

УДК 539.3:534.1

© 1995 г. Н.В. Баничук, А.Ю. Ишлинский

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ И КОЛЕБАНИЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

В развитии исследования, проведенного ранее [1] (см. также [2]), рассматриваются задачи устойчивости и свободных колебаний упругих прямоугольных пластин. Показано, что в пределе не происходит перехода двумерных решений в одномерные "балочные" решения и дана оценка отличия предельных характеристик от соответствующих величин, получаемых в предположении о цилиндрической деформации пластинок.

В задачах упругой устойчивости, вибрации и статического изгиба бесконечно длинных прямоугольных пластин, закрепленных вдоль длинных сторон и нагруженных неизменяющимися по длине усилиями, обычно предполагается, что функция прогибов представляет собой цилиндрическую поверхность. На этом основании решение исходной двумерной задачи заменяется решением одномерной задачи изгиба для узкой поперечной полосы или балки с приведенным модулем Юнга $E' = E/(1 - \nu^2)$, где ν – коэффициент Пуассона. Однако данная замена позволяющая учесть сопротивляемость поперечному поджатию материала при цилиндрическом изгибе, не является вполне строгой и не приводит к адекватному описанию деформирования длинных прямоугольных пластинок. Действительная функция прогибов в направлении длины и ширины имеет кривизны разных знаков, причем отношение этих кривизн на свободных краях пластин остается постоянным при произвольном отношении длины к ширине. Учитывая существенно двумерный характер поведения форм потери устойчивости и колебаний упругих пластин с удаленными свободными краями можно ожидать, что предельные решения двумерных задач при стремлении длины пластинок к бесконечности будут отличаться от "балочных" решений соответствующих одномерных задач. Впервые данная особенность предельного перехода была подмечена [1] в связи с задачами устойчивости упругих прямоугольных пластин.

