

УДК 539.3

© 1995 г И.Г. Горячева, А.П. Горячев, Ф. Садеги

**КОНТАКТИРОВАНИЕ УПРУГИХ ТЕЛ С ТОНКИМИ ВЯЗКОУПРУГИМИ ПОКРЫТИЯМИ В УСЛОВИЯХ ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ ИЛИ СКОЛЬЖЕНИЯ**

Развиваются аналитические методы решения контактной задачи о качении упругого цилиндра по вязкоупругому слою, сцепленному с упругим основанием, с целью изучения влияния механических и геометрических характеристик тонких поверхностных слоев на параметры контактного взаимодействия и коэффициент трения качения. Для описания механических свойств вязкоупругого слоя используется модель Максвелла. Задача рассматривается в предположении частичного проскальзывания на площадке контакта, что дает возможность рассмотреть сопротивление перекачиванию как суммарный результат проявления несовершенной упругости поверхностных слоев взаимодействующих тел и трения скольжения на площадке контакта. В качестве частного случая получено решение задачи о полном скольжении цилиндра по упругому основанию, покрытому тонким вязкоупругим слоем.

В связи с задачами повышения долговечности, снижения трения и износа представляется важным изучение влияния покрытий, а также различных поверхностных пленок на контактные характеристики и сопротивление движению при относительном качении или скольжении взаимодействующих поверхностей, когда существенно проявляется их свойства несовершенной упругости.

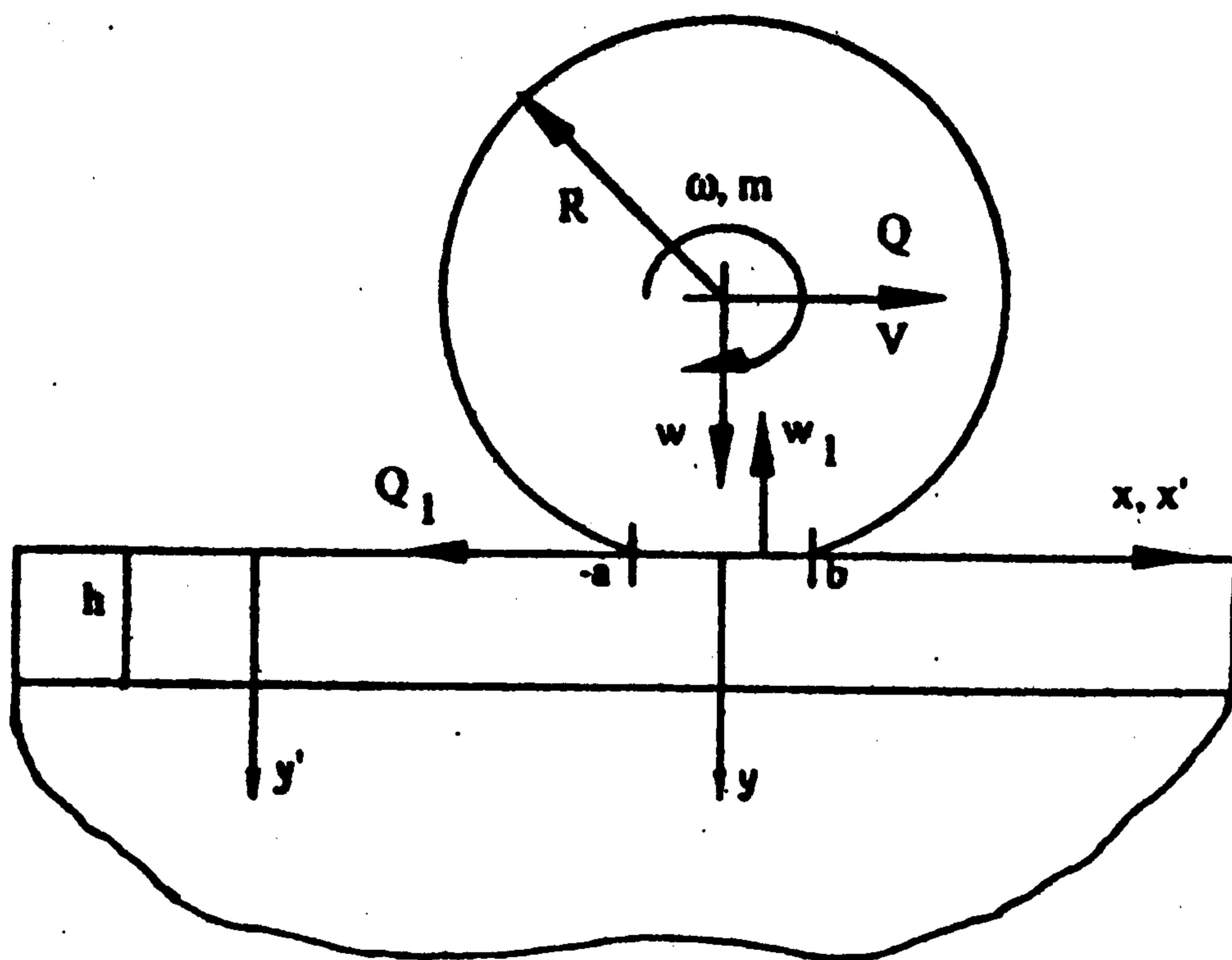
Методом преобразований Фурье исследовалось [1, 2] напряженно-деформированное состояние вязкоупругой полосы, сцепленной с вязкоупругой полуплоскостью и находящейся под действием движущейся нагрузки. Предложен [3] численный алгоритм решения контактной задачи для слоистых упругих и вязкоупругих тел, находящихся в условиях трения качения; однако использование этого алгоритма при анализе контактных характеристик и их зависимости от всех параметров задачи является затруднительным. Зависимость напряженного состояния вязкоупругой полосы от времени при вдавливании в нее жесткого цилиндрического штампа изучалась в [4].

