ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 59, Вып. 4, 1995

УДК 539.3

© 1995 г. В.Я. Терещенко

О ФОРМУЛИРОВКЕ ВАРИАЦИОННОГО МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, УЛУЧШАЮЩЕЙ ТОЧНОСТЬ АППРОКСИМАЦИИ

Рассматривается формулировка, использующая множители Лагранжа для "сглаживания" разрывов аппроксимации поля напряжений на стыках граничных элементов, по сути соответствующая гибридным формулировкам МКЭ [1, 2]. Анализируется уточнение апостериорной оценки погрешности аппроксимаций.

Известно [1, 2], что источником погрешности конечноэлементных аппроксимаций являются: межэлементная несогласованность поля перемещений и нарушение условий равновесия узловых сил, статически эквивалентных напряжениям на границах элементов. Сказанное в равной степени относится и к гранично-элементным аппроксимациям (ГЭА) вариационного метода граничных элементов (ВМГЭ) [3–7]. При согласованной ГЭА перемещений и связанной аппроксимации напряжений (последняя является производной от аппроксимации перемещений) возможны разрывы поля напряжений на стыках граничных элементов.

Например, при линейной аппроксимации перемещений в точках криволинейной границы поле напряжений, будучи постоянным в пределах каждого элемента, имеет скачки на границах элементов (пропорциональные значениям направляющих косинусов нормали в точках линейных элементов) и при реализации алгоритма ВМГЭ [6]; по сути речь идет о приближении непрерывной функции (заданного поля напряжений) функцией кусочно-постоянной (искомым полем напряжений). Очевидно, желаемая точность такого приближения может быть достигнута за счет достаточного измельчения разбиения дискретной границы, что приводит к повышению порядка системы разрешающих уравнений.

Изложенное обосновывает предлагаемый ниже алгоритм двойственности уточнения связанной ГЭА поля напряжений, в результате реализации которого удовлетворяются интегрально (как уравнения связей при помощи множителей Лагранжа) условия равновесия нормальных напряжений на стыках элементов и как результат улучшается точность аппроксимации, что устанавливается ниже (разд. 3, 4).

1. Пусть $S_\Delta = U\Delta s_n$ $(n = 1,\ldots, N)$ – дискретная граница (Δs_n – граничный элемент (ГЭ)), аппроксимирующая границу S области $G \subset E_m$ $(m = 2, 3)$, которая может иметь бесконечно удаленные точки; предполагается, что S_Δ – граница непрерывная "по Липшицу" [1]. Согласно алгоритму ВМГЭ [6] рассмотрим аппроксимирующую вариационную задачу для граничного функционала (ГФ)

$$\min_{\mathbf{u}\in D_\Delta} F_\Delta(\mathbf{u}), \quad F_\Delta = \int\limits_{S_\Delta} \mathbf{ut}^{(\boldsymbol{\nu}_\Delta)}(\mathbf{u})ds_\Delta - 2\int\limits_{S_\Delta} \mathbf{ug}^{(\boldsymbol{\nu}_\Delta)}ds_\Delta \tag{1.1}$$

где $\mathbf{g}^{(\boldsymbol{\nu}_\Delta)}$, $\mathbf{t}^{(\boldsymbol{\nu}_\Delta)}$ – векторы заданных и искомых напряжений в точках S_Δ по направлению внешней нормали $\boldsymbol{\nu}_\Delta$; множество D_Δ кинематически допустимых вектор-функций перемещений $\mathbf{u}(x)$, $x \in G_\Delta$ аппроксимируется [6] дискретными граничными потенциалами, удовлетворяющими уравнению Ламе (и условиям регулярности на бесконечности, если область G_Δ имеет бесконечно удаленные точки).

Задача (1.1) разрешима, так как разрешима [8] с точностью до произвольного жесткого перемещения эквивалентная ей вторая задача теории упругости в области G_Δ с границей S_Δ [6].