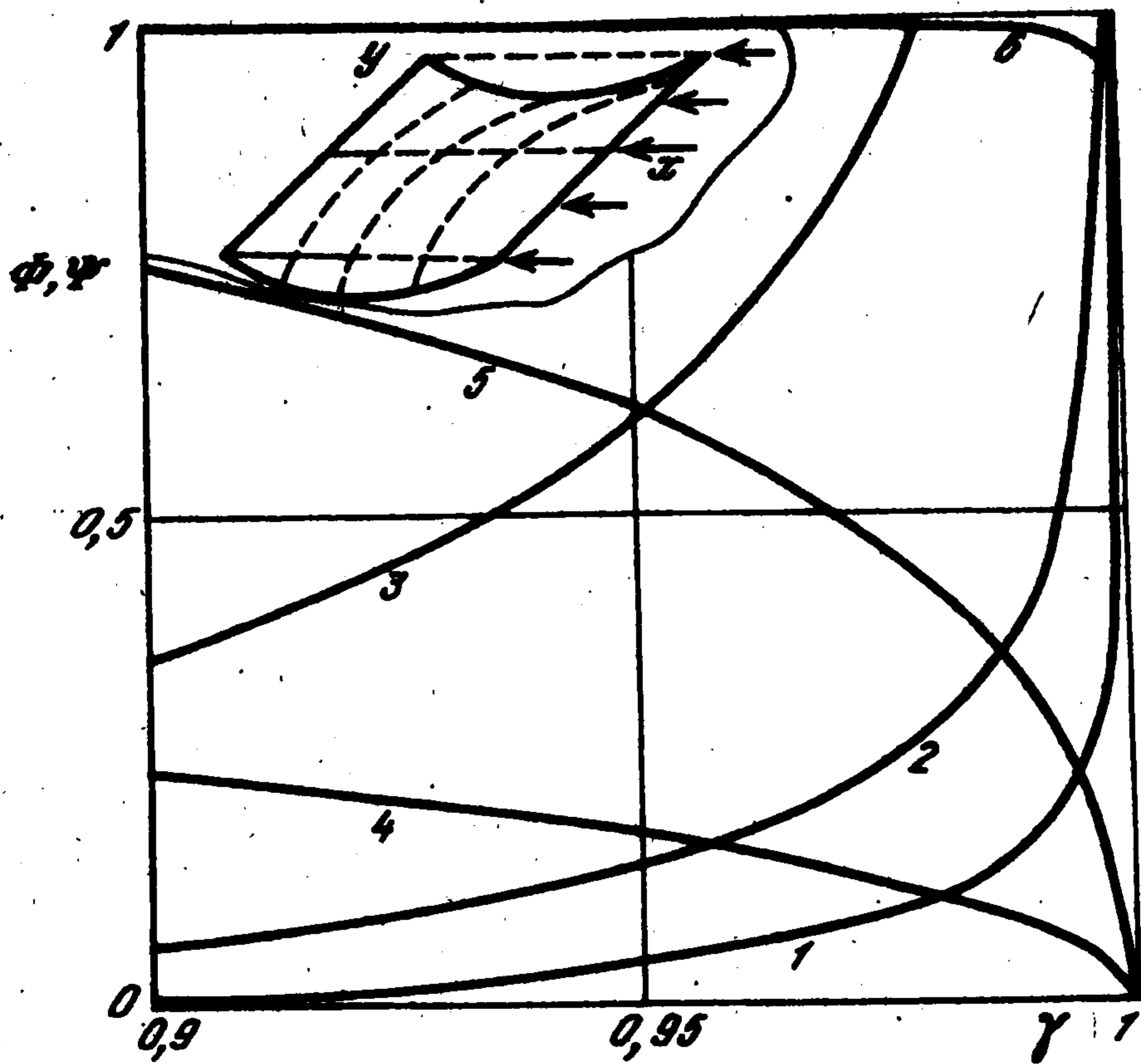
1. Рассмотрим задачу о потере упругой устойчивости прямоугольной пластинки, два противоположных края которой длины $2b$ шарнирно оперты, а два других края протяженностью l свободны (фигура). К шарнирно опертым краям приложены равномерно распределенные сжимающие усилия величины p : Отыскание критической величины нагрузки, при которой пластинка теряет устойчивость и выпучивается, сводится к отысканию минимального собственного значения p и соответствующей ему собственной функции (формы потери устойчивости) $w = w(x, y)$ из решения следующей краевой задачи на собственные значения:

$$D\Delta^2 w + pw_{xx} = 0 \quad (D = Eh^3/[12(1 - \nu^2)]) \quad (1.1)$$

$$w = 0, \quad w_{xx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, l, \quad -b \leq y \leq b \quad (1.2)$$

$$w_{yy} + \nu w_{xx} = 0, \quad w_{yy} + (2 - \nu)w_{xy} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm b, \quad 0 \leq x \leq l \quad (1.3)$$

для уравнения продольного изгиба (1.1) с граничными условиями опирания (1.2) и граничными условиями отсутствия моментов и перерезывающих сил на свободных краях (1.3). Здесь D – цилиндрическая жесткость пластинки, h – толщина.



Следует заметить, что ни для каких конечных значений p и b/l одномерное "цилиндрическое" распределение прогибов $w = \varphi(x)$ не может являться собственной функцией задачи (1.1)–(1.3). Действительно, из краевого условия отсутствия моментов на свободных краях (1.3) $\nu w_{xx} = -w_{yy}$ следует, что $\varphi_{xx} = 0$ при $y = \pm b$ и $0 \leq x \leq l$. При учете краевых условий опирания $\varphi = \varphi_{xx} = 0$ при $x = 0$ и $x = l$ получаем $\varphi(x) \equiv 0$, $0 \leq x \leq l$.

