестко защемленной пластины в форме конечного эллипса

$$\partial\Omega: f(\mathbf{x}) \equiv (x_1 / a_1)^2 + (x_2 / a_2)^2 - 1 = 0$$

$$u_n^* = u_\tau^* = w^* = 0, \quad \theta_n^* = 0$$

на лицевых поверхностях которого заданы нагрузки в виде однородных полиномов $T_\alpha^m(\mathbf{x})$, $T^{m-1}(\mathbf{x})$. Положим $u_\alpha = \upsilon_\alpha^m(\mathbf{x})f(\mathbf{x})$, $w = \upsilon^{m-1}(\mathbf{x})f^2(\mathbf{x})$, где υ_α^m, υ^{m-1} – также однородные полиномы от x_1, x_2 степени m, $m - 1$ соответственно. Перемещения тождественно удовлетворяют краевым условиям и содержат $2(m + 1) + m = 3m + 2$ неопределенных коэффициента при степенях x_α в полиномах. Подстановка в уравнения (1.2) и группировка слагаемых приводит к линейной системе уравнений порядка $3m+2$ относительно коэффициентов. Невырожденность системы следует из теоремы 5. В частности, для $T_\alpha = \text{const}$, $T = 0$ получаем $w = 0$, $u_1 = \dfrac{a_{11}T_1 - a_{12}T_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} f(\mathbf{x})$ $(1 \leftrightarrow 2)$

$\mathbf{i}_\beta a_{\alpha\beta} \equiv \partial_\beta \chi_{\alpha\beta}(D_1)(f, f)^m$.

Полученный результат задает также набор частных решений при той же лицевой нагрузке и других краевых условиях на контуре эллипса.

4. Предложим теперь общий метод решения краевых задач (2.4), полагая, что лицевые нагрузки отсутствуют.

Теорема 6. Символы дифференциального оператора системы (1.2), а также его "изгибной" и "мембранной" компоненты являются эллиптическими.

Изложим основную идею доказательства. Применим преобразование Фурье к уравнениям (1.2)

$$(u_\alpha, w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint (V_\alpha, V) e^{i\mathbf{sx}} dx_1 dx_2, \quad \mathbf{s} = \mathbf{i}_\alpha s^\alpha$$

$$\mathbf{L}(\partial_1, \partial_2)(u_1, u_2, w) = 0 \Rightarrow \mathbf{L}(is^1, is^2)(V_1, V_2, V) = 0$$

С точностью до знаков и замены V_α на $\pm iV_\alpha$ символическое уравнение будет равносильно равенству $\mathbf{L}(s^1, s^2)(V_1, V_2, V)e^{\mathbf{sx}} = 0$. НДС пластины, определенное перемещениями $(u_\alpha, w) = (c_\alpha, c)e^{\mathbf{sx}}$, имеет энергию

$$\Pi = (c_1, c_2, c) \int_\Omega \mathbf{L}(s^1, s^2) e^{2\mathbf{sx}} d\Omega (c_1, c_2, c)^m \geqslant 0$$

причем равенство достигается только для нулевых перемещений. Следовательно, $\mathbf{L}(s^1, s^2) \neq 0$, $\mathbf{L}(is^1, is^2) \neq 0$ при $s^\alpha \in R$. Как частный случай получается эллиптичность изгибных и мембранных компонент оператора.

Тем самым характеристические числа оператора в целом, а также его "классических" компонент должны быть комплексными числами.

Общее решение будем искать в виде $u_\alpha = u_\alpha(\mathbf{sx})$, $w = w(\mathbf{sx})$. Для определенности положим $s^1 = 1$, $s^2 = \lambda$, сохраняя оба вида обозначений для удобства выкладок. Из уравнений (1.2) получаем

$$\begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & -p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & -p_{23} \\ -p_{13} & -p_{23} & p_{33} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} u_1^{\mathrm{III}} \\ u_2^{\mathrm{III}} \\ w^{\mathrm{IV}} \end{Vmatrix} = 0, \quad \begin{aligned} p_1 &= p_{13}p_{22} - p_{12}p_{23} \\ p_0 &= p_{11}p_{22} - p_{12}^2 \quad (1 \leftrightarrow 2) \end{aligned}$$