**1. Постановка задачи.** Рассматривается контактная задача в плоской постановке для упругого цилиндра и основания, состоящего из вязкоупругой полосы толщины  $h$ , сцепленной с упругой полуплоскостью (фиг. 1). Цилиндр катится или скользит по основанию с постоянной линейной скоростью  $V$  и угловой скоростью  $\omega$ . Контактующая поверхность цилиндра описывается функцией  $f(x) = x^2/(2R)$  ( $R$  – радиус цилиндра).

Введем неподвижную  $(x', y')$  систему координат, связанную с основанием, и подвижную  $(x, y)$ , связанную с движущимся цилиндром. При этом

$$x' = x + Vt, \quad y' = y$$

При равномерном движении цилиндра движение среды можно считать установившимся по отношению к системе координат  $(x, y)$ . В этой системе координат смещения и напряжения не зависят явно от времени и являются функциями координат  $(x, y)$ .



Фиг. 1

**Граничные условия.** Следуя Рейнольдсу, разобьем область контакта  $(-a, b)$  на зоны скольжения ( $S$ ) и сцепления ( $A$ ). В зонах  $S$  трение скольжения моделируется законом Кулона–Амонтона

(1.1)

где  $\tau(x)$  и  $p(x)$  – соответственно тангенциальные и нормальные напряжения на площадке контакта. В зонах  $A$  равны тангенциальные скорости контактирующих точек цилиндра и вязкоупругого слоя. Поэтому в системе координат  $(x', y')$  тангенциальные смещения  $u_1$  и  $u$  точек цилиндра и основания соответственно удовлетворяют соотношению

(1.2)

Уравнение (1.2) в системе координат  $(x, y)$  имеет вид

(1.3)

где  $\delta$  – величина относительного проскальзывания.

Кроме того, в зонах сцепления  $A$  нормальные и тангенциальные напряжения связаны неравенством

(1.4)

Заметим, что в случае полного скольжения соотношение (1.1) имеет место на всей площадке контакта  $(-a, b)$ . Из условия контактирования следует, что для всех точек площадки контакта  $(-a, b)$  выполняется соотношение

(1.5)

где  $v_1, v_2$  и  $v_3$  – нормальные перемещения граничных точек цилиндра, упругой полуплоскости и слоя соответственно (считающиеся положительными для каждого тела),  $\gamma$  – внедрение цилиндра в основание.

Предполагается, что вязкоупругий слой сцеплен с упругой полуплоскостью

и следующие граничные условия имеют место на границе раздела ( $y = h$ ):

$$u(x, h^-) = u(x, h^+), \quad v(x, h^-) = v(x, h^+) \quad (1.6)$$

$$p(x, h^-) = p(x, h^+), \quad \tau(x, h^-) = \tau(x, h^+)$$

**Механическая модель вязкоупругого слоя.** В предположении, что толщина  $h$  вязкоупругого слоя много меньше ширины площадки контакта, будем моделировать его нормальную и тангенциальную податливость, используя одномерную модель Максвелла, а именно:

$$\dot{u}_3 = h \left( \frac{1}{\eta_\tau} \tau + \frac{1}{\lambda_\tau} \dot{\tau} \right), \quad \dot{v}_3 = h \left( \frac{1}{\eta_n} p + \frac{1}{\lambda_n} \dot{p} \right) \quad (1.7)$$

где  $u_3$  и  $v_3$  – тангенциальные и нормальные смещения границы слоя ( $y = 0$ ),  $\eta_n$ ,  $\lambda_n$  и  $\eta_\tau$ ,  $\lambda_\tau$  – вязкоупругие характеристики слоя в нормальном и тангенциальном направлениях соответственно. Подобная стержневая модель в случае упругого основания была использована ранее [5].