Можно, однако, предположить, что критическая сила потери устойчивости p и соответствующее ей распределение прогибов $w = w(x, y)$ при $l/b \rightarrow 0$ будут сколь угодно мало отличаться от известного одномерного решения

задачи потери устойчивости бесконечно длинной панели с образованием цилиндрической формы выпученной поверхности (C – произвольная отличная от нуля постоянная).

$$p_{cr} = \pi^2 D / l^2, \quad w = C \sin(\pi x / l) \quad (1.4)$$

Для выяснения строгости данного утверждения проведем выкладки лишь незначительно отличающиеся от приведенных в [1, 2]. Распределение прогибов в задаче (1.1)–(1.3) дается выражением

$$w = f(\eta) \sin(\pi x / l), \quad \eta = \pi y / l \quad (1.5)$$

где $f(\eta)$ – собственная функция, отвечающая минимальному собственному значению

$$\mu = \gamma^2 = p l^2 / (\pi^2 D) \quad (1.6)$$

следующей краевой задачи:

$$f'''' - 2f'' + (1 - \mu)f = 0 \quad (1.7)$$

$$f'' - \nu f = 0, \quad f''' - (2 - \nu)f' = 0 \quad \text{при } \eta = \pm \pi b / l \quad (1.8)$$

При $\gamma \leq 1$ симметричное относительно оси x решение (1.5), (1.7) может быть представлено в виде

$$w = (A \operatorname{ch}(\sqrt{1 + \gamma} \eta) + B \operatorname{ch}(\sqrt{1 - \gamma} \eta)) \sin(\pi x / l) \quad (1.9)$$

где A и B – произвольные постоянные. Условие существования нетривиального решения в форме (1.9), как это следует из (1.5), (1.8), (1.9) ($\eta = \pi b / l$) приводит к трансцендентному уравнению [3]

$$\Phi(\gamma, \varepsilon) \equiv \operatorname{th} \frac{\sqrt{1 - \gamma}}{\varepsilon} \operatorname{cth} \frac{\sqrt{1 + \gamma}}{\varepsilon} = \frac{\sqrt{1 + \gamma}}{\sqrt{1 - \gamma}} \frac{(\gamma + \nu - 1)^2}{(\gamma - \nu + 1)^2} \equiv \Psi(\gamma, \nu) \quad (1.10)$$

для определения собственного значения $\mu = \gamma^2$ при различных величинах параметра $\varepsilon = l / (\pi b)$.

Исследуем свойства функций $\Phi(\gamma, \varepsilon)$ и $\Psi(\gamma, \nu)$, при $0 \leq \gamma \leq 1$. Отметим, что диапазон критических значений p , превосходящих эйлерову силу $p_e = \pi^2 D(1 - \nu^2)/l^2$ потери устойчивости закрепленного в шарнирах стержня длины l и не превышающих усилия $p = \pi^2 D/l^2$ выпучивания по цилиндрической форме, соответствует интервалу

$$1 - \nu^2 < \mu = \gamma^2 < 1 \quad (1.11)$$

При возрастании γ от нуля до единицы функция $\Phi(\gamma, \varepsilon)$ непрерывна и монотонно убывает от 1 до 0. Функция $\Psi(\gamma, \nu)$ убывает на интервале $0 < \gamma < 1 - \nu$ от 1 до 0, а на интервале $1 - \nu < \gamma < 1$ монотонно возрастает и принимает сколь угодно большие значения при $\gamma \rightarrow 1$.

Графики функции $\Psi(\gamma, \nu)$ при $\nu = 0,2; 0,3; 0,5$ показаны на фигуре линиями с номерами 1, 2, 3. Линиями с номерами 4, 5, 6 показаны функции $\Phi(\gamma, \varepsilon)$ при $l/h = 10, 1, 0,1$ ($\varepsilon = l/(\pi b)$).