$$\mathbf{i}_\beta p_{\alpha\beta} = e^{-\mathbf{sx}} \partial_\beta \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_1) e^{\mathbf{sx}} \tag{4.1}$$

$$p_{\alpha 3} = e^{-\mathbf{sx}} \partial_\beta \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_2) \operatorname{grad} e^{\mathbf{sx}}$$

$$p_{33} = e^{-\mathbf{sx}} \partial^2_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta}(\mathbf{D}_3) \operatorname{grad} e^{\mathbf{sx}}$$

$$p = p_0 p_{33} - p_{22} p_{13}^2 - p_{11} p_{23}^2 + 2 p_{12} p_{23} p_{31}$$

Характеристические полиномы четвертого порядка p_{33}, p_0 отвечают изгибному и мембранному операторам соответственно, полином восьмого порядка p соответствует полному оператору. Корни уравнения $p = 0$ образуют четыре сопряженные пары; ниже мы будем полагать, что $\mathbf{s}_k \neq \mathbf{s}_m$. Структура перемещений, усилий и моментов примет вид (суммирование проводится только по индексам $k = 1, 2, 3, 4$)

$$u_\alpha = 2\,\mathrm{Re}\left\{ \Sigma \frac{p_\alpha}{p_0}(\mathbf{s}_k) \psi_k'(\zeta_k) \right\} + \upsilon_\alpha^0(\mathbf{x}), \quad w = 2\,\mathrm{Re}\{\Sigma \psi_k(\zeta_k)\} \tag{4.2}$$

$$p(\mathbf{s}_k)=0,\quad \zeta_k=\mathbf{s}_k\mathbf{x},\quad \operatorname{Im}\lambda_k>0$$

$$(Q_{\alpha\beta},M_{\alpha\beta})=2\operatorname{Re}\left\{\Sigma(q_{\alpha\beta},m_{\alpha\beta})(\mathbf{s}_k)\psi_k''(\zeta_k)\right\}+(Q^0_{\alpha\beta},M^0_{\alpha\beta})$$

$$Q_{\alpha3}=2\operatorname{Re}\left\{\Sigma q_{\alpha3}(\mathbf{s}_k)\psi_k'''(\zeta_k)\right\};\quad Q^0_{\alpha\beta},M^0_{\alpha\beta}(\upsilon_1,\upsilon_2)=\text{const} \tag{4.3}$$

$$\frac{s^1}{s^2}m_{11}+2m_{12}+\frac{s^2}{s^1}m_{22}=0,\quad \frac{q_{11}}{(s^2)^2}=-\frac{q_{12}}{s^1s^2}=\frac{q_{22}}{(s^1)^2}$$

$$\frac{q_{13}}{s^2}=-\frac{q_{23}}{s^1},\quad q_\alpha=s^\beta m_{\alpha\beta} \tag{4.4}$$

где $q_{\alpha\beta}(\mathbf{s}_k)$, $m_{\alpha\beta}(\mathbf{s}_k)$ – дробно-рациональные функции от характеристических чисел оператора (1.2); $\upsilon^0_\alpha(\mathbf{x})$ – линейные функции переменных x_1, x_2.

Покажем как ставятся основные краевые задачи (2.4).

Первая краевая задача. На контуре $\partial\Omega$ заданы перемещения. Тогда функции $\psi_k'(\zeta_k)$ удовлетворяют уравнениям

$$2\operatorname{Re}\left\{\Sigma\frac{p_\alpha}{p_0}(\mathbf{s}_k)\psi_k'(\zeta_k)\right\}=u^*_\alpha-\upsilon^0_\alpha(\mathbf{x})$$

$$2\operatorname{Re}\left\{\Sigma s^\alpha_k\psi_k'(\zeta_k)\right\}=-\theta^*_\alpha \tag{4.6}$$

$$u_\alpha=n_\alpha u_n-n_\beta u_\tau\quad (u_\alpha\leftrightarrow\theta_\alpha),\quad n_\alpha=\pm dx_\beta/d\tau\quad(\alpha\beta=12,21)$$