В системе координат  $(x, y)$  соотношения (1.7) имеют вид

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} = -\frac{h}{V\eta_\tau} \tau(x) + \frac{h}{\lambda_\tau} \frac{d\tau(x)}{dx} \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x} = -\frac{h}{V\eta_n} p(x) + \frac{h}{\lambda_n} \frac{dp(x)}{dx} \quad (1.9)$$

В рассматриваемой модели предполагается, что нормальные и тангенциальные напряжения на верхней границе слоя ( $y = 0$ ) и на границе между слоем и упругой полуплоскостью ( $y = h$ ) имеют одинаковые значения. Поэтому градиент смещений границы упругих тел (цилиндра и упругой полуплоскости) определяется следующими соотношениями ( $i = 1, 2$ ):

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = -\frac{(1-2\nu_i)(1+\nu_i)}{E_i} p(x) - \frac{2(1-\nu_i^2)}{\pi E_i} \int_{-a}^b \frac{\tau(s)}{x-s} ds \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x} = \frac{(1-2\nu_i)(1+\nu_i)}{E_i} \tau(x) - \frac{2(1-\nu_i^2)}{\pi E_i} \int_{-a}^b \frac{p(s)}{x-s} ds \quad (1.11)$$

Уравнения (1.8)–(1.11) вместе с граничными условиями (1.1), (1.3) и (1.5) используются для определения нормальных и тангенциальных напряжений в зоне контакта  $(-a, b)$ .

**2. Анализ контактных давлений.** Для упрощения расчетов пренебрежем влиянием тангенциальных контактных напряжений на нормальные. Тогда, используя соотношения (1.5), (1.9) и (1.11) (последнее рассматривается при  $\tau(x) = 0$ ) и вводя новую переменную  $\xi$ , связанную с  $x$  равенством

$$x = \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2} \xi$$

получим

$$\int_{-1}^1 \frac{P(\sigma) d\sigma}{\xi - \sigma} + KP(\xi) - \frac{C}{D} P'(\xi) = D(L + \xi) \quad (2.1)$$

$$P(\xi) = \frac{2}{\pi E^*} p \left( \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2} \xi \right), \quad K = \frac{h\pi E^*}{2V\eta_n}, \quad C = \frac{h\pi E^*}{2R\lambda_n}, \quad D = \frac{a+b}{2R}, \quad L = \frac{b-a}{a+b}$$

Принимая во внимание условие равенства нулю давления на концах области контакта цилиндра с основанием, т.е.  $P(-1) = P(1) = 0$ , уравнение (2.1) преобразуем к уравнению Фредгольма второго рода

$$\int_{-1}^1 F(\sigma) \left[ \ln|\xi - \sigma| + \frac{K}{2} \operatorname{sgn}(\xi - \sigma) - \frac{1+\sigma}{2} \ln(1+\sigma) - \frac{1-\sigma}{2} \ln(1-\sigma) + \frac{K\sigma}{2} \right] d\sigma - \frac{C}{D} F(\xi) = \xi D$$

$$(F(\xi) = P'(\xi)) \quad (2.2)$$

Из условия равновесия нормальных сил, приложенных к цилиндру, следует, что искомая функция  $F(\xi)$  удовлетворяет также соотношению

$$W = -D \int_{-1}^1 s F(s) ds \quad (2.3)$$

где  $W = 2w / (\pi R E^*)$  – безразмерная нормальная нагрузка, приложенная к цилиндру.

Уравнения (2.2) и (2.3) используются для определения контактного давления  $P(\xi)$ , размера области контакта  $D$ , смещения области контакта  $L$  и максимального внедрения цилиндра в вязкоупругий слой  $\Delta_{\max}$

$$P(\xi) = \int_{-1}^{\xi} F(\sigma) d\sigma, \quad D = -W \left[ \int_{-1}^1 \rho F(\rho) d\rho \right]^{-1}$$

$$L = \frac{1}{2D} \int_{-1}^1 F(\sigma) [(1+\sigma) \ln(1+\sigma) + (1-\sigma) \ln(1-\sigma) - K\sigma] d\sigma \quad (2.4)$$

$$\Delta_{\max} = \max \frac{v_3(x)}{R} = D \max \Phi(\xi), \quad -1 < \xi < 1$$

$$\left( \Phi(\xi) = K \left[ \int_{\xi}^1 \tau F(\tau) d\tau + \xi \int_{-1}^{\xi} F(\tau) d\tau \right] + \frac{C}{D} \int_{\xi}^1 F(\tau) d\tau \right)$$

Заметим, что если пренебречь упругостью цилиндра и основания и определить давление в области контакта из решения уравнения (1.9) при граничных условиях (1.5), то будем иметь

$$P(\xi) = \frac{D}{K} \left[ \operatorname{cth} \frac{1}{De} + \xi - \frac{\exp(\xi/De)}{\operatorname{sh}(1/De)} \right] \left( De = \frac{C}{KD} = \frac{2\eta_n V}{\lambda_n(a+b)} \right) \quad (2.5)$$

где  $De$  – число Деборы.

**3. Анализ тангенциальных напряжений в зоне контакта.** Если известны нормальные контактные давления, тангенциальные напряжения в области контакта могут быть получены на основании соотношений (1.1), (1.3), (1.6), (1.8) и (1.10). В области сцепления  $A$  имеет место следующее интегральное уравнение для определения функции  $\tau(x)$ :

$$-\frac{h}{V\eta_\tau} \tau(x) + \frac{h}{\lambda_\tau} \frac{d\tau(x)}{dx} - \frac{2}{\pi E^*} \int_{-a}^b \frac{\tau(s)}{x-s} ds = -\delta - \frac{2\beta}{\pi E^*} p(x), \quad x \in A \quad (3.1)$$

