

УДК 539.3; 534.1

© 1995 г. А.П. Глинов

АНАЛИЗ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ, ОБУСЛОВЛЕННЫХ ДВИЖЕНИЕМ ПОГОННОЙ НАГРУЗКИ

Строится аналитическое решение модельной задачи об изгибных колебаниях балки на упругом винклеровском основании, обусловленных движущимся вдоль нее фронтом погонной нагрузки. Для частного случая, когда скорость фронта постоянна, а погонная нагрузка – ступенчатая функция, приводятся количественные результаты. Показано, что существует критическая скорость движения груза, с превышением которой значительно усиливаются упругие колебания. При этом прогиб балки в динамике может превосходить удвоенную величину смещения при соответствующей статической нагрузке. Значение критической скорости определяется механическими характеристиками балки и основания и может быть вычислено по идеальной теории бесконечной балки. Амплитуда изгибной волны при приближении к критической скорости возрастает с ростом длины балки.

Известно аналитическое решение [1, 2] модельной задачи об изгибе бесконечной балки, лежащей на сплошном однородном упругом основании, вследствие движения вдоль нее с постоянной скоростью сосредоточенной нагрузки. Такое решение построено в виде бегущей волны и показано, что существует критическая скорость движения груза, при достижении которой происходит резонансное усиление амплитуды волны. Аналогичное исследование колебаний балки вследствие движения вдоль нее источника погонной нагрузки проводится ниже как для бесконечной, так и конечной длины балки.

1. Постановка задачи. Рассмотрим балку на упругом основании, вдоль которой движется по закону $x = x_*(t)$, $x'_*(t) = V$ источник погонной нагрузки с постоянными интенсивностями Q_1 и Q_0 соответственно до и после источника. Считается, что у балки поперечное сечение и модуль упругости E постоянны, а ее концы свободны. Согласно гипотезе Винклера [3] реакция упругого основания r пропорциональна прогибу $u(x, t)$ оси балки: $r = -ku$, где k – жесткость основания, или коэффициент постели [1].

Для обобщения задачи предположим, что затухание колебаний в упругой системе обусловлено наличием внутренней силы сопротивления F_f , пропорциональной скорости смещения балки: $F_f = -\eta \frac{\partial u}{\partial t}$, где η – коэффициент пропорциональности, который характеризует внутреннее трение. Предполагается, что до включения и начала движения источника в момент времени $t = 0$ балка покоится и недеформированна. Тогда дифференциальное уравнение изогнутой оси балки вместе с граничными и начальными условиями примет вид

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{EJ}{R} \right) + ku + \eta \frac{\partial u}{\partial t} = F(x, t) = [Q_0 \Theta(x_* - x) + Q_1 \Theta(x - x_*)] \Theta(t) \quad (1.1)$$

$$x = 0, \quad x = l: \quad u_{xx} = u_{xxx} = 0; \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (1.2)$$

где x – продольная координата; J, l – соответственно момент инерции плоского поперечного сечения и длина балки; m – масса балки на единицу длины, а R – радиус

кривизны ее изогнутой оси; Θ – функция Хевисайда. Если ограничиться рассмотрением малых прогибов, то можно принять $1/R = u_{xx}$.

2. Автомодельное решение. Если скорость движения источника постоянна, а длина балки бесконечна, то можно ввести автомодельную переменную $\xi = x - Vt$ и положить $u(x, t) = f(\xi)$. Тогда из (1.1), (1.2) получим

$$\begin{aligned} f'''' + 2bf'' - af' + \omega^2 f &= q_0 \Theta(-\xi) + q_1 \Theta(\xi) \\ f''(\pm\infty) = f'''(\pm\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$2b = \frac{mV^2}{EJ}, \quad \omega^2 = \frac{k}{EJ}, \quad q_0 = \frac{Q_0}{EJ}, \quad q_1 = \frac{Q_1}{EJ}, \quad a = \frac{\eta V}{EJ}$$

Для простоты будем пренебрегать потерями упругой энергии, т.е. полагать $\eta = a = 0$. Решение (2.1) получим, сшивая прогибы перед источником и за ним на фронте бегущей волны ($\xi = 0$). Должны быть обеспечены условия гладкого сопряжения f вплоть до третьей производной [3].

Обозначим автомодельное решение, отвечающее $q_1 = 0$, через $\vartheta(\xi)f_0$, где $f_0 = Q_0/k$. Тогда из (2.1) найдем

$$\vartheta(\xi) = \begin{cases} \theta^+(\xi), & \xi \geq 0 \\ 1 + \theta^-(\xi), & \xi \leq 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\theta^\pm(\xi) = \frac{1}{2} e^{\mp\alpha\xi} \left[\pm \cos \beta\xi + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \sin \beta\xi \right]$$

$$\alpha^2 = \frac{m[V_c^2 - V^2]}{4EJ}, \quad \beta^2 = \frac{m[V_c^2 + V^2]}{4EJ}, \quad V_c^4 = \frac{4kJ}{m^2}$$

Это верно для $V < V_c$. При $V \rightarrow V_c$ имеем $\alpha \rightarrow 0$, $\vartheta(\xi) \rightarrow \infty$, если $\xi \neq 0$. Если же $V > V_c$, автомодельного решения не существует.

Далее проанализируем прогиб балки при $q_1 \neq 0$.

Теорема 1. Автомодельное решение f при $q_1 \neq 0$ выражается через нормированный прогиб балки ϑ при $q_1 = 0$ по формуле: $(f - f_1) = (f_0 - f_1)\vartheta(\xi)$, $f_1 = Q_1/k$.

Для доказательства рассмотрим функцию $\varphi = f - f_1$. Из (2.1) получим $2b\varphi'' + \omega^2\varphi + \varphi'''' = (q_0 - q_1)\Theta(-\xi)$, т.е. задача с $Q_1 \neq 0$ свелась к исследованной ранее при $Q_1 = 0$, но с заменой Q_0 на $Q_0 - Q_1$.