Вторая краевая задача. Усилия и моменты (2.4) на контуре $\partial\Omega$ удобно проинтегрировать по дуге $(0^\smile, t)\subset\partial\Omega$ (начальная точка выбирается произвольно). С учетом равенств (4.4) получаем, полностью аналогично работам [9, 10] для анизотропных монопластин, следующие соотношения (не суммировать по повторяющимся индексам $\alpha\alpha$):

$$2\operatorname{Re}\left\{\Sigma\frac{q_{\alpha\alpha}}{s^\beta_k}(\mathbf{s}_k)\psi_k'(\zeta_k)\right\}=\pm\int_0^t Q^*_\alpha d\tau-Q^0_{\alpha\alpha}x_\beta+Q^0_{12}x_\alpha+c_\alpha$$

$$2\operatorname{Re}\left\{\Sigma\frac{m_{\alpha\alpha}}{s^\beta_k}(\mathbf{s}_k)\psi_k'(\zeta_k)\right\}=\pm\int_0^t M^*_\alpha d\tau-M^0_{\alpha\alpha}x_\beta+M^0_{12}x_\alpha\pm cx_\alpha+c_{\alpha+2} \tag{4.7}$$

$$Q^*_\alpha=n_\alpha Q^*_n-n_\beta Q^*_\tau,\quad M^*_\alpha=n_\alpha M^*_n-n_\beta F^*_n$$

$$F^*_n=\int_0^t p^*_n d\tau;\quad c_1,\ldots,c_4,c=\text{const}$$

Отметим, что интегралы в правой части формул (4.7) зависят только от начальной и конечной точек контура, поскольку равенства (4.4) приводят к выражениям для полных дифференциалов.

5. Уравнения (4.6), (4.7) сводят краевые задачи к типичной задаче комплексного анализа – по заданной на границе $\partial\Omega$ вещественной части некоторых выражений определить функции $\varphi_k'(\zeta_k)$ внутри области. При переходе к комплексной переменной $\zeta_k=x_1+\lambda_k x_2$ функции $\psi_k(\zeta_k)$ могут стать многозначными, что недопустимо для величин, имеющих физический смысл. Обозначая через Δ_k, $\Delta_k',\ldots$ приращения функций $\psi_k(\zeta_k)$, $\psi_k'(\zeta_k),\ldots$ в данной точке x при положительном обходе контура, получаем ровно двадцать условий однозначности

$$w:\ 2\operatorname{Re}\{\Sigma\Delta_k\}=0 \tag{5.1}$$

$$M_3: 2\Sigma\operatorname{Re}\left\{\frac{q_{11}}{(s^2_k)^2}(\mathbf{s}_k)(\Delta_k-\zeta_k\Delta_k')\right\}+\mathcal{M}_3=0$$

$$u_\alpha: 2\,\mathrm{Re}\left\{\Sigma \frac{p_\alpha}{p_0}(\mathbf{s}_k)\Delta'_k\right\} = 0, \quad \theta_\alpha: 2\,\mathrm{Re}\{\Sigma s_k^\alpha \Delta'_k\} = 0$$

$$Q_\alpha: 2\,\mathrm{Re}\left\{\Sigma \frac{q_{\alpha\alpha}}{s_k^\beta}(\mathbf{s}_k)\Delta'_k\right\} \pm \mathcal{F}_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1,2) \tag{5.2}$$

$$M_\alpha: 2\Sigma\,\mathrm{Re}\left\{\frac{m_{\alpha\alpha}}{s_k^\beta}(\mathbf{s}_k)\Delta'_k - \frac{q_{\alpha 3}}{s_k^\beta}(\mathbf{s}_k) x_\alpha \Delta''_k\right\} + \mathcal{M}_\beta = 0$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}, \omega_{\alpha\beta}:\; 2\,\mathrm{Re}\left\{\Sigma s_k^\alpha \frac{p_\alpha}{p_0}(\mathbf{s}_k)\Delta''_k\right\} = 0$$

$$\theta_{\alpha\beta}:\; 2\,\mathrm{Re}\left\{\Sigma s_k^\alpha s_k^\beta \Delta''_k\right\} = 0 \tag{5.3}$$

$$\mathcal{F}_3:\; 2\,\mathrm{Re}\left\{\Sigma \frac{q_{13}}{s_k^2}(\mathbf{s}_k)\Delta''_k\right\} - \mathcal{F}_3 = 0$$

$$Q_{\alpha 3}:\; 2\,\mathrm{Re}\{\Sigma q_{\alpha 3}(\mathbf{s}_k)\Delta'''_k\} = 0 \tag{5.4}$$