$$\beta = \pi E^* [(1-2\nu_1)(1+\nu_1)/E_1 - (1-2\nu_2)(1+\nu_2)/E_2] / 2$$

Используя метод, изложенный выше при анализе контактных давлений, уравнение (3.1) можно привести к виду

$$\rho(\xi) = 0, \quad \xi \in A_\xi \quad (3.2)$$

где

$$\rho(\xi) = \delta + \beta P(\xi) + \frac{C_1}{D} \Phi(\xi) - \int_{-1}^1 \left[ \ln|\xi - t| + \frac{K_1}{2} \operatorname{sgn}(\xi - t) \right] \Phi(t) dt \quad (3.3)$$

$$\Phi(\xi) = q'(\xi), \quad q(\xi) = \frac{2}{\pi E^*} \tau \left( \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2} \xi \right), \quad C_1 = \frac{h\pi E^*}{2R\lambda_\tau}, \quad K_1 = \frac{h\pi E^*}{2V\eta_\tau}$$

Кроме того, в зоне сцепления  $A_\xi$  тангенциальные напряжения удовлетворяют неравенству  $|q(\xi)| < \mu P(\xi)$ , следующему из (1.4).

Соотношение (1.1) служит для определения тангенциальных напряжений в зонах проскальзывания  $S$ . Кроме того, в этих зонах тангенциальные напряжения противоположны направлению проскальзывания, что приводит к соотношению

$$\tau(x) = \mu p(x) \operatorname{sgn} \left( \frac{du_2}{dx} - \frac{du_1}{dx} + \frac{du_3}{dx} + \delta \right)$$

Подставляя сюда соотношения (1.8) и (1.10) и используя (3.3), получаем

$$q(\xi) = \mu P(\xi) \operatorname{sgn} \rho(\xi), \quad \xi \in S_\xi \quad (3.4)$$

В точках  $\xi_i$  перехода из одной зоны в другую имеет место условие непрерывности

$$q(\xi_i) = \mu P(\xi_i), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.5)$$

Уравнения (3.2), (3.4) и (3.5) используются для определения тангенциальных напряжений в области контакта, а также расположения и размеров зон сцепления и проскальзывания. Для численного анализа полученных уравнений был применен итерационный процесс.

Задача определения тангенциальных напряжений существенно упрощается в предположении, что  $2\lambda_\tau / E^* \ll 1$  и  $\beta = 0$ . В этом случае уравнения (3.2) и (3.4) сводятся к следующим:

$$q(\xi) - \operatorname{De}_\tau \frac{dq}{d\xi} = B, \quad \xi \in A_\xi \quad (3.6)$$

$$q(\xi) = \mu P(\xi) \operatorname{sgn} \left[ -q(\xi) + \operatorname{De}_\tau \frac{dq}{d\xi} + B \right], \quad \xi \in S_\xi \quad (3.7)$$

$$\left( \operatorname{De}_\tau = \frac{2V\eta_\tau}{\lambda_\tau(a+b)}, \quad B = \frac{2\delta V\eta_\tau}{h\pi E^*} \right)$$

Анализ уравнений (3.6) и (3.7) показывает, что в рассматриваемом случае область контакта разбивается на две (сцепления и проскальзывания) или три (проскальзывания, сцепления, проскальзывания) зоны.

В случае двух зон тангенциальные напряжения в области контакта определяются выражением

$$q(\xi) = \begin{cases} \mu P(\xi), & \xi \in (-1, \xi_1) \\ B(1 - \kappa(\xi - 1)), & \xi \in (\xi_1, 1) \end{cases} \quad \left( \kappa(x) = \exp \left( \frac{x}{\operatorname{De}_\tau} \right) \right) \quad (3.8)$$

причем точка перехода  $\xi_1$  определяется из соотношения

$$B(1 - \kappa(\xi_1 - 1)) = \mu P(\xi_1) \quad (3.9)$$

Этот случай имеет место, если

$$\operatorname{De}_\tau \mu P'(1 - 0) + B \leq 0 \quad (3.10)$$

В противном случае, т.е. в случае трех зон, для определения тангенциальных напряжений имеем выражение

$$q(\xi) = \begin{cases} \mu P(\xi), & \xi \in (-1, \xi_1) \cup (\xi_2, 1) \\ B + [\mu P(\xi_2) - B]k(\xi - \xi_2), & \xi \in (\xi_1, \xi_2) \end{cases} \quad (3.11)$$

где  $\xi_1$  и  $\xi_2$  – решение уравнений

$$B + [\mu P(\xi_2) - B]k(\xi_1 - \xi_2) = \mu P(\xi_1) \quad (3.12)$$

$$\mu P(\xi_2) - B - \mu De_{\tau} P'(\xi_2) = 0 \quad (3.13)$$

При отсутствии вязкоупругого слоя существуют только две зоны (сцепления и проскальзывания) на площадке контакта при качении упругого цилиндра по основанию из того же материала ( $\beta = 0$ ).