Из теоремы вытекает, что $f(\xi) + f(-\xi) = f_0 + f_1$, $f(0) = (f_0 + f_1)/2$.

График аналитического решения отражен на фиг. 1, где $f = (f - f_1)/(f_0 - f_1)$, $\bar{\xi} = \sqrt{m/(4EJ)}V_c\xi$. Кривые 1–3 отвечают значениям V/V_c , соответственно равным 0; 0,9; 0,99. Видно, что нормированный прогиб $\vartheta(\xi) - 1/2$ – нечетная функция ξ . Экстремальные значения ϑ_* , достигаемые в точках ξ_* , распределены по закону

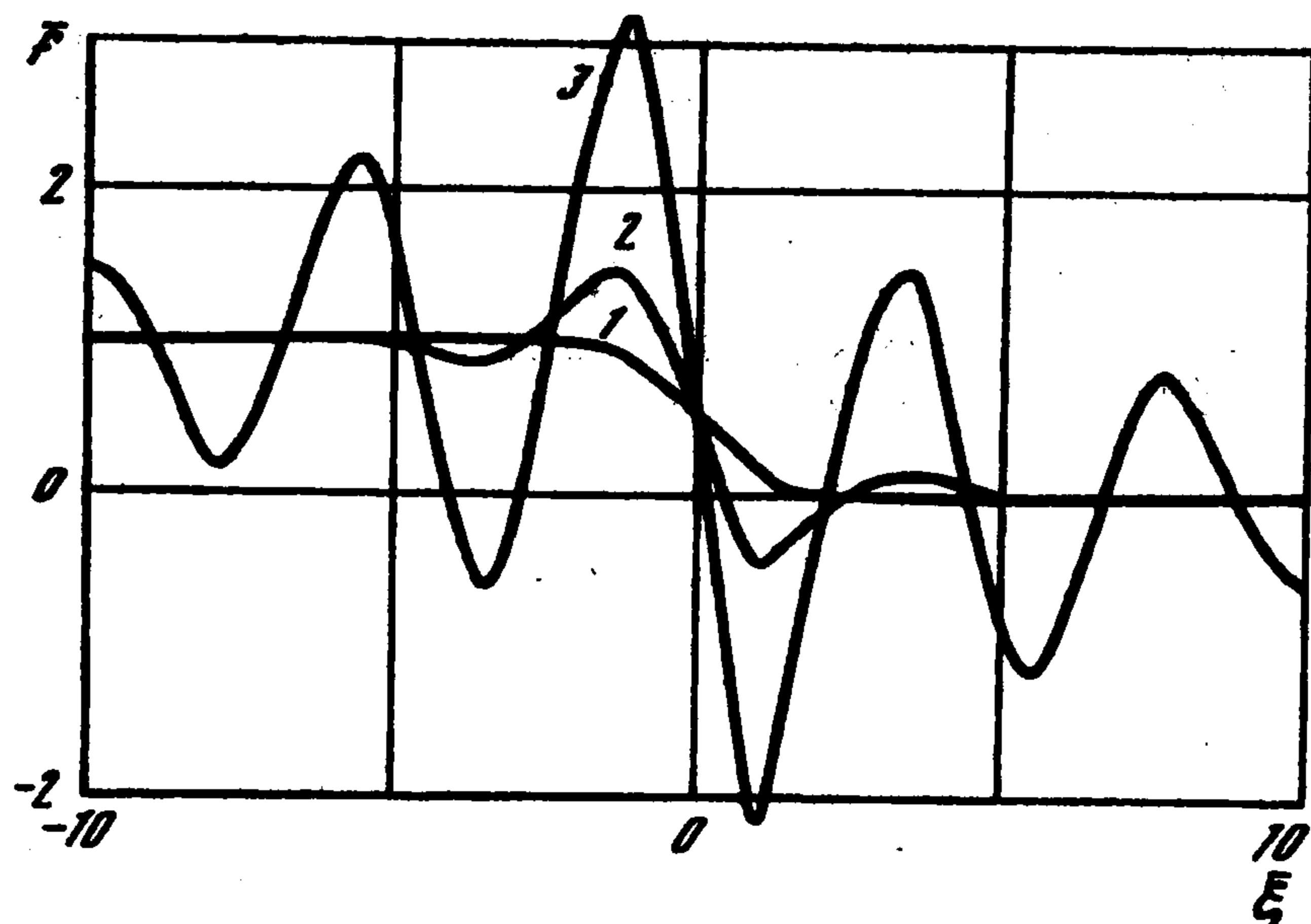
$$\begin{aligned} \beta\xi_{*j}^{(j)} &= \text{arctg}(\beta/\alpha) - \pi j < 0, \quad j = 1, 2, 3, \dots \\ \vartheta(\xi_{*j}^{(j)}) &= 1 + \frac{1}{4}(-1)^{j+1} \exp(\alpha\xi_{*j}^{(j)}) [1 + (\beta/\alpha)^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

При $\xi_* > 0$ имеем

$$\xi_* = \xi_{*+}^{(j)} = -\xi_{*-}^{(j)}, \quad \vartheta(\xi_{*-}^{(j)}) - \vartheta(0) = \vartheta(0) - \vartheta(\xi_{*+}^{(j)})$$

Для статической нагрузки ($V = 0$) справедливо равенство

$$\bar{\xi}_{*j}^{(j)} = \pi(\frac{1}{4} - j) \quad (2.4)$$



Фиг. 1

При приближении же к критической скорости ($V = V_c$) выражение в левой части равенства (2.4) стремится к пределу $\pi(1/2 - j)/\sqrt{2}$. С ростом скорости V экстремальные точки приближаются к источнику ($\xi = 0$). Расстояние между всеми соседними экстремальными точками, за исключением ближайших к источнику ($j = 1$), ввиду (2.3) – величина постоянная: $|\xi_*^{(j+1)} - \xi_*^{(j)}| = \pi/\beta$.

