УДК 551.466.81:534.1

© 1995 г. Ю.В. Кистович, Ю.Д. Чашечкин

ОТРАЖЕНИЕ ПУЧКОВ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ОТ ПЛОСКОЙ ЖЕСТКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Рассматривается линейная задача отражения пучка монохроматических внутренних волн от наклонной жесткой стенки в экспоненциально стратифицированной жидкости с учетом вязкости и диффузии. В такой среде помимо отраженного волнового пучка на плоскости формируется пограничное течение с расщепленными масштабами пространственной изменчивости скорости и плотности. Вязкость и диффузия ограничивают предельное значение коэффициента геометрического сжатия пучка. Решение не имеет особенностей при критических углах отражения. Проведены расчеты отраженного пучка и пограничного течения для падающего пучка, излученного точечным массовым источником.

Современные модели внутренних волн разрабатываются для заполняющих все пространство плоских волн [1, 2] и пространственно локализованных волновых пучков, являющихся основной формой движения в вязких средах [3, 4].

При отражении волновых пучков в идеальной экспоненциально стратифицированной жидкости амплитуды волн вследствие геометрического сжатия становятся сингулярными на критических углах, когда отраженная волна бежит вдоль наклонного дна [5, 6]. Аналогичные эффекты наблюдаются и при отражении волнового поля сложного частотного состава. В идеальной жидкости без использования традиционного приближения Буссинеска помимо геометрического сжатия происходит искажение пространственного спектра падающей волны [7].

Поскольку закономерности развития неустойчивости в стратифицированных течениях зависят от тонкой структуры профилей скорости и плотности, большой интерес представляет исследование задачи отражения пакетов внутренних волн с учетом вязкости и диффузии. Вследствие эффектов *дисцерсии* (различия коэффициентов молекулярной диффузии и кинематической вязкости) диффузионный и динамический пограничные слои, формирующиеся на отражающей поверхности, могут характеризоваться различными масштабами, как это имеет место в медленном пограничном течении, индуцированном диффузией на наклонной стенке [8], и ламинарном пограничном слое в непрерывно стратифицированной жидкости [9].

1. Общие соотношения для отраженного поля. Пусть в несжимаемой вязкой линейно стратифицированной жидкости под произвольным углом φ к горизонту расположена бесконечная жесткая плоскость, на которую падает пучок монохроматических внутренних волн. С жидкостью связана декартова система координат (x, y, z) с осью z, направленной против ускорения силы тяжести. Рассматривается двумерная задача, для которой все величины не зависят от координаты y. Линеаризованные уравнения гидродинамики в приближении Буссинеска и при наличии диффузии соли можно записать в виде [10]

$$\frac{\partial \upsilon_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\Delta\upsilon_x, \quad \frac{\partial \upsilon_z}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial z} + \nu\Delta\upsilon_z - gs \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon_z}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial s}{\partial t}=D\Delta s+\frac{\upsilon_z}{\Lambda};\quad \rho=\rho_0(1-\frac{z}{\Lambda}+s)$$

Здесь (υ_x, υ_z), P и s – переменные скорость, давление и безразмерная соленость, включающая коэффициент солевого сжатия, ν и D – кинематическая вязкость и коэффициент диффузии соли, g – ускорение силы тяжести, Λ – масштаб стратификации, ρ – полная плотность жидкости.

Исключая из (1.1) все неизвестные, кроме υ_z, и вводя вертикальные смещения частиц в жидкости h формулой $\upsilon_z = \partial h/\partial t$, получим уравнение

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}-D\Delta\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-\nu\Delta\right)\Delta+N^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]h=0 \tag{1.2}$$

Пусть с плоскостью связана декартова система координат (ξ, ζ) с осью ξ, направленной вдоль плоскости и осью ζ, нормальной к ней, так что переход из системы (x, z) и (ξ, ζ) осуществляется по формулам

$$x=\xi\cos\varphi+\zeta\sin\varphi,\quad z=\xi\sin\varphi-\zeta\cos\varphi \tag{1.3}$$