**4. Анализ сопротивления перекатыванию.** Катящийся цилиндр находится под действием нормальной  $w$  и тангенциальной  $Q$  активных нагрузок, момента  $m$ , а также сил реакции основания  $w_1$  и  $Q_1$ , возникающих в результате действия нормальных и тангенциальных напряжений на площадке контакта (фиг. 1). Из условия равновесия сил и моментов следует

$$m - \int_{-a}^b xp(x)dx + Q_1 R = 0$$

Используя введенные обозначения (2.1) и (3.3), получаем следующие выражения для безразмерных величин силы сопротивления и момента трения качения:

$$T = \frac{2Q}{\pi R E^*} = -D \int_{-1}^1 \xi \Phi(\xi) d\xi, \quad M = \frac{2m}{\pi E^* R^2} = -\frac{D^2}{2} \int_{-1}^1 (\xi + L)^2 F(\xi) d\xi - T \quad (4.1)$$

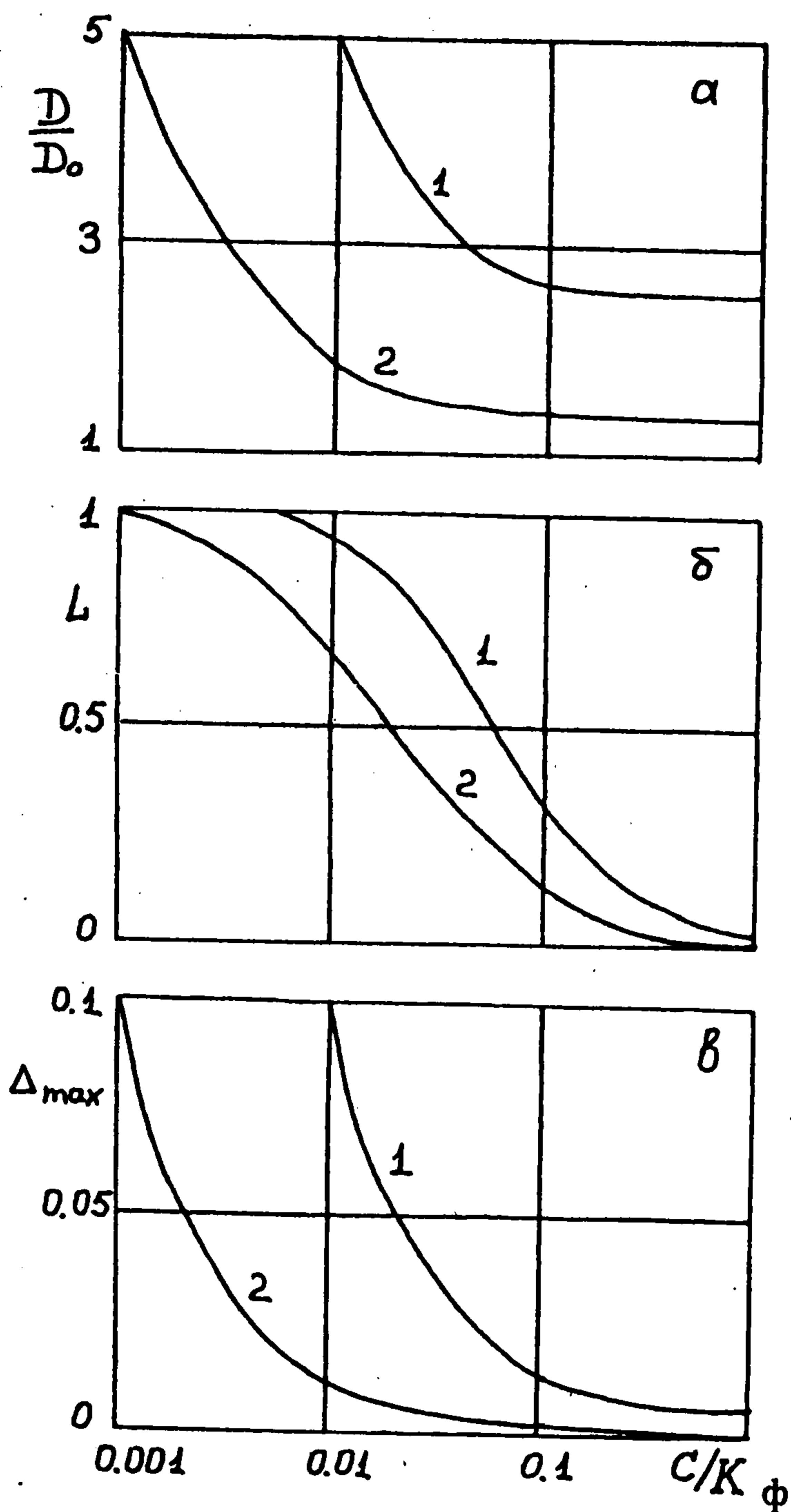
Первое (или второе) уравнение (4.1) также может быть использовано для определения величины относительного проскальзывания  $\delta$  (1.3), если величина тангенциальной силы  $T$  (или момента  $M$ ) известна.