Для $j = 1$ имеем $|\xi_{*+}^{(1)} - \xi_{*-}^{(1)}| = 2[\pi - \text{arctg}(\beta/\alpha)]/\beta$. С ростом скорости V расстояние между всеми соседними пучностями сокращается до величины $\pi/[\sqrt{m/(2EJ)} V_c]$. Амплитудные нормированные значения волны прогибов ϑ_* при малых скоростях $v \ll v_c$ близки к единице, т.е. приемлемо приближение статической нагрузки. Наиболее ярко влияние динамической нагрузки проявляется при $V \rightarrow V_c$, тогда $|\vartheta_*| \rightarrow \infty$.

Аналогично пучностям изгибной волны прослеживается распределение ее узлов, т.е. нулей функции $\vartheta(\xi)$ при $\xi > 0$: $\vartheta(\xi_0^{(j)}) = 0$. Из (2.2) получим

$$\left[1 + \left(\frac{V}{V_c}\right)^2\right]^{1/2} \bar{\xi}_0^{(j)} = \pi j - \text{arctg}\left[\left(\frac{V_c}{V}\right)^4 - 1\right]^{1/2}$$

3. Балка конечной длины. Автомоделная упругая волна существует при скорости источника $V < V_c$ и бесконечной балке. Когда длина l балки конечна, такое решение будет приемлемо вдали от ее концов, если $\alpha l \gg 1$, $\beta l \gg 2\pi$. Когда эти условия нарушаются, то необходимо исследование решений с учетом отражения упругих волн от границ $x = 0$, $x = l$.

Теорема 2. Краевая задача (1.1), (1.2), описывающая колебания балки с произвольной движущейся погонной нагрузкой F , может иметь при малых прогибах только единственное решение.

Доказательство. Предположим, что существуют два различных решения. Тогда для их разности δu имеем

$$m\delta u_{tt} + \eta\delta u_t + k\delta u + EJ\delta u_{xxxx} = 0 \quad (3.1)$$

$$\delta u(x, 0), \quad \delta u_t(x, 0) = 0$$

$$\delta u'(0, t) = \delta u'''(0, t) = 0, \quad \delta u''(l, t) = \delta u''''(l, t) = 0$$

Умножим уравнение (3.1) на δu_t и проинтегрируем по x от 0 до l и по t от 0 до t , используя граничные и начальные условия. В результате получим соотношение, из которого следует, что $\delta u = 0$.

Так как (1.1) – линейное уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами, то его решение удобно искать в виде рядов Фурье по собственным функциям однородной ($F = 0$) стационарной задачи. Формально оно может быть найдено методом разделения переменных

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_k(x) v_k(t), \quad F(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k(t) \chi_k(x) \quad (3.2)$$

Подставляя (3.2) в (1.1), (1.2), получим спектральную краевую задачу на собственные значения $\gamma = \gamma_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

$$\chi_n'''' = \gamma_n^4 \chi_n, \quad m\ddot{v}_n + \eta\dot{v}_n + (k + EJ\gamma_n^4)v_n = \Phi_n \quad (3.3)$$

$$x = 0, \quad x = l: \chi_n'' = \chi_n''' = 0; \quad t = 0: v_n = v_n' = 0$$

Общее решение имеет вид

$$\chi(x) = A \operatorname{ch} \gamma x + B \operatorname{sh} \gamma x + C \cos \gamma x + D \sin \gamma x; \quad A, B, C, D = \text{const}$$

Используя граничные условия, получим характеристическое уравнение $\operatorname{ch} \mu \cos \mu = 1$, где $\mu = \gamma l$. Спектр дискретный ($\mu = \mu_n$): $\mu_0 = 0$, $\mu_{2k-1} \in [\pi(4k-1)/2, 2\pi k]$, $\mu_{2k} \in [2\pi k, \pi(4k+1)/2]$, $k \geq 1$. Если $n \geq 1$, то $\mu_n \sim \mu_n^a \equiv \pi(n + 1/2)$.

При $n \geq 1$ все собственные значения простые.

Если же $n = 0$, то корень μ двукратный. Ему отвечают две независимые собственные функции. Из (3.3) следует, что $\chi_0 = Gx + H$, где $G, H = \text{const}$. Одну из двух собственных функций можно положить постоянной: $\chi_{01} = A_{01} = \text{const}$. Другую (χ_{02}) определим из условия ортогональности к χ_{01} .

Можно показать, что все собственные функции χ_k , отвечающие разным собственным значениям μ_k , ортогональны. Налагая на них дополнительно условие нормировки $\int_0^l \chi_k^2(x) dx = 1$, получим

$$\chi_n(x) = A_n [\operatorname{ch} \gamma_n x + \cos \gamma_n x - C_n (\operatorname{sh} \gamma_n x + \sin \gamma_n x)] \quad (3.4)$$

$$C_n = (\operatorname{ch} \mu_n - \cos \mu_n) / (\operatorname{sh} \mu_n - \sin \mu_n)$$

$$A_n = \{(1 + C_n^2)N_1 + (1 - C_n^2)N_2 - 2C_n(N_3 + N_4)\}^{-1/2}$$

$$N_1 = l \left[\frac{\operatorname{sh} 2\mu_n}{4\mu_n} + \frac{1}{2} \right], \quad N_2 = l \left[\frac{\sin 2\mu_n}{4\mu_n} + \frac{1}{2} \right]$$

$$N_3 = l \frac{1 - \cos 2\mu_n}{4\mu_n}, \quad N_4 = \frac{\operatorname{ch} 2\mu_n - 1}{4\mu_n}, \quad n \geq 1$$