При известных условиях однозначности решения [8]

$$\int_{G_\Delta} \mathbf{u} dG_\Delta = 0, \quad \int_{G_\Delta} \mathrm{rot}\, \mathbf{u} dG_\Delta = 0 \tag{1.2}$$

исключающих такое перемещение, следует [6]

$$\min_{\mathbf{u}\in D_\Delta} F_\Delta(\mathbf{u}) = F_\Delta(\mathbf{u}_0) = d_0 = -\int_{S_\Delta} \mathbf{u}_0 \mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}(\mathbf{u}_0) dS_\Delta \tag{1.3}$$

и минимизирующий элемент $\mathbf{u}_0$ удовлетворяет вариационному уравнению

$$\int_{S_\Delta} \mathbf{v}\mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}(\mathbf{u}_0) dS_\Delta - \int_{S_\Delta} \mathbf{v}\mathbf{g}^{(\nu_\Delta)} dS_\Delta = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in D_\Delta \tag{1.4}$$

Отметим, что приведенные далее построения предполагаются математически корректными в том смысле, что удовлетворяются условия теоремы о следах (в терминах пространств $W_2^{\pm 1/2}(S_\Delta)$) для функций из соболевского класса $W_2^1(G_\Delta)$, которому принадлежат решения вариационных задач, эквивалентных эллиптическим краевым задачам второго порядка.

2. Пусть $s_{nn'}$ – общая граница смежных ГЭ Δs_n и $\Delta s_{n'}$ (n, $n' = 1,\ldots, N$) и $\mathbf{t}_n$, $\mathbf{t}_{n'}$ – значения вектора $\mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}$ (в дальнейшем индекс ν_Δ опускается) в точках $s_{nn'}$, согласованные с ГЭА поля напряжений в точках Δs_n, $\Delta s_{n'}$.

Определим множество Λ_Δ множителей Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}$ в виде достаточно гладких вектор-функций, определенных в точках S_Δ, и таких, что для числовой функции

$$f(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{n=1}^{N} \int_{s_{nn'}} \boldsymbol{\lambda}[\mathbf{t}_n(\mathbf{u}) - \mathbf{t}_{n'}(\mathbf{u})] ds_{nn'}$$

имеет место следующее свойство:

$$\sup_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda_\Delta} f = \begin{cases} 0, & \mathbf{t}_n(\mathbf{u}) = \mathbf{t}_{n'}(\mathbf{u}) \quad \forall n \\ +\infty, & \mathbf{t}_n(\mathbf{u}) \neq \mathbf{t}_{n'}(\mathbf{u}) \quad \forall n \end{cases} \tag{2.1}$$

Указанное свойство устанавливается непосредственной проверкой (см., например, [9]) и функция f используется для построения лагранжиана

$$L_\Delta(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = F_\Delta(\mathbf{u}) - 2f(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \tag{2.2}$$

Интерпретация множителей Лагранжа следует из физического смысла слагаемых, входящих в функционал L_Δ: каждое слагаемое имеет смысл работы, совершаемой искомыми и заданными поверхностными напряжениями на перемещениях, в частности, второе слагаемое – работа скачков напряжений на стыках смежных ГЭ.

Эквивалентность задачи

$$\min\nolimits_{\mathbf{u}\in D_\Delta} \max\nolimits_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda_\Delta} L_\Delta(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$$

(при условии, что нижняя грань по $\mathbf{u}$ и верхняя грань по $\boldsymbol{\lambda}$ достигаются) исходной задаче (1.1) устанавливается аналогично [7]: если $\mathbf{t}_n(\mathbf{u}) = \mathbf{t}_{n'}(\mathbf{u})$, что означает непрерывность поля напряжений в точках S_Δ, то $\max_{\boldsymbol{\lambda}} f = 0$ (см. (2.1)) и $\min_{\mathbf{u}}\max_{\boldsymbol{\lambda}} L_\Delta = \min_{\mathbf{u}} F_\Delta(\mathbf{u}) = d_0$ (см. (1.3)).