При  $T = \mu W$  скольжение имеет место на всей площадке контакта. Случай  $T = 0$  соответствует чистому качению. Коэффициент трения качения определяется на основании зависимости

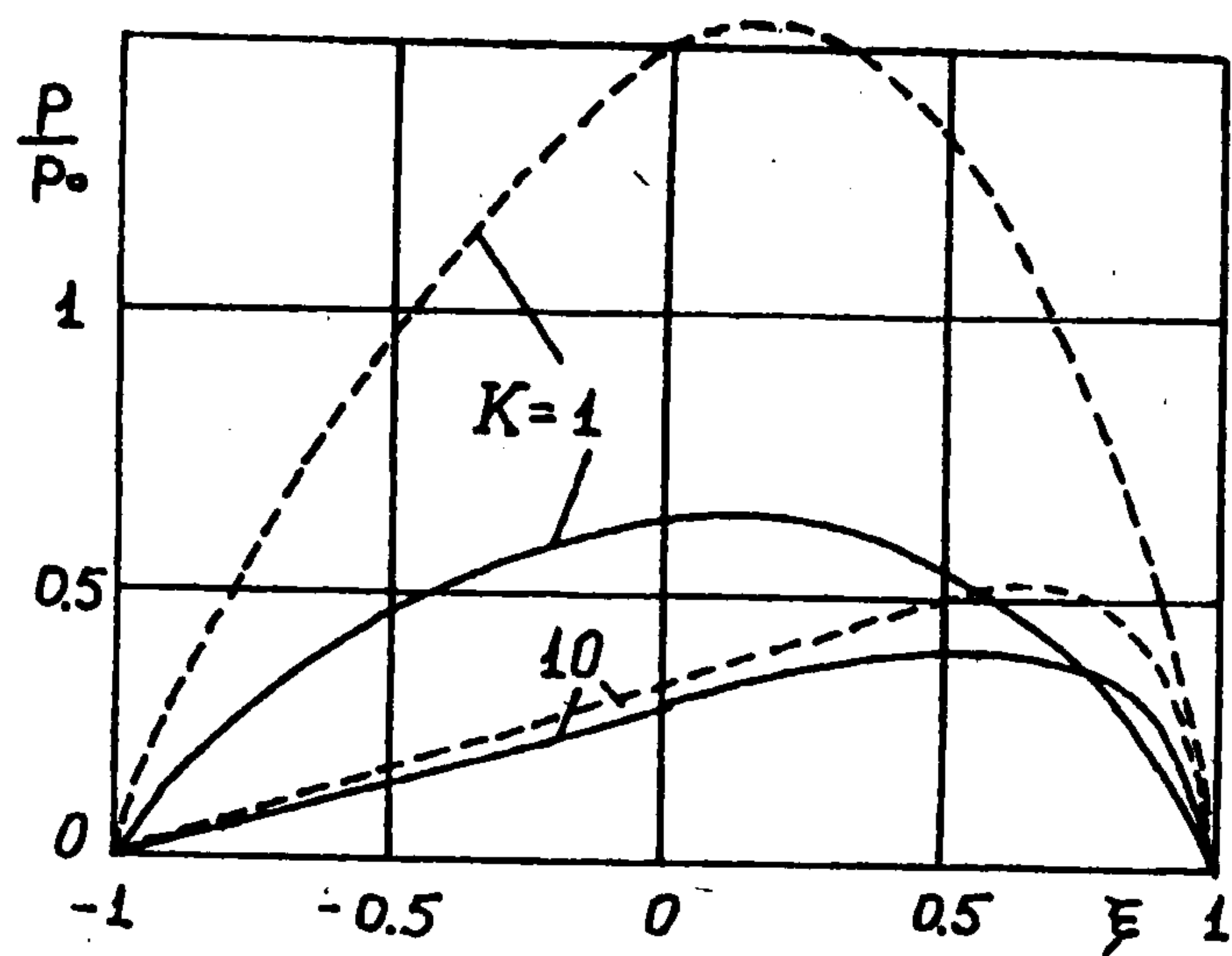
$$\mu_R = M/W \quad (4.2)$$

причем значения  $M$  и  $W$  находятся по второй формуле (4.1) и формуле (2.3) соответственно.