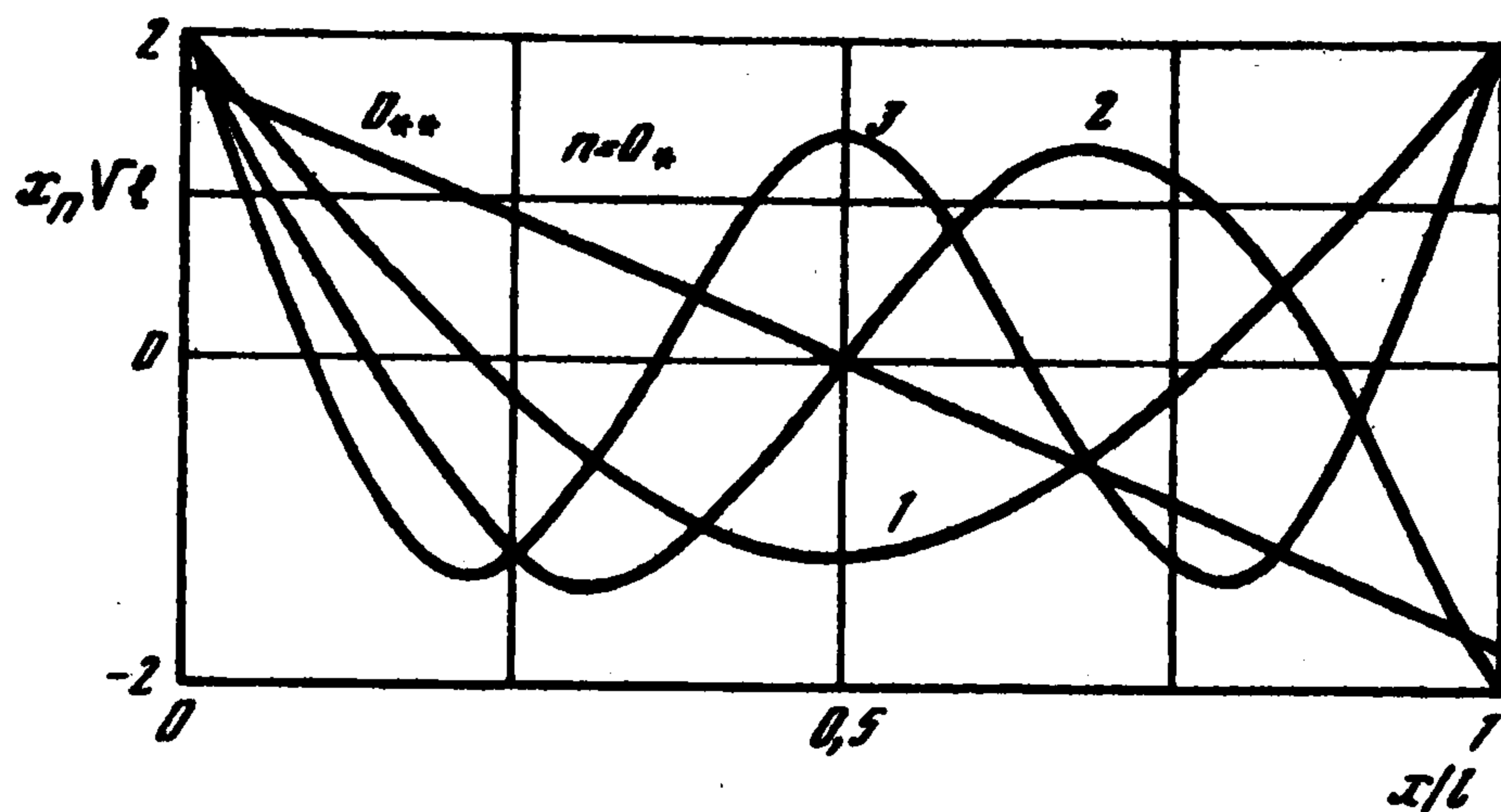
$$\chi_{01}(x) = A_{01} = 1/\sqrt{l}; \quad \chi_{02}(x) = A_{02}(1 - 2x/l), \quad A_{02} = \sqrt{3/l} \quad (3.5)$$

Собственные числа μ_n , полученные численно ($n \geq 1$), таковы: $\mu_1 = 3\pi/2 + 1,7651 \cdot 10^{-2}$, $\mu_2 = 5\pi/2 - 7,7763 \cdot 10^{-4}$, $\mu_3 = 7\pi/2 + 3,2712 \cdot 10^{-5}$, $\mu_4 = 9\pi/2 - 1,9412 \cdot 10^{-6}$, $|\mu_n - \pi(n + 1/2)| < 6 \cdot 10^{-7}$ при $n \geq 5$. Коэффициенты A_n, C_n приведены ниже

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$(A_n \sqrt{l} - 1) \times 10^6$	0	-1	-1	-1	-1	-209	10782	9495	8493
$(C_n - 1) \times 10^6$	-17498	777	-34	1	-1	0	-1	0	-1

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$(A_n \sqrt{l} - 1) \times 10^6$	7666	6992	6427	5947	5533	5173	4858	4578	4329

$|C_n - 1| < 5 \cdot 10^{-7}$ при $n \geq 10$.



Фиг. 2

Графики собственных функций представлены на фиг. 2. Ввиду двойной кратности наименьшего собственного значения $\mu_0 = 0$, отвечающей ему номер $n = 0$ отмечен как 0_* и 0_{**} соответственно для первой (χ_{01}) и второй (χ_{02}) собственной функции.

Видно, что при $n = 0_*$ собственная функция четна относительно середины балки ($x = l/2$) и не имеет нулей. В дальнейшем каждая следующая по номеру собственная функция (0_{**} , 1, 2 и т.д.) меняет четность на противоположную и дополнительно приобретает один нуль.