Двойственная задача

$$\max\nolimits_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda_\Delta} \min\nolimits_{\mathbf{u}\in D_\Delta} L_\Delta(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$$

имеет смысл, если

$$\min_{\mathbf{u}\in D_\Delta} \max_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda_\Delta} L_\Delta = \max_{\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda_\Delta} \min_{\mathbf{u}\in D_\Delta} L_\Delta = d_0 \tag{2.3}$$

Докажем правую часть равенства (2.3). Пусть $\boldsymbol{\lambda}$ фиксированы, тогда решение $\mathbf{u}_\lambda = \mathbf{u}(\boldsymbol{\lambda})$ задачи $\min_\mathbf{u} L_\Delta(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$ определяется из уравнения ($\forall \mathbf{v} \in D_\Delta$)

$$\mathbf{grad}_\mathbf{u} L_\Delta = \mathbf{grad}_\mathbf{u} F_\Delta(\mathbf{u}_\lambda) - 2f(\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \tag{2.4}$$

Отсюда при $\mathbf{v} = \mathbf{u}_\lambda$, используя (2.2), получаем значение функционала L_Δ на решении $\mathbf{u}_\lambda$ (при фиксированном множителе $\boldsymbol{\lambda}$)

$$\min_\mathbf{u} L_\Delta = L_\Delta(\mathbf{u}_\lambda, \boldsymbol{\lambda}) = -f(\mathbf{u}_\lambda, \boldsymbol{\lambda}) - \int_{S_\Delta} \mathbf{u}_\lambda \mathbf{g}^{(\nu_\Delta)} dS_\Delta \tag{2.5}$$

Тогда двойственная задача приводится к задаче

$$\max_\lambda L_\Delta(\mathbf{u}_\lambda, \boldsymbol{\lambda}) = -\min_\lambda[-L_\Delta(\mathbf{u}_\lambda, \boldsymbol{\lambda})] \tag{2.6}$$

Далее используется второе условие, определяющее седловую точку лагранжиана L_Δ (первым условием является условие (2.4)):

$$\mathbf{grad}_\lambda L_\Delta(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = 2f(\mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\mu} \in \Lambda_\Delta \tag{2.7}$$

Отсюда при $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\lambda}$ и $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\lambda$ следует $f(\mathbf{u}_\lambda, \boldsymbol{\lambda}) = 0$, и из (2.5) получаем

$$-L_\Delta(\mathbf{u}_\lambda, \boldsymbol{\lambda}) = \int_{S_\Delta} \mathbf{u}_\lambda \mathbf{g}^{(\nu_\Delta)} ds_\Delta \quad \forall \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_\Delta$$

Тогда при $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0$ и $\mathbf{u}_{\lambda_0} = \mathbf{u}_0$ из (2.6) и (1.4) при $\mathbf{v} = \mathbf{u}_0$ следует (см. (1.3))

$$\max_\lambda \min_\mathbf{u} L_\Delta = -\int_{S_\Delta} \mathbf{u}_0 \mathbf{g}^{(\nu_\Delta)} ds_\Delta = -\int_{S_\Delta} \mathbf{u}_0 \mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}(\mathbf{u}_0) ds_\Delta = d_0$$

что доказывает соотношение двойственности (2.3), из которого следует существование седловой точки $(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\lambda}_0)$ лагранжиана (2.2) и двусторонняя оценка значения функционала на точном решении

$$L_\Delta(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\lambda}) \leqslant L_\Delta(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\lambda}_0) = F_\Delta(\mathbf{u}_0) \leqslant L_\Delta(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}_0) \quad \forall \mathbf{u} \in D_\Delta, \quad \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_\Delta \tag{2.8}$$

Это условие реализуется при решении системы вариационных уравнений (2.4), (2.7).

Прежде чем переходить к аппроксимациям и дискретной задаче отметим, что установленная выше эквивалентность исходной задачи и задачи, преобразованной методом множителей Лагранжа, приводит к одному и тому же решению как точному, так и приближенному, которое может быть построено с различной точностью. В дальнейшем будет показано, что алгоритм двойственности, основанный на теореме эквивалентности, позволяет уточнить приближенное решение.