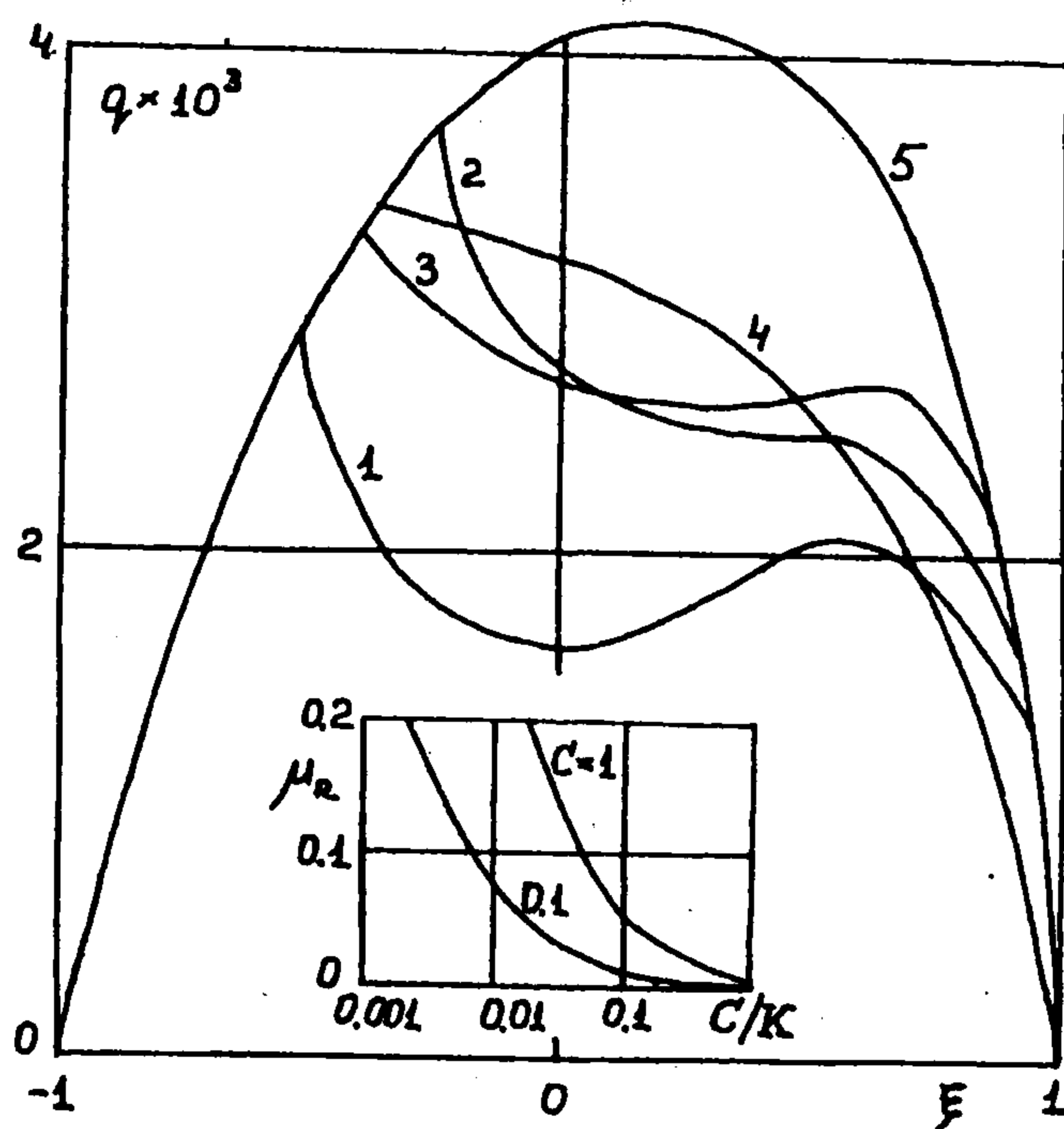
**5. Результаты расчетов.** На фиг. 2 представлены графики функции контактного давления  $p(\xi)/p_0$  ( $p_0$  – максимальное контактное давление Герца), построенные при  $C = 0,1$ ;  $D = 0,1$  и разных значениях параметра  $K$ . Сплошные линии соответствуют общему случаю контактного взаимодействия упругих тел при наличии между ними вязкоупругого слоя, штриховые линии построены по формуле (2.5) в случае пренебрежения упругими свойствами индентора и основания. Результаты показывают, что с уменьшением скорости  $V$  перемещения индентора, т.е. с увеличением параметра  $K$  (см. (2.1)) эпюра распределения давления под штампом становится более несимметричной. При фиксированном размере площадки контакта и заданных вязкоупругих характеристиках слоя контактные давления и их максимальные значения существенно зависят от упругих свойств индентора и основания при скоростях перемещения, соответствующих малым значениям  $K$ . Однако при уменьшении скорости ( $K = 10$ ) различие между распределением давления в обоих случаях становится пренебрежимо малым. Таким образом, вязкоупругий слой оказывает основное влияние на распределение контактных давлений при низких скоростях движения.



Фиг. 3



Фиг. 2



Фиг. 4

На фиг. 3 представлены графики зависимостей безразмерной длины  $D/D_0$  области контакта ( $D_0$  – безразмерная длина области контакта в случае постановки Герца,  $D_0 = (2W)^{1/2}$ ), ее смещения  $L$  и максимального внедрения  $\Delta_{\max}$  (2.4) цилиндра в вязкоупругий слой от параметра  $C/K$  при  $W = 0,001$  для  $C = 1$  (кривые 1) и  $C = 0,1$  (кривые 2). Параметр  $C/K = \eta_n V / (\lambda_n R)$  зависит от времени релаксации  $\eta_n / \lambda_n$  и скорости  $V$ . Видно, что с увеличением параметра  $C/K$  длина площадки контакта уменьшается и стремится к постоянному значению ( $D = 1,49 D_0$  и  $D = 2,71 D_0$  при  $C = 0,1$  и  $C = 1$  соответственно). При малых значениях параметра  $C/K$  длина площадки контакта возрастает существенно, особенно с увеличением параметра  $C$  (фиг. 3,а). Заметим, что параметр  $C$  зависит от толщины слоя и относительных упругих характеристик слоя и основания. С уменьшением времени релаксации и уменьшением скорости перемещения индентора (уменьшением параметра  $C/K$ ) возрастает смещение  $L$  площадки контакта (фиг. 3,б) и максимальное внедрение  $\Delta_{\max}$  цилиндра в вязкоупругий слой (фиг. 3,в), что обусловлено проявлением вязкоупругих свойств промежуточного слоя. При увеличении параметра  $C/K$  смещение площадки контакта становится пренебрежимо малым для всех значений параметра  $C$ .