Имея ортонормированный базис $\chi_n(x)$, для построения решения общей задачи о смещениях балки необходимо еще найти коэффициенты разложения по базису $v_n(t)$. Можно показать, что в общем случае при произвольной погонной нагрузке $F(x, t)$

$$v_n(t) = \frac{1}{m|\psi_0|} \int_0^t K(t-\tau) \Phi_n(\tau) d\tau \quad (3.6)$$

$$K(\zeta) = \exp\left(-\frac{\eta}{2m}\zeta\right) \times \begin{cases} \sin \psi_n \zeta, & \eta \leq \eta_c \\ \text{sh} |\psi_n| \zeta, & \eta \geq \eta_c \end{cases}$$

$$\psi_n = \left[\frac{k + EJ(\mu_n/l)^4}{m} - \left(\frac{\eta}{2m}\right)^2 \right]^{1/2}, \quad \psi_n(\eta_c) = 0$$

$$\Phi_n(t) = \int_0^l F(x, t) \chi_n(x) dx$$

Далее для упрощения анализа рассмотрим частный случай равномерного движения источника $x_* = Vt$, $V = \text{const}$ с погонной нагрузкой $F(x, t)$, отличающейся от соответствующей величины, определенной в (1.2), множителем $\beta(t)$, учитывающим возможность выключения нагрузки при сходе источника с правого конца балки: $\beta(t) = 1$, если нагрузка не исчезает при $x_* > l$ и $\beta(t) = \Theta(l - x_*)$ — если при сходе источника нагрузка полностью отключается.

После вычисления интегралов получим

$$\Phi_{01}(t) = \begin{cases} A_{01}[Vt(Q_0 - Q_1) + Q_1 l], & t \leq t_* = l/V \\ A_{01}\beta_0 Q_0 l, & t \geq t_*, n = 0_* \end{cases}$$

$$\Phi_{02}(t) = \begin{cases} A_{02}l(Q_0 - Q_1)(t - t_*)^2, & t \leq t_* \\ 0, & t \geq t_*, n = 0_{**} \end{cases}$$

$$\Phi_n(t) = \begin{cases} Q_0[\alpha(Vt) - \alpha(0)] + Q_1[\alpha(l) - \alpha(Vt)], & x_* \leq l \\ \beta_0 Q_0[\alpha(l) - \alpha(0)], & x_* \geq l, n \geq 1 \end{cases}$$

$$\alpha(x) = \int_0^x \chi_n(x) dx + \alpha(0) = A_n [\operatorname{sh} \gamma_n x + \sin \gamma_n x - C_n (\operatorname{ch} \gamma_n x - \cos \gamma_n x)] / \gamma_n$$

где $\beta_0 = 1$, если нагрузка остается при сходе источника с балки и $\beta_0 = 0$ – в противном случае.

Для коэффициента $v_{01}(t)$ разложения по первой собственной функции получим

$$m\psi_0 v_{01}(t) = A_{01} \{ (Q_0 - Q_1) I_{v1}(s, t) + Q_1 I_1(s, t) + \beta_0 Q_0 [I_1(t, t) - I_1(s, t)] \};$$

$$I_1(s, t) = \Omega [I_{11}(t-s) - I_{11}(t)]$$

$$I_{v1}(s, t) = \int_0^s K(t-\tau) V \tau d\tau = V \left\{ \left(s - \frac{\eta \Omega}{m\psi_n} \right) I_1(s, t) + \Omega s I_{11}(t) + \Omega \frac{[K(t-s) - K(t)]}{\psi_n} \right\},$$

$$n=0; \quad \Theta(0) = \frac{1}{2}$$

$$s = t\Theta(t_* - t) + t_*\Theta(t - t_*), \quad \Omega = \left\{ \psi_n \left[1 + \left(\frac{\eta}{2m\psi_n} \right)^2 \right] \right\}^{-1}$$

$$I_{11}(t) = \exp\left(-\frac{\eta t}{2m}\right) \left[\cos \psi_n t + \frac{\eta \sin \psi_n t}{2m\psi_n} \right]$$

Очевидно, что $\alpha(0) = 0$. Далее, при $n \geq 1$ имеем $\alpha(l) = 0$, так как константа является собственной функцией, а они ортогональны в пространстве $L_2[0, l]$.

Второй коэффициент разложения решения $v_{02}(t)$ по базису ортонормированных собственных функций $\chi_n(x)$ имеет вид

$$m\psi_0 v_{02} = A_{02} (Q_0 - Q_1) \{ I_{v1}(s, t) - I_{v2}(s, t) \} / l$$

$$I_{v2}(s, t) = \int_0^s K(t-\tau) (V\tau)^2 d\tau = V \{ s I_{v1}(s, t) - \kappa(s, t) \}$$

$$\kappa(s, t) = \int_0^s I_{v1}(\tau, t) d\tau = V \{ s \Phi_n(s, t) - H_n(s, t) - H_0(s, t) \}$$

$$\Phi_n(s, t) = \int_0^s I_1(\tau, t) d\tau = \Omega \cdot \left\{ -s I_{11}(t) + \frac{\eta}{m\psi_n} I_1(s, t) + \frac{K(t) - K(t-s)}{\psi_n} \right\};$$

$$H_n(s, t) = \int_0^s \Phi_n(\tau, t) d\tau = \Omega \left\{ -\frac{s^2}{2} I_{11}(t) + \frac{\eta}{m\psi_n} \Phi_n(s, t) + s \frac{K(t)}{\psi_n} - \frac{I_1(s, t)}{\psi_n} \right\}$$

Коэффициенты же разложения $v_n(t)$ при $n \geq 1$ определяются так:

$$m\psi_n v_n(t) = (Q_0 - Q_1) \frac{A_n}{\gamma_n} \{ I_2(s, t) + I_4^+(s, t) - C_n [I_3(s, t) - I_4^-(s, t)] \}$$