Для монохроматических волн $\partial/\partial t = -i\omega$ (что соответствует временной зависимости вида $\exp(-i\omega t)$, которая везде в дальнейшем опускается), используя трансляционную симметрию задачи вдоль оси ξ, общее решение для отраженного поля можно записать в виде суперпозиции плоских неоднородных волн вида $\exp[i(k_\xi\xi + k_\zeta\zeta)]$ с действительными k_ξ и комплексными k_ζ. В результате получим дисперсионное уравнение, связывающее k_ξ и k_ζ,

$$\left[i\omega-D\left(k_\xi^2+k_\zeta^2\right)\right]\left[i\omega-\nu\left(k_\xi^2+k_\zeta^2\right)\right]\left(k_\xi^2+k_\zeta^2\right)+N^2(k_\xi\cos\varphi+k_\zeta\sin\varphi)^2=0 \tag{1.4}$$

При каждом действительном $k_\xi \equiv k$ уравнение (1.4) имеет шесть решений $k_\zeta = k_j(k)$, причем нумерация их выбирается таким образом, что выполняются неравенства $\mathrm{Im}\,k_3 > \mathrm{Im}\,k_2 > \mathrm{Im}\,k_1 > 0$ и $\mathrm{Im}\,k_6 < \mathrm{Im}\,k_5 < \mathrm{Im}\,k_4 < 0$. Прямое вычисление показывает, что при $k \to 0$ корни уравнения (1.4) образуют две тройки с противоположными знаками мнимых частей. Это утверждение сохраняется и для всех значений k. Действительно, если какой-либо из корней k_j меняет знак мнимой части при некотором конечном $k = k_0$, то из (1.4) следует $k_j^2 + k_0^2 = 0$, что является противоречием.

В идеальной (невязкой) жидкости без диффузии соли граничные условия на жесткой плоскости состоят в равенстве нулю нормальной компоненты полной скорости, а дифференциальное уравнение, описывающее волновое движение, имеет второй порядок. Это позволяет представить отраженное поле в виде

$$h=\int B(k)e^{i(k\xi+ik_1\zeta)}dk$$

с одной амплитудной функцией $B(k)$, которая должна определяться из граничных условий [7]. Здесь и всюду далее, если не оговорено противное, интегрирование ведется от $-\infty$ до $+\infty$.

В двумерной постановке в задаче для вязкой жидкости при учете диффузии соли возникают три скалярных граничных условия. Они могут быть удовлетворены, если в отраженном поле присутствуют три независимые амплитудные функции:

$$h=\sum\int B_j(k)e^{i(k\xi+ik_j\zeta)}dk \tag{1.5}$$

Суммирование всюду ведется от $j = 1$ до $j = 3$, а принцип нумерации корней k_j уравнения (1.4) изложен выше. Амплитуды $B_1(k)$, $B_2(k)$ и $B_3(k)$ должны определяться из условия равенства нулю на плоскости нормальной и тангенциальной компонент полной скорости и нормальной компоненты градиента солености.

Используя соотношение $\upsilon_z = -i\omega h$ и третье уравнение из (1.1), находим компоненту скорости υ_x, после чего из четвертого уравнения в (1.1) определяем соленость s. Компоненты скорости (υ_x, υ_z) связаны с компонентами $(\upsilon_\xi, \upsilon_\zeta)$ таким же соотношением (1.3), что и координаты, поэтому получаем окончательно

$$\upsilon_\xi = -i\omega\sum\int \frac{k_j B_j(k)}{\beta_j} e^{i(k\xi+k_j\zeta)}dk, \quad \upsilon_\zeta = i\omega\sum\int\frac{kB_j(k)}{\beta_j} e^{i(k\xi+k_j\zeta)}dk \tag{1.6}$$

$$s = \frac{i\omega}{\Lambda}\sum\int\frac{B_j(k)}{\gamma_j} e^{i(k\xi+k_j\zeta)}dk, \quad \beta_j = k\cos\varphi + k_j\sin\varphi, \quad \gamma_j = i\omega - D(k^2+k_j^2)$$