где $\mathcal{F}_\alpha$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{M}_\alpha$, $\mathcal{M}_3$ означают величины проекций главного вектора и главного момента краевой нагрузки на координатные оси; $\omega_{\alpha\beta} = \partial_\beta u_\alpha - \partial_\alpha u_\beta$ – поворот пластины в продольной плоскости. Дополнительные условия однозначности для усилий и моментов $Q_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$ не требуются в силу равенств (1.4). Для многосвязной области условия (5.1)–(5.4) ставятся для каждого контура; должны также выполняться требования самоуравновешенности краевых нагрузок на отверстиях и внешнем контуре и однозначности перемещений, углов поворота, деформаций и кривизн.

6. Для каждой несамоуравновешенной нагрузки на контуре отверстия выберем некоторую точку $\mathbf{x}_0$: $\zeta_k^0 = \mathbf{s}_k \mathbf{x}_0$ (внутри отверстия). Многозначные слагаемые найдем в виде

$$\Psi_k(\zeta_k) = (\tfrac{1}{2} A\zeta_k^2 + B\zeta_k + C)\ln(\zeta_k - \zeta_k^0)$$

$$\Delta'''_k = 0, \quad \Delta''_k = 2\pi i A, \quad \Delta'_k = 2\pi i B + \zeta_k \Delta''_k \tag{6.1}$$

$$\Delta_k = 2\pi i C + \zeta_k \Delta'_k - \tfrac{1}{2}\zeta_k^2 \Delta''_k; \quad A, B, C = \mathrm{const}$$

Постоянные A, B определяются из уравнений (5.2), (5.3). Величины C находятся совместно из равенств (5.1) и (4.6) или (4.7).

7. Продемонстрируем примеры решения краевых задач для конечного эллипса и пластины с эллиптическим вырезом. Разложим краевые условия в ряд Фурье по угловой координате φ. Правые части уравнений примут вид (коэффициенты с индексами $\pm l$ образуют сопряженные пары):

$$x_1 = a_1 \cos\varphi, \quad x_2 = a_2 \sin\varphi, \quad n_1 = a_2 \rho^{-1}\cos\varphi, \quad n_2 = a_1 \rho^{-1}\sin\varphi$$

$$\rho = (a_1^2 \sin^2\varphi + a_2^2 \cos^2\varphi)^{1/2}, \quad d\tau = \rho\, d\varphi$$

$$u_\alpha^* = \sum_{-\infty}^{\infty} u_{l,\alpha} e^{il\varphi}, \quad -\theta_\alpha^* = \sum_{-\infty}^{\infty} w_{l,\alpha} e^{il\varphi} \tag{7.1}$$

$$\int_{\partial\Omega} \theta_\alpha^* d\tau = \pi\{a_2(w_{1,2} + w_{-1,2}) + i a_1 (w_{1,1} - w_{-1,1})\} \tag{7.2}$$

$$\pm\int_0^t Q_\alpha^* d\tau = \pm\mathcal{F}_\alpha \frac{\varphi}{2\pi} + \sum_{-\infty}^{\infty} q_{l,\alpha} e^{il\varphi} \tag{7.3}$$

$$\mathcal{M}_3 = -\pi\{ia_1(q_{1,2} - q_{-1,2}) - a_2(q_{1,1} + q_{-1,1})\} \tag{7.4}$$

$$\pm\int_0^t M_\alpha^* d\tau = -\frac{\varphi}{2\pi}\left\{\mathcal{M}_\beta \mp a_\alpha \mathcal{F}_3(\delta_\alpha^1 \cos\varphi + \delta_\alpha^2 \sin\varphi)\right\} + \sum_{-\infty}^{\infty} m_{l,\alpha} e^{il\varphi} \tag{7.5}$$

$$\mathcal{M}_1 = \pi\{a_1(m_1 + m_{-1}) + a_2(f_1 + f_{-1})\} \tag{7.6}$$

$$\mathcal{M}_2 = i\pi\{a_2(m_1 - m_{-1}) + a_1(f_1 + f_{-1})\}$$

$$M_n^* = \sum_{-\infty}^{\infty} m_l e^{il\varphi}, \quad F_n^* = \sum_{-\infty}^{\infty} f_l e^{il\varphi}$$

Будем считать, что $\mathcal{M} = 0$, $\mathcal{F} = 0$. Переменные ζ_k задают афинные преобразования исходной области Ω, при этом эллипс $\partial\Omega$ переходит в новый эллипс $\partial\Omega_k$ ($\Omega \to \Omega_k$).