Результаты расчетов тангенциальных напряжений на площадке контакта катящегося цилиндра с основанием при наличии на нем поверхностного слоя, базирующиеся на анализе уравнений (3.2), (3.4) и (3.5), представлены на фиг. 4. Свойства поверхностного вязкоупругого слоя в этом анализе описываются параметром  $\theta = \eta_\tau \lambda_n / (\eta_n \lambda_\tau)$ , представляющим

собой отношение времени релаксации в тангенциальном и нормальном направлении ( $\theta = C_1 K / (C K_1)$ ), а также безразмерным параметром  $C_1$  (3.3), зависящим от относительной толщины слоя и относительных упругих характеристик слоя и основания. Графики распределения тангенциальных контактных напряжений построены при следующих значениях безразмерных параметров:  $C = 0,1$ ,  $K = 1$ ,  $W = 0,01$ ,  $\mu = 0,1$ ,  $C_1 = 0,1$ . Кривой 1 соответствует  $T = 0,6\mu W$ ,  $\theta = 1$ ,  $\beta = -0,4$ , кривой 2 –  $T = 0,8\mu W$ ,  $\theta = 1$ ,  $\beta = -0,4$ , кривой 3 –  $T = 0,8\mu W$ ,  $\theta = 0,1$ ,  $\beta = -0,4$ , кривой 4 –  $T = 0,8\mu W$ ,  $\theta = 0,1$ ,  $\beta = 0,4$ , кривой 5 –  $T = \mu W$ .

Результаты показывают, что с увеличением параметра  $\theta$  возрастают значения максимальных тангенциальных напряжений на площадке контакта и уменьшается величина зоны сцепления. Кроме того, установлено, что с уменьшением значения тангенциальной силы  $T$  контакт переходит от полного скольжения (кривая 5) к трехзонному, а затем к двухзонному случаям. Качественно те же результаты были получены в расчетах по формулам (3.8) – (3.13) для частного случая одинаковых упругих характеристик цилиндра и основания ( $\beta = 0$ ) и  $\lambda_r/E^* \ll 1$ . При тех же характеристиках слоя ( $C_1 = 0,1$ ,  $\theta = 0,1$ ) изменение относительных упругих характеристик цилиндра и основания от  $\beta = -0,4$  (кривая 3) к  $\beta = 0,4$  (кривая 4) приводит к переходу от трехзонного контакта к двухзонному.

На фиг. 4 представлены также графики зависимости коэффициента трения качения, рассчитанного по формуле (4.2), от безразмерного параметра  $C/K$  для  $W = 0,001$ ,  $T = 0$ . Коэффициент трения качения для рассматриваемой модели вязкоупругого слоя монотонно убывает с ростом параметра  $C/K$  и  $\mu_R \rightarrow 0$  при  $C/K \rightarrow +\infty$ .

**6. Выводы.** На основании результатов аналитического и численного анализа решения контактной задачи о качении (скольжении) упругого цилиндра по границе вязкоупругого слоя, лежащего на упругом основании, можно сделать следующие выводы.

1°. Нормальные и тангенциальные напряжения в области контакта могут быть описаны при помощи безразмерных параметров:  $C$ ,  $K$ ,  $\theta$ ,  $C_1$ ,  $\beta$ ,  $\mu$ ,  $W$ ,  $T$ .

2°. Установлены области изменения параметров  $C$ ,  $K$ ,  $\theta$ ,  $C_1$ , описывающих относительные свойства вязкоупругого слоя, при которых проявляется существенное влияние тонкого поверхностного слоя на контактные характеристики.

3°. При увеличении скорости скольжения влияние свойств поверхностного слоя на контактные характеристики уменьшается.

4°. Относительно упругие характеристики индентора и основания оказывают существенное влияние на распределение нормальных и тангенциальных напряжений на площадке контакта, что требует их учета при постановке задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-00386-а).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Barta S.K., Ling F.F. On deformation friction and interface shear stress in viscoelastic-elastic layered system under a moving load // Amer. Soc. of Lubr. Engrs. Trans. 1967. V. 10. № 3. P. 294–301.
2. Ling F.F., Lai W.M. Surface mechanics of layered media // Solid Contact and Lubrication / Eds by H.S. Chang and L.M. Keer. N.Y.: ASME. 1980. P. 27–50.
3. Kalker J.J. Viscoelastic multilayered cylinder rolling with dry friction // Trans. ASME, J. Appl. Mech. 1991. V. 58. № 3. P. 666–679.
4. Можаровский В.В., Старжинский В.Е. Прикладная механика слоистых тел из композитов. Минск: Наука и техника, 1988, 272 с.
5. Ишлинский А.Ю. О проскальзывании в области контакта при трении качения // Изв. АН СССР. ОТН. 1956. № 6. С. 3–15.

Москва, Вест-Лафайет

Поступила в редакцию  
10. X. 1994