Если в падающем на плоскость пучке распределение скоростей и солености задается функциями $\upsilon_{0\xi}(\xi,\zeta), \upsilon_{0\zeta}(\xi,\zeta)$ и $s_0(\xi,\zeta)$, то упомянутые выше граничные условия приводят к системе уравнений для нахождения амплитуд $B_j(k)$. Выполняя обратное преобразование Фурье, получим линейную алгебраическую систему относительно $B_j(k)$, решая которую, найдем

$$B_i = \beta_i\gamma_i\sum \frac{A_{ij}(k)}{A(k)}F_j(k) \tag{1.7}$$

Здесь:

$$F_1 = \frac{1}{2\pi i\omega}\int\upsilon_{0\xi}(\xi,0)e^{-ik\xi}d\xi, \quad F_2 = -\frac{1}{2\pi i\omega}\int\upsilon_{0\zeta}(\xi,0)e^{-ik\xi}d\xi$$

$$F_3 = \frac{\Lambda}{2\pi\omega}\int\frac{\partial s_0(\xi,0)}{\partial\zeta} e^{-ik\xi}d\xi$$

$$A_{i1} = -k(k_n-k_m)\{[i\omega - D(k^2-k_nk_m)]k\cos\varphi + (i\omega - Dk^2)(k_n+k_m)\sin\varphi\}$$

$$A_{i2} = k_nk_m(k_n-k_m)\{[i\omega - D(k^2-k_nk_m)]\sin\varphi + Dk(k_n+k_m)\cos\varphi\} \tag{1.8}$$

$$A_{i3} = k(k_n-k_m)[i\omega - D(k^2+k_n^2)]\ [i\omega - D(k^2+k_n^2)]$$

$$A = -k(k_1-k_2)(k_2-k_3)(k_3-k_1)\{(i\omega - Dk^2)[i\omega - D(k^2-k_1k_2-k_2k_3-k_3k_1)]\sin\varphi +$$

$$+Dk[(i\omega - Dk^2)(k_1+k_2+k_3) + Dk_1k_2k_3]\cos\varphi\}$$

а перестановка (i, n, m) эквивалентна циклической перестановке (1, 2, 3).

Соотношения (1.5) и (1.7), (1.8) полностью решают задачу об отражении пучков внутренних волн от жесткой плоскости в вязкой жидкости с солевой диффузией.

2. Анализ структуры решения. Для выяснения физического смысла членов, входящих в решение (1.5), необходимо решить дисперсионное уравнение (1.4) и найти комплексные волновые числа $k_1(k)$, $k_2(k)$ и $k_3(k)$. В общем случае эти корни найти аналитически нельзя из-за высокой (шестой) степени уравнения (1.4), однако для малых значений вязкости и коэффициента диффузии можно получить стандартными методами [11] первые члены их асимптотических разложений

$$k_1 = -k\,\mathrm{ctg}(\varphi\pm\theta) \pm \frac{i(\nu+D)k^3}{2N\cos\theta\sin^4(\varphi\pm\theta)} \tag{2.1}$$

$$k_2 = (\pm1+i)\left[\frac{N^2|\sin^2\theta - \sin^2\varphi|}{\Omega}\right]^{1/2}, \quad k_3 = \frac{1+i}{2}\left[\frac{\Omega}{\nu D}\right]^{1/2}$$

$$\Omega = \omega(\nu + D) + [\omega^2(\nu - D)^2 + 4\nu D N^2 \sin^2\varphi]^{1/2} \tag{2.2}$$

Верхний знак в (2.1) берется при $k > 0$, нижний при $k < 0$, знак плюс или минус во второй из формул (2.1) совпадает со знаком разности $\sin^2\theta - \sin^2\varphi$, а $\theta = \arcsin(\omega / N)$ – угол, который составляют с горизонтом пучки внутренних волн. Для распространяющихся волн $0 < \omega/N < 1$ и, следовательно, $0 < \theta < \pi/2$.

Первый член в сумме (1.5) может быть представлен при учете (2.1) в виде

$$h_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} B_1(k)\exp\{ik[\xi + \zeta\operatorname{ctg}(\varphi \pm \theta)]\}\exp\left[-\frac{(\nu + D)|k|^3\zeta}{2N\cos\theta\sin^4(\varphi \pm \theta)}\right]dk \tag{2.3}$$

Интегралы подобного вида описывают [1.3] расходящийся пучок внутренних волн, поперечная форма которого определяется спектральной функцией $B_1(k)$. В данной задаче степень расходимости такого пучка определяется суммой кинетических коэффициентов $\nu + D$ в отличие от чисто вязкого случая, когда $D = 0$, так что при наличии солевой диффузии пучок расширяется быстрее.