Рассмотрим сначала бесконечную пластину с вырезом. Искомые функции выразим через конформные отображения $\eta_k^{-1}(\zeta_k)$ внешностей эллипсов Ω_k на единичный круг [10–13] (выбирается главная ветвь радикала):

$$\eta_k = \frac{\zeta_k + \xi_k}{a_1 - i\lambda_k a_2}, \quad \xi_k = (\zeta_k^2 - e_k^2)^{1/2}, \quad 2\zeta_k = (a_1 - i\lambda_k a_2)\eta_k + (a_1 + i\lambda_k a_2)\eta_k^{-1}$$

$$\partial\Omega\colon\ \eta_k = e^{i\varphi}, \quad \xi_k = i(a_1 \sin\varphi + \lambda_k a_2 \cos\varphi)$$

$$e_k = (a_1^2 + \lambda_k^2 a_2^2)^{1/2}, \quad b_k = (a_1 + i\lambda_k a_2)(a_1 - i\lambda_k a_2)^{-1}$$

$$\psi_k(\zeta_k) = \text{const} + \psi_{0,k}\zeta_k + {1/2}(a_1 - i\lambda_k a_2)\{\psi_{1,k} \ln\eta_k + \psi_{2,k}\eta_k^{-1} + \sum_2^{\infty} (b_k\psi_{l-1,k} - \psi_{l+1,k})(l\eta_k^l)^{-1}\} \tag{7.7}$$

$$\psi_k' = \sum_0^{\infty} \psi_{l,k}\eta_k^{-l}, \quad \psi_k'|_{\partial\Omega} = \sum_0^{\infty} \psi_{l,k} e^{-il\varphi}$$

$$\psi_k'' = -\xi_k^{-1}\sum_1^{\infty} l\psi_{l,k}\eta_k^{-l}, \quad \psi_{l,k} = \text{const}$$

В первой (или второй) краевой задаче уравнения (4.6) (или (4.7)) сводятся к линейной системе уравнений восьмого порядка для коэффициентов при $e^{\pm il\varphi}$ с неизвестными $\operatorname{Re}\psi_{l,k}$; $\operatorname{Im}\psi_{l,k}$; $k = 1,\ldots, 4$. Матрица системы не зависит от индекса l, ее невырожденность следует из теоремы 6. При $l \geqslant 2$ искомые коэффициенты определяются однозначно и абсолютная и равномерная сходимость рядов Фурье для краевых условий означает абсолютную и равномерную сходимость рядов (7.7) [10]. Для $l = 1$ следует уточнить вид функций $\upsilon_\alpha^0(\mathbf{x})$. Из условия $\varepsilon_{\alpha\beta}, \theta_{\alpha\beta} \to 0$, $|\mathbf{x}| \to \infty$ вытекает, что $\upsilon_\alpha^0 = \pm\, \omega_{21}x_\beta$, $\omega_{21} = \text{const} \in R$; $Q_{\alpha\beta}^0, M_{\alpha\beta}^0 = 0$.

Первая краевая задача. Восемь уравнений (4.6) содержат девять неизвестных $\operatorname{Re}\psi_{1,k}$, $\operatorname{Im}\psi_{1,k}$; ω_{21}. Из двух дополнительных уравнений однозначности (5.1) первое равенство не будет независимым в силу условия (7.2) и отбрасывается. Из оставшейся системы уравнений находятся все неизвестные. При $l = 0$ получается всего четыре уравнения (4.6) и коэффициенты $\psi_{0,k}$ остаются неопределенными. Однако физический смысл будут иметь только их линейные комбинации, отвечающие за трансляционный сдвиг в продольной плоскости и поворот пластины как жесткого целого вокруг осей x_1, x_2. Из равенств