3. Перейдем к дискретной задаче для уравнений (2.4), (2.7), которая соответствует по сути решению двойственной задачи поиска седловой точки $L_\Delta(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$. Рассмотрим случай легко реализуемой численно линейной (билинейной при $m = 3$) изопараметрической ГЭА границы S_Δ и приближенного решения $(\mathbf{u}_N, \boldsymbol{\lambda}_N)$. Пусть

$$y_\Delta = \Sigma_n \Sigma_k \mathbf{Y}_{nk} \psi_k, \quad k = 1, \ldots, K; \quad n = 1, \ldots, N$$

– параметрическое уравнение S_Δ, где $\mathbf{Y}_{nk}$ – m-мерный вектор глобальных координат узлов разбиения S_Δ;

$$\mathbf{u}_N = \Sigma_n \Sigma_k \mathbf{U}_{nk} \psi_k, \quad \boldsymbol{\lambda}_N = \Sigma_n \Sigma_k \boldsymbol{\Lambda}_{nk} \psi_k \tag{3.1}$$

– глобальные интерполяционные функции для непрерывного в точках S_Δ поля перемещений, где $\mathbf{U}_{nk}$, $\boldsymbol{\Lambda}_{nk}$ – m-мерные векторы узловых значений приближенного решения, $\psi_k(\eta)$ – линейные (билинейные при $m = 3$) базисные функции МГЭ [10] и $y_n(\eta)$ – связь глобальных и локальных координат в точках $\Delta s_{\eta = 1,\ldots,N}$.

Дискретные аналоги уравнений (2.4), (2.7) на аппроксимациях (3.1) соответствуют уравнениям

$$\mathbf{grad}_{U_{nk}} L_\Delta(\mathbf{u}_N, \boldsymbol{\lambda}_N) = 0, \quad \mathbf{grad}_{\Lambda_{nk}} L_\Delta(\mathbf{u}_N, \boldsymbol{\lambda}_N) = 0$$

и при ансамблировании матрицы системы дискретных уравнений по элементам Δs_n записываются в виде

$$\sum_{n,n'\in\{N\}} \left\{ \sum_{\{n'\}} \mathbf{U}_{n'l} c_{kl}^{n'} - \sum_{\{n'\}} \mathbf{Q}_{n'l} g_{kl}^{n'} - \boldsymbol{\Lambda}_{nk} \sum_{\{n'\}} (\bar{c}_{kl}^{n} - \bar{c}_{kl}^{n'}) \right\} = 0 \tag{3.2}$$

$$\sum_{n,n'\in\{N\}} \left\{ \sum_{\{n'\}} (\mathbf{U}_{nl} \bar{c}_{kl}^{n} - \mathbf{U}_{n'l} \bar{c}_{kl}^{n'}) \right\} = 0 \tag{3.3}$$

Здесь $\{n'\}$ – множество смежных ГЭ, для которых узел $k \in \Delta s_n$ является общим; вклады смежных ГЭ, зависящие от искомого поля напряжений и заданного поля, интерполянт которого представляется в виде $\mathbf{g}_n^{(\nu_n)} = \sum \mathbf{Q}_{nk}\psi_k \quad (k = 1,\ldots,K)$, определяются так:

$$c_{kl}^{n'} = \int_{\Delta s_{n'}} \psi_k T_{n'} \psi_l |J_n| ds_{n'}(\eta), \quad g_{kl}^{n'} = \int_{\Delta s_{n'}} \psi_k \psi_l |J_{n'}| ds_{n'}(\eta)$$

где T_n – скалярный оператор, соответствующий [6] аппроксимации $\mathbf{t}^{(\nu_n)}(\mathbf{u}_n)$, а $|J_n|$ – якобиан преобразования $y_n(\eta)$; $\bar{c}_{kl}^{n'}$ – значения вкладов $c_{kl}^{n'}$ при фиксированных координатах η на границах $\Delta s_{n'}$. При билинейной ГЭА: $s_{nn'}$ – линия, интеграл по $s_{nn'}$ соответствует интегралу по η_i, $i = 1, 2$ (при фиксированной η_j, $j = 1, 2$) и $\bar{T}_{n'}$ – след оператора $T_{n'}$ на $s_{nn'}$; при линейной ГЭА: $s_{nn'}$ – узловая точка k (общий узел смежных ГЭ) и $\bar{c}_{kl}^{n'} = \psi_k \bar{T}_{n'} \psi_l$, где $\psi_k = 1$ и $\eta = \pm 1$.