Представляет особый интерес величина $\gamma = \gamma_0 \in [1 - \nu, 1]$, для которой $\Psi(\gamma_0, \nu) = 1$. Разрешая соответствующее уравнение, получим

$$\gamma_0^2 = (1 - \nu)[3\nu - 1 + 2(1 - 2\nu(1 - \nu))^{1/2}] \quad (1.12)$$

Значение γ_0 , найденное ранее в [1], оказывается близким к единице. Для значений коэффициента Пуассона $\nu = 0,2; 0,3; 0,5$ величина $\mu = \gamma_0^2$ будет соответственно равна 0,9994, 0,9962 и 0,9571. В предположении, что $l \geq h$ и велико $\varepsilon = l/(\pi b)$, имеем приближенное равенство

$$\Psi = ((1 - \gamma)/(1 + \gamma))^{1/2}$$

а уравнение (1.10) допускает решение $\gamma_e^2 = 1 - \nu^2$. Данное решение соответствует узкой полосе (стержню), опертой и сжатой на удаленных концах, и приводит к эйлеровому значению силы потери устойчивости

$$p_e = \pi^2 D \gamma_e^2 / l^2 = \pi^2 E h^3 / (12 l^2)$$

Из проведенного рассмотрения и отмеченных свойств функций $\Phi(\gamma, \varepsilon)$, $\Psi(\gamma, \nu)$ следует, что корни уравнения (1.10) при $0 < \varepsilon < \infty$ располагаются в интервале $\gamma_e \leq \gamma < \gamma_0$. В пределе для бесконечно длинных пластин, т.е. при $\varepsilon \rightarrow 0$, имеем $\gamma \rightarrow \gamma_0 \neq 1$, а соответствующая форма потери устойчивости (1.9) не оказывается цилиндрической. Наибольшее отличие величины критической нагрузки, приводящей к потере устойчивости бесконечно длинной пластинки, от соответствующего значения, получаемого в предположении о распределении прогибов по цилиндрической поверхности, достигается при $\nu = 0,5$, т.е. для абсолютно несжимаемого материала.

Исследуем возможность появления при $\gamma \leq 1$ антисимметричных относительно оси x форм выпучивания

$$w = f(\eta) \sin(\pi x/l), \quad f = A \operatorname{sh}(\sqrt{1 + \gamma} \eta) + B \operatorname{sh}(\sqrt{1 - \gamma} \eta) \quad (1.13)$$

Используя выражение (1.13) для f и граничные условия на свободном крае пластинки (1.8) приходим к следующему трансцендентному уравнению для определения величины γ :

$$\Phi(\gamma, \varepsilon) = \Psi^{-1}(\gamma, \nu) \quad (1.14)$$

На рассматриваемом отрезке $0 \leq \gamma \leq 1$ уравнение (1.14) имеет два корня γ_1 ($\gamma_0 < \gamma_1 < 1$) и γ_2 ($\gamma_2 = 1$) при произвольных значениях ν и параметра ε , характеризующего удлинение пластинки. Таким образом, величина $\gamma_2 = 1$, отвечающая критическому значению параметра потери устойчивости в задаче о цилиндрическом изгибе, оказывается собственным значением рассматриваемой задачи потери устойчивости пластинки с конечным отношением длин сторон. Однако соответствующая данному

собственному значению форма потери устойчивости не симметрична, а само собственное значение не является минимальным $\gamma_0 < \gamma_2$ и не представляет собой величину критической нагрузки.

2. Рассмотрим теперь задачу о свободных гармонических поперечных колебаниях прямоугольной пластинки. Считая обозначения и условия закрепления краев пластинки прежними запишем уравнение для амплитудной функции прогибов

$$D\Delta^2 w - \rho h \omega^2 w = 0 \quad (2.1)$$

где ω – частота свободных колебаний. Функцию w будем искать в виде выражения

$$w = f(\eta) \sin(m\pi x/l), \quad \eta = \pi y/l \quad (2.2)$$

удовлетворяющего граничным условиям на шарнирно опертых краях пластинки ($x = 0, l$) и описывающего распределения прогибов с m полуволнами в направлении оси x . При этом функция $f(\eta)$ должна удовлетворять следующему уравнению при $-\beta < \eta < \beta$ ($\beta = \pi b/l$) и условиям на свободных краях:

$$\frac{1}{m^4} f'''' - \frac{2}{m^2} f'' + (1 - \gamma^2) f = 0, \quad \gamma^2 = \frac{\rho h l^4 \omega^2}{m^4 \pi^4 D} \quad (2.3)$$

$$f'' - m^2 \nu f = 0, \quad f''' - (2 - \nu) m^2 f' = 0 \quad \text{при } \eta = \pm \beta \quad (2.4)$$