$$2\operatorname{Re}\left\{\Sigma\frac{p_\alpha}{p_0}(s_k)\psi_{0,k}\right\} = u_{0,\alpha}; \quad w_0 + 2\operatorname{Re}\{\Sigma\zeta_k\psi_{0,k}\} = w_0 + x_\alpha w_{0,\alpha}$$

$$w_t = w_0 - \int_{(0,t)} \theta_\alpha^* dx_\alpha \tag{7.8}$$

данные компоненты определяются. Трансляционный сдвиг по вертикали находится по заданным значениям прогиба в точках контура $(0^{\smile}, t) \subset \partial\Omega$.

Вторая краевая задача. При $l = 1$ получаем восемь уравнений (4.7) и два уравнения (5.1), из которых второе оказывается зависимым в силу равенства (7.4), $\mathcal{M}_3 = 0$ и однозначности продольных усилий. В итоге определяются неизвестные $\mathrm{Re}\psi_{1,k}$; $\mathrm{Im}\psi_{1,k}$; $c \in R$. Неопределенными остаются величины $\psi_{0,k}$; ω_{21}; w_0.

8. Для несамоуравновешенной нагрузки можно использовать формулы (6.1). Чтобы не корректировать предыдущие рассуждения удобнее заменить логарифмическую функцию следующим образом:

$$\Psi_k(\zeta_k) = \tfrac{1}{4} A_k\{(2\zeta_k^2 - e_k^2)\ln\eta_k + \xi_k\zeta_k\} + B_k\{\zeta_k \ln\eta_k - \xi_k\} \tag{8.1}$$

$$\Delta_k''' = 0, \quad \Delta_k'' = 2\pi i A_k, \quad \Delta_k' = 2\pi i B_k + \zeta_k \Delta_k''$$

$$\Delta_k = \pi i(a_1 - i\lambda_k a_2)\psi_{1,k} + \zeta_k\Delta_k' + \tfrac{1}{4}(2\zeta_k^2 - e_k^2)\Delta_k''$$

Коэффициенты A_k, B_k определяются аналогично.

9. Предельным переходом к бесконечно узкому эллипсу получаются решения краевых задач о конечном сквозном разрезе $-a_1 \leqslant x_1 \leqslant a_1, x_2 = 0$ в бесконечной пластине. Рассмотренные выше системы уравнений значительно упрощаются. Приходим к "осредненному" аналогу сингулярной задачи, который можно понимать как асимптотику внутреннего НДС при $a_2 \to +0$, $h/a_2 \to +0$. Отметим как следствие формул (4.2) и (7.7), что усилия и моменты $Q_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$ (и напряжения $\sigma_{\alpha\beta}^j$) в кончике разреза имеют типичную сингулярность порядка $r^{-1/2}$, где r – расстояние до концевой точки:

$$x_1 = a_1\cos\varphi + r\cos\mu, \quad x_2 = a_2\sin\varphi + r\sin\mu, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 2\pi$$

$$\xi_k = \{\pm 2a_1 r(\cos\mu - \lambda_k \sin\mu) + O(a_2^2) + O(r^2)\}^{1/2}, \quad \varphi = 0, \pi$$

$$\psi_k''(\zeta_k) \sim \xi_k^{-1} = O(r^{-1/2}), \quad Q_{\alpha\beta} \sim r^{-1/2} f_{\alpha\beta}(\mu)$$

В остальных точках функции регулярны. Осреднение величин $\sigma_{\alpha z}^j$, σ_{zz}^j и усилий $Q_{\alpha z}$ существенно искажает их асимптотики при $r \to 0$.

Рассмотрение для жесткой вставки проводится совершенно аналогично.