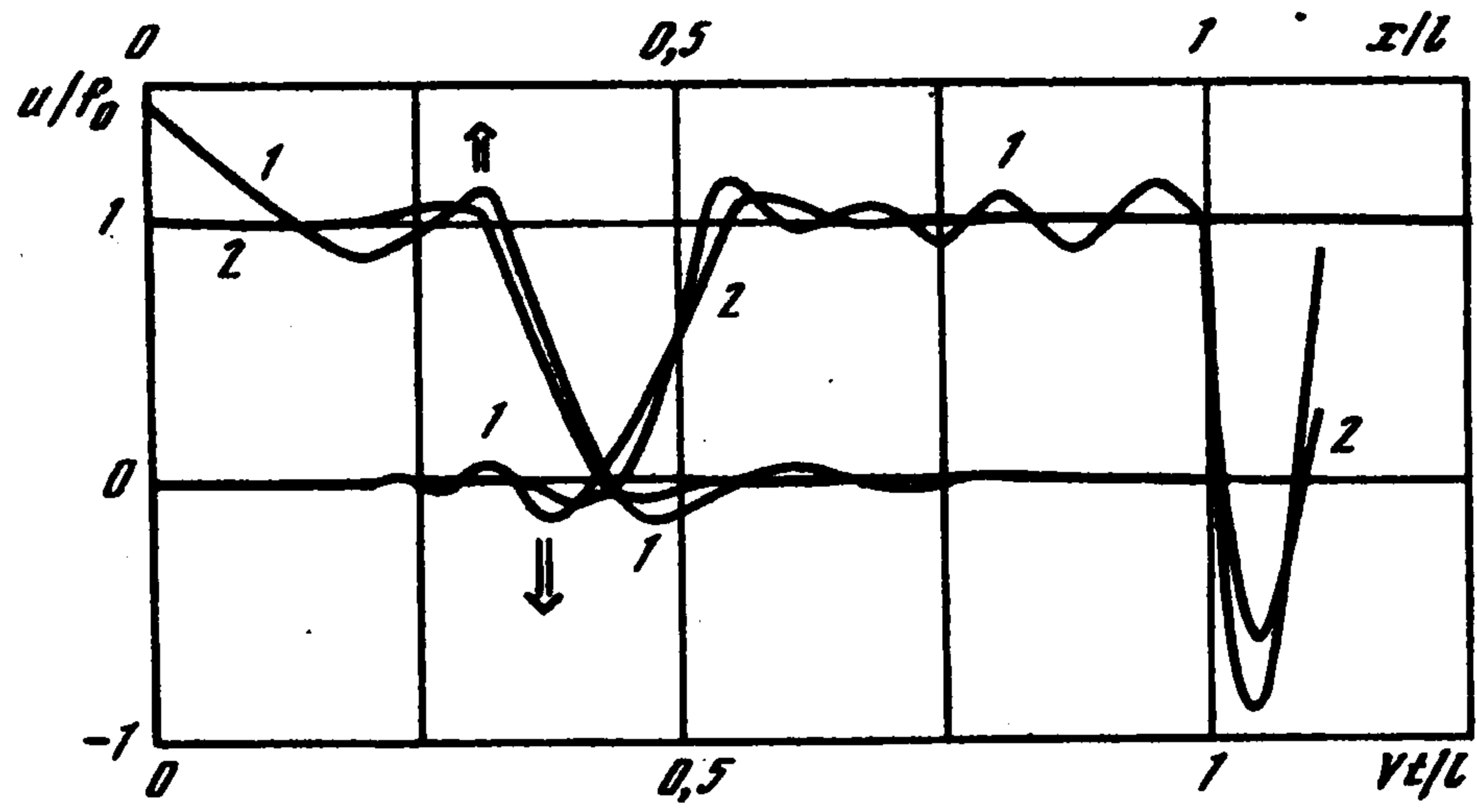
$$I_2(s, t) = \frac{1}{2\psi_n} \{ -I_{22}(-V, t-s) e^{-\gamma_n V s} + I_{22}(-V, t) - I_{22}(+V, t) + I_{22}(+V, t-s) e^{\gamma_n V s} \},$$