Симметричное относительно оси x решение уравнения (2.3) при $\gamma^2 \leq 1$ может быть записано в виде

$$f = A \operatorname{ch}(m\eta \sqrt{1 + \gamma}) + B \operatorname{ch}(m\eta \sqrt{1 - \gamma}) \quad (2.5)$$

с произвольными постоянными A и B . Условие существования нетривиального решения вида (2.5), удовлетворяющего краевым соотношениям (2.4), приводит к трансцендентному уравнению, которое сводится к (1.10), если положить $m\beta = 1/\epsilon$. При этом можно воспользоваться отмеченными свойствами решений уравнения $\Phi(\gamma, \epsilon) = \Psi(\gamma, \nu)$. Так при $l/b \rightarrow \infty$, т.е. для $\epsilon = 1/(m\beta) = l/(m\pi b) \rightarrow \infty$, величина $\gamma^2 \rightarrow 1 - \nu^2$ и частота колебаний пластинки асимптотически приближается к соответствующей частоте

$$\omega^2 = \frac{m^4 \pi^4 D}{\rho h l^4} \gamma^2 = \frac{m^4 \pi^4 E I}{\rho h l^4}$$

поперечных колебаний шарнирно закрепленной по краям балки. При уменьшении отношения l/b ($\epsilon \rightarrow 0$) величина γ^2 стремится к значению γ_0^2 , определяемому по формуле (1.12).

Отметим, что предельное значение $\gamma = \gamma_0$ не зависит от числа полуволн m у рассматриваемой моды колебаний пластинки. Таким образом, при $l/b \rightarrow 0$ не происходит стремления частоты симметричных колебаний пластинки к частотам, получаемым из решения одномерной задачи в предположении о цилиндрической форме моды колебаний.

Рассмотрим поведение несимметричных относительно оси решений уравнения (2.3)

$$f = A \operatorname{sh}(m\eta \sqrt{1 + \gamma}) + B \operatorname{sh}(m\eta \sqrt{1 - \gamma}) \quad (2.6)$$

отвечающих предположению $\gamma^2 \leq 1$. В данном случае нетривиальные решения вида (2.6), удовлетворяющие краевым условиям (2.4), возможны, если γ – корень уравнения, которое приводится к виду, совпадающему с (1.14), если положить $m\beta = 1/\epsilon$. Отсюда при учете исследованных свойств функций Φ и Ψ и представленных на фигуре графических данных приходим к заключению о существовании двух корней γ_1 и γ_2 у уравнения (1.14), причем $\gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 = 1$. Здесь также следует отметить, что при свободных колебаниях с любым числом полуволн m величина $\gamma_2 = 1$ определяет

частоты несимметричных мод, совпадающие с частотами симметричных колебаний, которые в предположении о цилиндрической форме распределений прогибов находятся из решения одномерных задач.

Отыскание симметричных и антисимметричных собственных форм и соответствующих собственных частот свободных колебаний при $\gamma^2 > 1$ сводится к нахождению нетривиальных решений уравнения (2.3) вида

$$f = A \operatorname{ch}(m\eta \sqrt{\gamma + 1}) + B \cos(m\eta \sqrt{\gamma - 1}) \quad (2.7)$$

$$f = C \operatorname{sh}(m\eta \sqrt{\gamma + 1}) + K \sin(m\eta \sqrt{\gamma - 1})$$

где A, B, C, K – произвольные постоянные. Значения γ , обеспечивающие существование нетривиальных решений в форме (2.7) являются, соответственно, корнями уравнений

$$\Lambda(\gamma, \varepsilon) = -\Psi(\gamma, \nu), \quad \Lambda(\gamma, \varepsilon) = \Psi^{-1}(\gamma, \nu) \quad (2.8)$$

$$\Lambda \equiv \operatorname{tg}(\sqrt{\gamma - 1} / \varepsilon) \operatorname{cth}(\sqrt{\gamma + 1} / \varepsilon)$$

Из уравнений (2.8) находится множество корней γ и соответствующих им частот ω в случае $\gamma > 1$.