10. Внутренность эллипса с границей $\partial\Omega_k$ и разрезом $(-e_k, e_k)$ может быть преобразована в кольцо с помощью отображения $\eta_k(\zeta_k)$: $|b_k| \leqslant |\eta_k| \leqslant 1$ [11]. Неизвестные функции зададим рядом Лорана, полагая, что $\mathcal{M} = 0$, $\mathcal{F} = 0$:

$$\psi_k(\zeta_k) = \mathrm{const} + \psi_{0,k}\zeta_k + \tfrac{1}{2}\{\psi_{1,k}\zeta_k^2 + (a_1 - i\lambda_k a_2)\times$$

$$\times\sum_2^\infty \psi_{l,k}\left[\frac{\eta_k^{l+1} + (b_k\eta_k^{-1})^{l+1}}{l+1} - b_k\frac{\eta_k^{l-1} + (b_k\eta_k^{-1})^{l-1}}{l-1}\right]\Bigg\}$$

$$\psi_k' = \psi_{0,k} + \psi_{1,k}\zeta_k + \sum_2^\infty \psi_{l,k}[\eta_k^l + (b_k\eta_k^{-1})^l]$$

$$\psi_k'' = \psi_{1,k} + \xi_k^{-1}\sum_2^\infty l\psi_{l,k}[\eta_k^l - (b_k\eta_k^{-1})^l]$$

Очевидно полное совпадение структуры потенциалов $\psi_k'(\zeta_k)$ с решением С.Г. Лехницкого (разложение по полиномам Фабера) и П.П. Куфарева для однослойной эллиптической пластинки.

Снова получаем восемь линейных уравнений (4.6) или (4.7) для коэффициентов $\mathrm{Re}\varphi_{l,k}$; $\mathrm{Im}\psi_{l,k}$. При $l \geqslant 2$ искомые величины определяются однозначно; невырожденность системы следует из теоремы 6.

Отметим, что предельная ($l \to \infty$, $b_k^l \to 0$) матрица соответствующей системы уравнений совпадает с матрицей для задачи о пластине с вырезом. Тем самым абсолютная и равномерная сходимость рядов Фурье для краевых условий означает абсолютную и равномерную сходимость рядов Лорана.

Отметим также, что разрез $(-e_k, e_k)$ проведен для формального удобства, но в итоговых выражениях все нечетные степени радикала отсутствуют и точки разреза отождествлены. Поскольку однозначные функции $\psi_k(\zeta_k)$ содержат квадратный трехчлен, можно положить $\upsilon_\alpha^0(\mathbf{x}) = 0$, $Q_{\alpha\beta}^0 = 0$, $M_{\alpha\beta}^0 = 0$. Это общее свойство представлений (4.2); легко показать, что квадратичные компоненты обеспечивают достаточный произвол и отброшенные слагаемые становятся избыточными.

Первая краевая задача. Для индекса $l = 1$ одно из восьми уравнений (4.6) совпадает с первым условием (7.2). При $l = 0$ остается только четыре уравнения (4.6). Удается определить не сами коэффициенты $\psi_{l,k}$, а их линейные комбинации, которые вместе с условием (7.8) задают линейные компоненты продольных смещений и квадратичные компоненты прогиба:

$$u_\alpha = (u_{1,\alpha} + u_{-1,\alpha})x_1 a_1^{-1} + i(u_{1,\alpha} - u_{-1,\alpha})x_2 a_2^{-1} + u_{0,\alpha}$$

$$2w = i(w_{1,\alpha} - w_{-1,\alpha})x_\alpha^2 a_\alpha^{-1} + [i(w_{1,1} - w_{-1,1})a_2^{-1} + (w_{1,2} + w_{-1,2})a_1^{-1}]x_1 x_2 + 2(x_\alpha w_{0,\alpha} + w_0)$$

Вторая краевая задача. Для величин $\mathrm{Re}\psi_{1,k}$, $\mathrm{Im}\psi_{1,k}$, c ($l = 1$) получается восемь уравнений (4.7), одно из которых зависимо в силу условия (7.4), $\mathcal{M}_3 = 0$. Искомые постоянные остаются неопределенными, но находятся все соответствующие (постоянные) компоненты усилий и моментов $Q_{\alpha\beta}$, $M_{\alpha\beta}$; из равенств (1.4) определяются компоненты деформаций и кривизн. Прочие коэффициенты и составляющие трансляционных сдвигов и поворота пластины как жесткого целого, очевидно, неизвестны.