$$a(V) = \frac{\eta}{2m\psi_n} + \frac{\gamma_n V}{\psi_n}$$

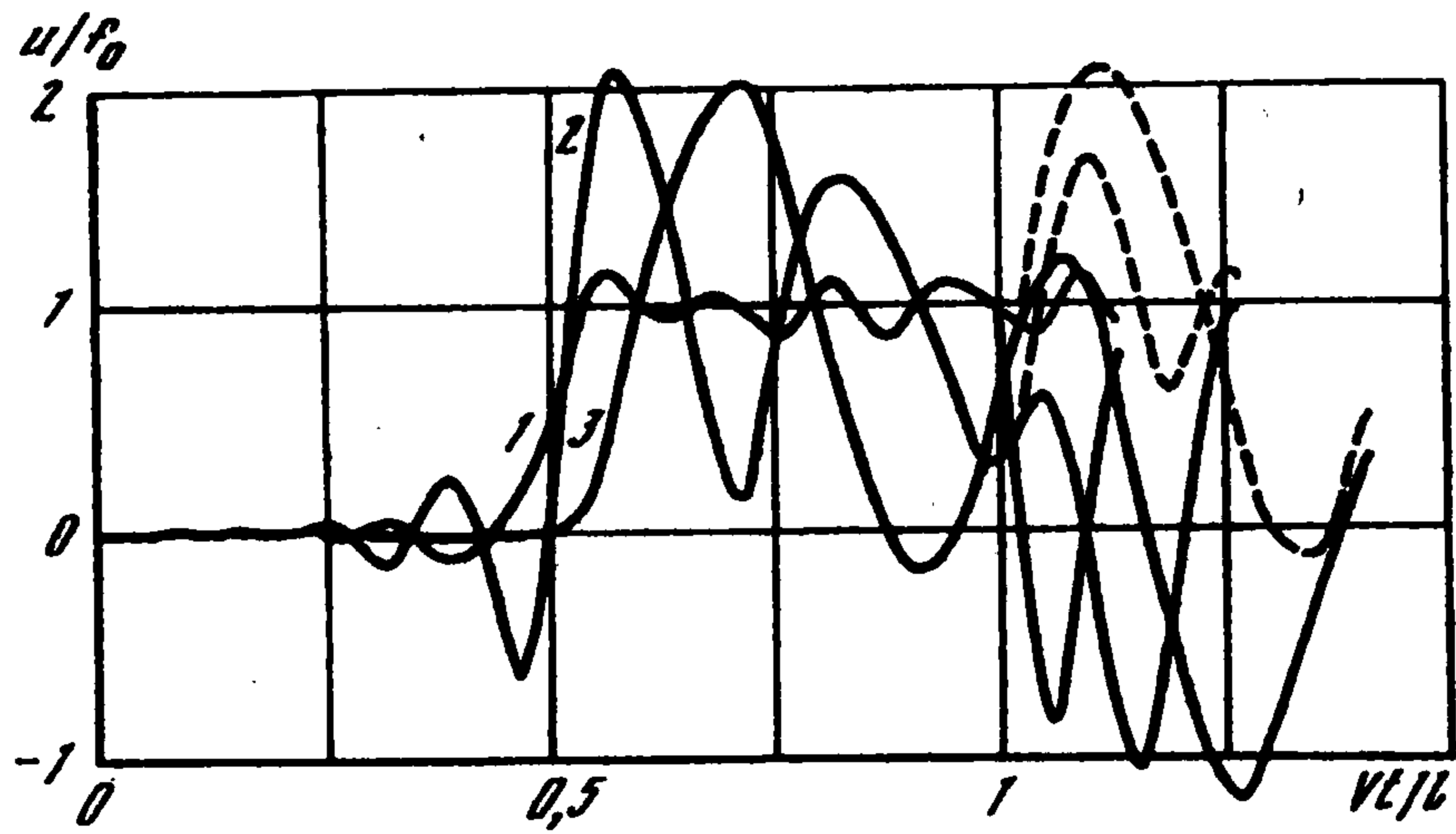
$$I_{22}(V, t) = \frac{\exp[-\eta t / (2m)]}{a^2(V) + 1} [\cos \psi_n t + a(V) \sin \psi_n t]$$

$$I_3(s, t) = \frac{1}{2\psi_n} \{ I_{22}(-V, t-s) e^{-\gamma_n V s} - I_{22}(-V, t) + I_{22}(+V, t-s) e^{\gamma_n V s} - I_{22}(+V, t) \}$$

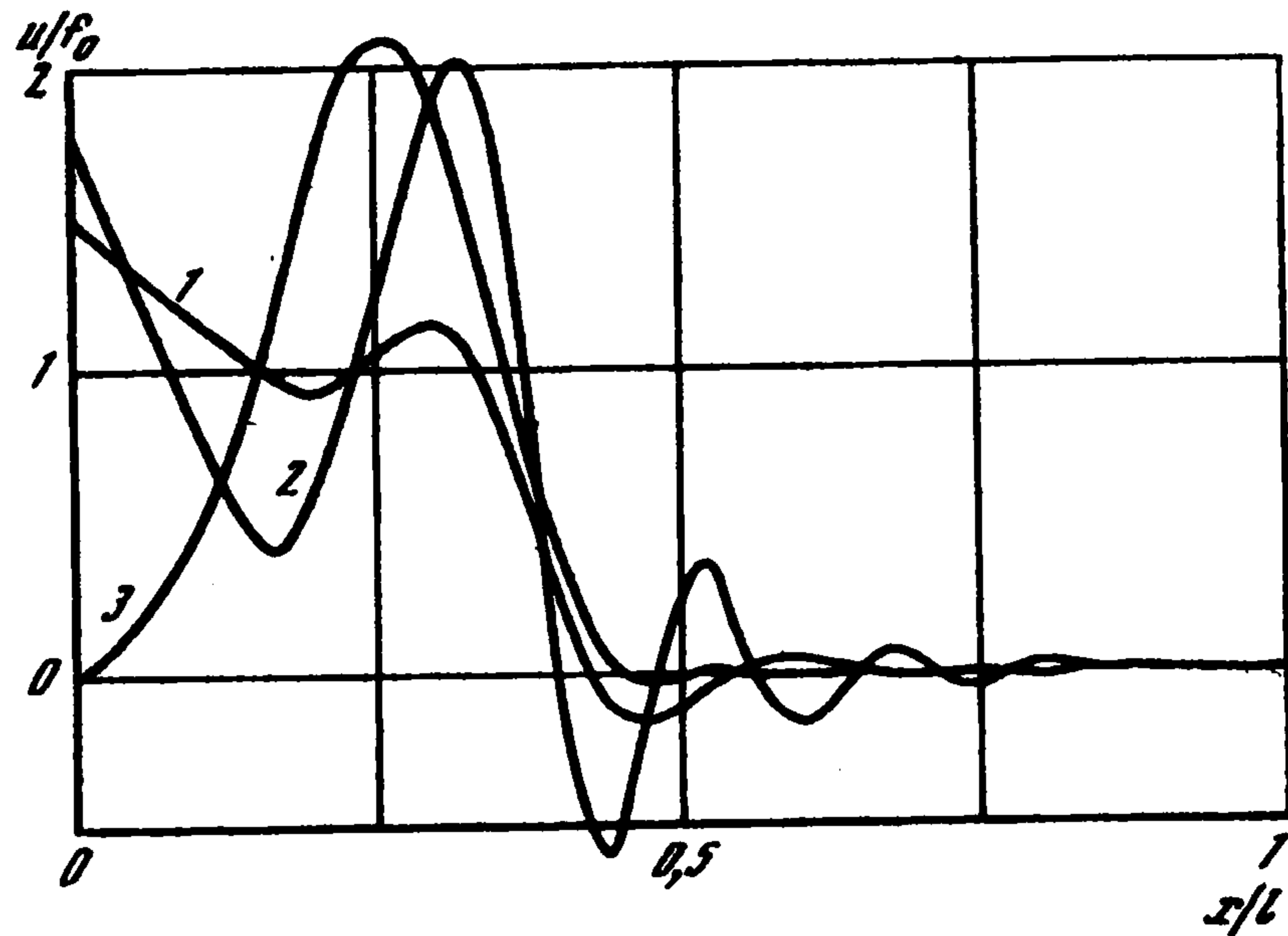
$$I_4^\pm(s, t) = [I^\pm(s, t) \cos \gamma_n V t \pm I^\mp(s, t) \sin \gamma_n V t] / \psi_n$$