При линейной ГЭА для узлов $k, l = 1, 2$ n-го ГЭ слагаемые в фигурных скобках в (3.2) запишутся в виде ($\{n'\} = \{n-1, n+1\}$)

$$\left\{ \left[\mathbf{U}_{(n-1)2} c_{21}^{n-1} + \mathbf{U}_{(n+1)1} c_{12}^{n+1} \right] - \left[\mathbf{Q}_{(n-1)2} g_{21}^{n-1} + \mathbf{Q}_{(n+1)1} g_{12}^{n+1} \right] - \right.$$
$$\left. - \left[\boldsymbol{\Lambda}_{n1} (\bar{c}_{12}^{n} - \bar{c}_{21}^{n-1}) + \boldsymbol{\Lambda}_{n2} (\bar{c}_{21}^{n} - \bar{c}_{12}^{n+1}) \right] \right\}$$

Соответственно сумма $\Sigma_{n'}$, входящая в (3.3), запишется в виде

$$\{ (\mathbf{U}_{n1} \bar{c}_{12}^{n} - \mathbf{U}_{(n-1)2} \bar{c}_{21}^{n-1}) + (\mathbf{U}_{n2} \bar{c}_{21}^{n} - \mathbf{U}_{(n+1)1} \bar{c}_{12}^{n+1}) \}$$

Далее используются условия согласованности для узловых значений перемещений $\mathbf{U}_{n1} = \mathbf{U}_{(n-1)2}$, $\mathbf{U}_{n2} = \mathbf{U}_{(n+1)1}$; затем производится суммирование по n в (3.2), (3.3). Формирование системы граничных уравнений при билинейной ГЭА усложняется.

Алгоритм реализации решения системы (3.2), (3.3) следующий: из (3.2) определяются узловые значения $\mathbf{U}_{n'l}$ в зависимости от $\mathbf{Q}_{n'l}$, $\boldsymbol{\Lambda}_{nk}$ ($\mathbf{Q}_{n'l}$ – заданные узловые значения), затем из (3.3) при условии $\mathbf{U}_{nl} = \mathbf{U}_{n'l}$ $\forall n \in \{N\}$ (условие непрерывности поля перемещений в точках S_Δ) определяются значения $\boldsymbol{\Lambda}_{nk}$.

Уточним, в каком смысле понимается улучшение аппроксимации решения в результате реализации изложенного алгоритма двойственности. При каждом фиксированном $\boldsymbol{\lambda}$ решение состоит (это следует из уравнения (2.4) или из его дискретного аналога (3.2)) из суммы $\mathbf{u}_{Ng} + \mathbf{u}_{N\lambda}$, где $\mathbf{u}_{Ng}$ – решение "по Ритцу" задачи (1.1), а $\mathbf{u}_{N\lambda}$ – решение задачи для функционала (см. (2.2))

$$L_\Delta^*(\mathbf{u}) = \int_{S_\Delta} \mathbf{u}\mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}(\mathbf{u}) ds_\Delta - 2f(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$$

на множестве D_Δ, где $\boldsymbol{\lambda}$ может рассматриваться как заданное в точках S_Δ поле перемещений. Очевидно, $\mathbf{u}_{N\lambda} \to 0$ при $N \to \infty$, так как при измельчении разбиения S_Δ на Δs_n скачки напряжений на стыках элементов "сглаживаются", тогда функция скачков $f(\mathbf{u}_N, \boldsymbol{\lambda}) \to 0$ (см. ниже) и в пределе получаем $\mathbf{u}_{N\lambda} = 0$.