3. Из проведенных рассмотрений вытекает, что подмеченная в [1] особенность предельного перехода в задаче упругой устойчивости пластин со свободными краями характерна также и для динамических задач о собственных колебаниях пластин с аналогичными граничными условиями. При этом предельное отличие решения двумерной задачи от соответствующего одномерного "цилиндрического" решения по величине первого собственного значения (силе потери устойчивости и фундаментальной частоте) нарастает с увеличением коэффициента Пуассона и максимально для пластинки из несжимаемого материала. Такое же различие в величинах собственных значений имеет место и для высших симметричных мод колебаний и форм потери устойчивости, причем величина относительного расхождения рассматриваемых собственных значений не зависит от числа полуволи в направлении незакрепленных сторон пластинки.

Представляет интерес поведение несимметричных мод колебаний и несимметричных равновесных форм продольного изгиба пластинки. Так, низшее собственное значение, отвечающее несимметричной форме выпучивания в задаче устойчивости, оказывается незначительно превосходящим критическую силу потери устойчивости пластинки. Следующее по величине собственное значение $\gamma^2 = 1$, отвечающее несимметричным формам задачи упругой устойчивости, оказывается совпадающим со значением критической силы потери устойчивости в соответствующей одномерной задаче выпучивания по цилиндрической поверхности.

Спектр собственных значений и собственных частот несимметричных колебаний обладает аналогичными особенностями. В частности, собственным частотам симметричных "цилиндрических" колебаний соответствуют несимметричные колебания с $\gamma = 1$.

С математической точки зрения появление особенностей тесно связано с асимптотическими свойствами решения для длинных пластин со свободными краями. Особенности предельного перехода при $l/h \rightarrow 0$ заключаются в том, что он проводится для уравнения с малым параметром при старшей производной, исследование которого связано с рассмотрением погранслойных решений. В этом направлении обсуждаемые в данной работе задачи представляют определенный интерес как пример задач этого рода, допускающих аналитическое решение.

Можно предположить, что отмеченные особенности предельного поведения решений задач устойчивости и колебаний упругих пластин связаны с характерными "неточностями" использованной "классической" теории пластин. Однако здесь следует отметить, что выявленные расхождения, как это следует из проведенных выкладок,

обусловлены не комбинированным граничным условием Кирхгофа для перерезывающей силы, а условием равенства нулю изгибающего момента. Именно условие отсутствия на свободном крае пластинки изгибающего момента запрещает появление собственных функций в виде цилиндрических поверхностей.

Относительно применимости принципа Сен-Венана к проведенным в данной заметке рассмотрениям и кажущегося парадокса заметим следующее. Цилиндрические одномерные решения задач упругой устойчивости пластин-панелей характеризуются ненулевыми изгибающими моментами на бесконечно удаленных кромках. Приведенные же неоднородные решения для удлиненных прямоугольных пластин удовлетворяют условию равенства нулю изгибающего момента на свободных кромках для любых удлинений пластинки и как бы несут на бесконечность нулевую результирующую. Поэтому указанные решения не относятся к одному и тому же классу решений со статически эквивалентными результирующими силовыми характеристиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ишлинский А.Ю.* Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин // Докл. АН СССР, 1954. Т. 95. № 3. С. 477–479.
2. *Ишлинский А.Ю.* Прикладные задачи механики. Кн. 2. М.: Наука, 1986. 416 с.
3. *Доннелл Л.Г.* Балки, пластины и оболочки. М.: Наука. 1982. 567 с.

Москва

Поступила в редакцию
25.VIII.1994