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

$$I^{\pm}(s,t) = [c\Phi^{\mp}(s,t) \mp d\Phi^{\pm}(s,t)] / (c^2 + d^2)$$

$$c = 1 + \left(\frac{\eta}{2m\psi_n}\right)^2 - \left(\frac{\gamma_n V}{\psi_n}\right)^2, \quad d = 2 \left(\frac{\eta}{2m\psi_n}\right) \left(\frac{\gamma_n V}{\psi_n}\right)$$

$$\Phi^{\pm}(s,t) = \Psi^{\pm}(t-s) - \Psi^{\pm}(t)$$

$$\Psi^{\pm}(t) = \exp\left(-\frac{\eta t}{2m}\right) + \left[\pm a^{\pm}(t) \cos \psi_n t + \frac{\gamma_n V a^{\mp}(t) \pm (\eta / (2m)) a^{\pm}(t)}{\psi_n} \sin \psi_n t \right]$$

$$a^+(t) = \cos \gamma_n Vt, \quad a^-(t) = \sin \gamma_n Vt$$

Полученное выше аналитическое решение довольно громоздко и можно рассмотреть некоторые частные случаи. Они полезны для тестирования аналитических и численных расчетов более общих задач. Пусть нагрузка однородна $Q_0 = Q_1$. Обозначим соответствующее решение через $u_0(x, t)$ тогда $v_n(t) \equiv 0$ при $n \geq 1$, $v_{02} \equiv 0$ и

$$m\psi_0 v_{01} = A_{01} \cdot l \cdot Q_0 \{\beta_0 I_1(t, t) + (1 - \beta_0) I_1(s, t)\}$$

$$u_0(x, t) = f_0 [U(p) - U(t)]$$

$$U(t) = \left[\cos(\psi_0 t) + \frac{\eta}{2m\psi_0} \sin(\psi_0 t) \right] \exp\left(-\frac{\eta t}{2m}\right)$$

где $p = (1 - \beta_0)(t - s)$; $s = t$ при $t \leq t_*$, $s = t_*$ при $t \geq t_*$; $f_0 = Q_0/k$ – амплитуда упругой волны.

Можно показать, что решение общей задачи, при неоднородной погонной нагрузке ($Q_0 \neq Q_1$), будет к нему стремиться со временем.

В расчетах, если не оговорено противное, брали $V/V_c = 0,73$; $Q_1 = 0$, $\eta = 0$; $EJ/(kl^4) = 1,16 \cdot 10^{-6}$; $mV_c^2/(kl^2) = 2,2 \cdot 10^{-3}$. Вычисления показали, что достаточно использовать 15–20 членов ряда (3.2).

Влияние параметра η , характеризующего внутреннее трение упругой системы, на смещение балки продемонстрировано на фиг. 3. При этом $V/V_c = 0,5$; $\beta_0 = 0$. Зависимость прогиба от продольной координаты x и от времени t представлена соответственно при $Vt/l = (1 + 2 \cdot 10^{-4}V/l)/3$ и для средней части балки ($x = l/2$). Цифрами отмечено значение параметра $\bar{\eta} = \eta/l/mV$: (1) – 0, (2) – 10. При $\bar{\eta} \sim 10$ прогиб u значительно сглаживается, приближаясь к статическому прогибу, когда на достаточном удалении перед источником $u \approx f_1$, а сзади $u \approx f_0$. Усиление осцилляций при $Vt/l \geq 1$ обусловлено снятием нагрузки при слете с нее источника. Если $\bar{\eta}$ порядка единицы, то расчетные кривые близки к прогибам балки без трения ($\eta = 0$).

Фиг. 4, 5 дают представление о прогибе в зависимости от различных режимов движения фронта нагрузки – "дозвуковом" ($V < V_c$), "трансзвуковом" ($V \approx V_c$) и "сверхзвуковом" ($V > V_c$). Кривые 1–3 соответствуют значениям V/V_c , с равным 0,5; 1,0; 1,5.

Фиг. 4 выражает зависимость прогиба от времени. Сплошные линии соответствуют $\beta_0 = 0$, а штриховые – $\beta_0 = 1$.

Распределение прогиба вдоль балки отражено на фиг. 5. Видно, что независимо от режима ускорения максимальный прогиб балки находится сзади фронта нагрузки. С переходом в "сверхзвуковой" режим возрастает амплитуда упругой волны. Она может превосходить величину удвоенного смещения балки при статической нагрузке. Смещения впереди фронта на порядок и более меньше прогибов сзади него. В сверхзвуковом режиме деформации перед источником существенно уменьшаются. Но при этом имеют место интенсивные колебания сзади него. Неограниченного роста амплитуды упругой волны при достижении критической скорости, как предсказывает автомодельное решение, не наблюдается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. Современные концепции, парадоксы и ошибки. М.: Наука, 1987, 352 с.
2. Пономарев С.Д., Бидерман В.Л., Лихарев К.К. и др. Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении. Т. 2. М.: Машгиз, 1952. 863 с.
3. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.

Московская область

Поступила в редакцию
1.VII.1994