Это следует из условия $\mathbf{grad}_{\mathbf{u}} L^*_\Delta(\mathbf{u}_{N\lambda}) = 0$ (при $f(\mathbf{u}_N, \boldsymbol{\lambda}) \to 0$), которое записывается в виде $\int\limits_{S_\Delta} \mathbf{v}\mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}(\mathbf{u}_{N\lambda}) ds_\Delta = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in D_\Delta$

Отсюда получаем $\mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}(\mathbf{u}_{N\lambda}) = 0$, следовательно $\mathbf{u}_{N\lambda}|_{S_\Delta} = c'$, где c – постоянная. Пусть решение $\overline{\mathbf{u}}_{N\lambda}(x) = c$ для $x \in \overline{G}_\Delta$ (при этом $\overline{\mathbf{u}}_{N\lambda} \in D_\Delta$ (см. (1.1)), так как удовлетворяется уравнение Ламе). Тогда постоянная, удовлетворяющая (1.2) (этим условиям должна удовлетворять сумма $\mathbf{u}_{Ng} + \mathbf{u}_{N\lambda}$, а значит, и каждое слагаемое в отдельности), тождественно равна нулю.

Соответственно при $N \to \infty$ имеет место $\mathbf{u}_{Ng} \to \mathbf{u}_0$ [5, 6], где $\mathbf{u}_0$ – точное решение (см. (1.3)); в итоге при $N \to \infty$ получаем $(\mathbf{u}_{Ng} + \mathbf{u}_{N\lambda}) \to \mathbf{u}_0$. Таким образом, $\mathbf{u}_{N\lambda}$ может рассматриваться как поправка к решению $\mathbf{u}_{Ng}$, связанная со "сглаживанием" разрывов поля напряжений на стыках ГЭ. То, что указанная поправка уточняет приближенное решение (улучшает аппроксимацию), подтверждается ниже уточнением апостериорной оценки погрешности по сравнению с оценкой, полученной [6] в формулировке ВМГЭ, не учитывающей скачки напряжений на стыках ГЭ. Напомним, что оценка уточняется, если при фиксированном разбиении (т.е. при фиксированном N) правая часть оценки уменьшается.

4. Норма в пространстве $W_2^{1/2}(S_\Delta)$ (или $L_2(S_\Delta)$) разности $\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_N$ оценивается [6] через разность значений функционалов прямой и двойственной задач на приближенном решении их

$$0 < \delta_{1N} \equiv \frac{1}{2}[F_\Delta(\mathbf{u}_N) - \Phi_\Delta(\mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}(\mathbf{u}_N))] = \int\limits_{S_\Delta} \mathbf{u}_N \mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}(\mathbf{u}_N) ds_\Delta - \int\limits_{S_\Delta} \mathbf{u}_N \mathbf{g}^{(\nu_\Delta)} ds_\Delta \tag{4.1}$$

Аналогично указанная норма разности может быть оценена [7] на основании оценки (2.8) через разность функционалов

$$0 < \delta_{2N} \equiv [L_\Delta(\mathbf{u}_N, \boldsymbol{\lambda}_0) - L_\Delta(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\lambda}_N)] =$$

$$= -\int\limits_{S_\Delta} \mathbf{u}_N \mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}(\mathbf{u}_N) ds_\Delta + \int\limits_{S_\Delta} \mathbf{u}_N \mathbf{g}^{(\nu_\Delta)} ds_\Delta + f(\mathbf{u}_N, \boldsymbol{\lambda}_N) \tag{4.2}$$

При этом значения $L_\Delta(\mathbf{u}_N, \boldsymbol{\lambda}_0)$ и $L_\Delta(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\lambda}_N)$ определяются из (2.4) и (2.2) при $\mathbf{u} = \mathbf{u}_N$, $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0$ и при $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$, $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_N$.

Складывая и вычитая соответственно левые и правые части равенств (4.2), (4.1), получим

$$\delta_{2N} + \delta_{1N} = f(\mathbf{u}_N, \boldsymbol{\lambda}_N) > 0 \tag{4.3}$$

$$\delta_{2N} - \delta_{1N} = f(\mathbf{u}_N, \boldsymbol{\lambda}_N) - 2\left[\int\limits_{S_\Delta} \mathbf{u}_N \mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}(\mathbf{u}_N) ds_\Delta - \int\limits_{S_\Delta} \mathbf{u}_N \mathbf{g}^{(\nu_\Delta)} ds_\Delta\right] \tag{4.4}$$

(в частности, (4.3) согласуется с физическим смыслом работы скачков напряжений на аппроксимирующих перемещениях).