11. В заключение сформулируем общий результат, позволяющий получать точные решения для класса областей, конформно отображаемых на круг. Обозначим множители при функциях $\psi_k'(\zeta_k)$ в уравнениях (4.6) или (4.7) через a_{lk}, $B = \| a_{lk} \|^{-1}$ (вырожденность матрицы означала бы не единственность решений предыдущей задачи о пластине с вырезом). Пусть H_l^0 ($l = 1,\ldots, 4$) – правые части уравнений (4.6) или (4.7).

Теорема 7. Предположим, что выполнены условия:

1) существует набор конформных отображений между областями Ω_k и единичным кругом K_1;

2) внешние нагрузки самоуравновешены и функции $\varphi_k'(\zeta_k)$ однозначные;

3) краевые условия заданы бесконечно гладкими функциями.

Тогда искомые функции имеют вид

$$\psi_k'(\zeta_k) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{l=1}^{4} b_{kl}H_l^*(e^{i\varphi})\frac{e^{i\varphi} + \eta_k(\zeta_k)}{e^{i\varphi} - \eta_k(\zeta_k)}d\varphi + i\sum_{l=1}^{4} b_{kl}r_l$$

$$\eta_k : \Omega_k \to K_1 = \{\rho e^{i\varphi},\ \rho \geqslant 1\},\quad \kappa_k : K_1 \to \Omega_k,\quad H_l^0(x)|_{\partial\Omega} = H_l^0(\kappa_k(e^{i\varphi})) = H_l^*$$

где $\mathbf{r} = \{r_l\}$ – вектор из произвольных вещественных постоянных.

Доказательство теоремы следует из формулы Шварца для определения аналитической функции в круге по ее вещественной части на окружности. В силу теоремы Римана названные конформные отображения всегда существуют, если исходная область Ω – односвязная с гладкой границей [14].

Остается открытым вопрос об эффективном построении таких отображений для каждой области Ω_k; даже для конечного эллипса этого сделать не удается и применяются полиномы Фабера.

12. Предложенный метод идейно не отличается от метода классических комплексных потенциалов Колосова–Мусхелишвили–Лехницкого. Однако потенциалы задаются сразу для перемещений (без аналога функции Эйри), а задача связанного изгиба–растяжения–сжатия–сдвига пластины имеет суммарную размерность по отношению к раздельному классическому рассмотрению. Несколько иначе определяются постоянные интегрирования. В остальном имеется полная аналогия, вплоть до сохранения структуры потенциалов в том же виде, что и в соответствующей плоской или изгибной задачах, что позволяет эффективно использовать накопленный запас решений.

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (M7X000).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Захаров Д.Д.* Асимптотический анализ трехмерных динамических уравнений теории упругости для тонкой многослойной анизотропной пластинки произвольной структуры // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 742–749.
2. *Zakharov D.D.* Asymptotical integration of 3-D dynamic equations for thin multilayered anisotropic plate // C.R. Acad. Sci. Paris. 1992. T. 315. Ser. 2. No 8. P. 915–920.
3. *Захаров Д.Д.* Двумерные динамические уравнения тонкой несимметрично-слоистой упругой пластины с анизотропией общего вида // Докл. РАН. 1994. Т. 336. № 1. С. 50–53.
4. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с.
5. *Гольденвейзер А.Л., Колос А.В.* К построению двумерных уравнений теории упругости тонких пластин // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 1. С. 141–155.
6. *Колос А.В.* Методы уточнения классической теории изгиба и растяжения пластинок // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 4. С. 771–781.
7. *Агаловян Л.А.* К теории изгиба ортотропных пластинок // Инж. журн. МТТ. 1966. № 6. С. 114–121.
8. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
9. *Лехницкий С.Г.* Плоская статическая задача теории упругости анизотропного тела // ПММ. 1937. Т. 1. Вып. 1. С. 77–90.
10. *Лехницкий С.Г.* О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит // ПММ. 1938. Т. 2. Вып. 2. С. 181–210.
11. *Куфарев П.А.* Определение напряжений в эллиптической анизотропной пластинке // Докл. АН СССР. 1939. Т. 23. № 3. С. 221–223.
12. *Савин Г.Н.* Некоторые задачи теории упругости анизотропной среды // Докл. АН СССР. 1939. Т. 23. № 3. С. 217–220.
13. *Савин Г.Н.* Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 887 с.
14. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.

Москва

Поступила в редакцию
6.IV.1994