Второе слагаемое в (4.4) есть $\mathbf{grad}_{\mathbf{u}} F_\Delta(\mathbf{u}_N)$, и в силу (2.4) при $\mathbf{u}_\lambda = \mathbf{u}_N$ и $\mathbf{v} = \mathbf{u}_N$ имеем

$\mathbf{grad}_{\mathbf{u}} F_\Delta(\mathbf{u}_N) = 2f(\mathbf{u}_N, \boldsymbol{\lambda}_N)$

Тогда из (4.4) получаем в силу (4.3)

$\delta_{2N} - \delta_{1N} = -f(\mathbf{u}_N, \boldsymbol{\lambda}_N) < 0$

Отсюда следует уточнение апостериорной оценки для приближений $\{\mathbf{u}_N\}$:

$$[L_\Delta(\mathbf{u}_N,\boldsymbol{\lambda}_0)-L_\Delta(\mathbf{u}_0,\boldsymbol{\lambda}_N)]<\tfrac{1}{2}[F_\Delta(\mathbf{u}_N)-\Phi_\Delta(\mathbf{t}^{(\nu_\Delta)}(\mathbf{u}_N))]$$

В силу доказанной сходимости [5] $\mathbf{u}_N \to \mathbf{u}_0$ при $N \to \infty$ одновременно из (4.1), (4.2) следует, что рассматриваемые оценки имеют асимптотический характер, т.е. $\delta_{1N}, \delta_{2N} \to 0$ при $N \to \infty$: правая часть равенства (4.1) при $N \to \infty$ стремится к нулю в силу (1.4); правая часть равенства (4.2) стремится к нулю при $N \to \infty$ в силу (1.4) и так как $f(\mathbf{u}_N, \boldsymbol{\lambda}_N) \to 0$ (см. выше). В тоже время сходимость $f(\mathbf{u}_N, \boldsymbol{\lambda}_N) \to 0$ при $N \to \infty$ может быть установлена и аналитически: используя аппарат оценок теоремы о следах и методику [7, 11], можно показать, что $f(\mathbf{u}_N, \boldsymbol{\lambda}_N) \to f(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\lambda}_0) = 0$ при $N \to \infty$.

Таким образом, предложенный алгоритм позволяет уменьшить влияние на точность аппроксимаций МГЭ несогласованности поля напряжений, порожденную связанной аппроксимацией полей перемещений и напряжений.

Альтернативная формулировка ВМГЭ [7], использующая несвязанные аппроксимации поля перемещений и поля напряжений, позволяет реализовать согласованную аппроксимацию поля напряжений (непрерывную в узловых точках). Соответственно для оценки точности таких аппроксимаций рассмотренные выше оценки тождественны [7]. Отметим также, что обсуждаемые здесь апостериорные оценки, полученные на основании соотношений двойственности, подобны оценкам, которые получаются при использовании встречных вариационных методов (по отношению к энергетическому методу), типа метода Трефтца [8, 12].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980. 512 с.
2. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.
3. *Терещенко В.Я.* О некоторых формулировках метода граничных элементов // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 4. С. 616–627.
4. *Терещенко В.Я.* Двойственные формулировки метода граничных элементов. Приложение к задачам теории упругости для неоднородных тел // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 118–125.
5. *Терещенко В.Я.* К вопросу обоснования вариационных формулировок метода граничных элементов // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 2. С. 309–316.
6. *Терещенко В.Я.* Алгоритм реализации и оценки погрешности вариационного метода граничных элементов в задачах теории упругости // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 3. С. 442–451.
7. *Терещенко В.Я.* Двойственные несвязанные формулировки вариационного метода граничных элементов в задачах теории упругости // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 729–736.
8. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
9. *Сеа Ж.* Оптимизация. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1973. 244 с.
10. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
11. *Терещенко В.Я.* Об алгоритме решения задачи Синьорини // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 6. С. 1020–1029.
12. *Терещенко В.Я.* Вариационно-разностная схема реализации алгоритма двойственности в задачах минимизации обобщенных функционалов Трефтца // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1991. Т. 30. № 2. С. 320–324.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
3.XI.1993