Второй и третий члены в (1.5) при учете соотношений (2.2) принимают вид:

$$h_j = \exp\left(\pm\frac{i\zeta}{\lambda_\pm}\right)\exp\left(-\frac{\zeta}{\lambda_\pm}\right)\int B_j(k)e^{ik\xi}dk, \quad j = 2,3$$

Видно, что отраженное поле представляет собой произведение осциллирующей экспоненциально затухающей функции ζ и некоторой функции ξ, определяемой формой падающего на плоскость пучка. Это позволяет интерпретировать второй и третий члены в сумме (6) как пограничные слои, описываемые пространственными масштабами $\lambda_+ = 1/\operatorname{Im}k_2$ и $\lambda_- = 1/\operatorname{Im}k_3$. Вводя диссипативные пространственные масштабы [12]

$$l_\nu = (\nu / N)^{1/2}, \quad l_D = (D / N)^{1/2} \tag{2.4}$$

можно записать

$$\lambda_+ = \lambda|\sin^2\varphi - \sin^2\theta|^{-1/2}, \quad \lambda_- = 2l_\nu l_D / \lambda \tag{2.5}$$

$$\lambda \equiv \left\{\left(l_\nu^2 + l_D^2\right)\sin\theta + \left[\left(l_\nu^2 - l_D^2\right)^2\sin^2\theta + 4l_\nu^2 l_D^2\sin^2\varphi\right]^{1/2}\right\}^{1/2}$$

Сравнение λ_+ и λ_- показывает, что всегда выполняется неравенство $\lambda_+ \geqslant \lambda_-$, причем равенство достигается только в случае, если одновременно $\nu = D$ и $\sin\varphi = 0$, т.е. на горизонтальном дне. В остальных случаях указанные масштабы различны и различие это может быть весьма значительным. В часто встречающемся случае, когда один из кинетических коэффициентов значительно превосходит другой (например, $\nu \gg D$), можно получить из (2.5) более простые выражения для масштабов λ_+ и λ_-

$$\lambda_+ = l_\nu(2\sin\theta/|\sin^2\varphi - \sin^2\theta|)^{1/2}, \quad \lambda_- = l_D(2 / \sin\theta)^{1/2} \tag{2.6}$$

т.е. один из пограничных слоев связан исключительно с наличием вязкости, а другой – с наличием диффузии соли. В противоположном случае $\nu \ll D$ в формулах (2.6) следует поменять местами l_ν и l_D.

Из (2.1) и (2.2) видно, что как для волнового поля, так и для одного из пограничных слоев имеется сингулярность при $\sin\varphi = \pm\sin\theta$. Эта сингулярность носит принципиальный характер в отсутствие вязкости и солевой диффузии (при этом, правда, нет пограничных слоев) и выражается в бесконечном поперечном сжатии отраженного волнового пучка и безграничном возрастании его амплитуды в случае, когда плоскость совпадает с линией распространения пучка.

Заметим, однако, что в уравнениях (1.1) кинетические коэффициенты стоят при старших пространственных производных. Следовательно, при увеличении градиентов поля в отраженном пучке на передний план выступают эффекты, связанные с вязкостью и диффузией. Это позволяет ожидать, что последовательный учет этих эффектов может устранить указанные выше сингулярности. И действительно, полагая в уравнении (1.4) $\sin\varphi = \mu\sin\theta$, $\mu = \pm 1$, получим его решения:

$$k_1 = -\mu k \operatorname{ctg} 2\theta + \frac{i\mu(\nu + D)k^3 \sin\theta}{N\sin^5 2\theta}, \quad \mu k > 0$$

$$k_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}(-K)^{1/3}, \quad \mu k < 0; \quad K = \frac{2\mu k N\cos\theta}{\nu + D} \tag{2.7}$$

$$k_2 = iK^{1/3}, \quad \mu k > 0; \quad k_2 = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}(-K)^{1/3}, \quad \mu k < 0$$

$$k_3 = (1+i)\left[\frac{(\nu + D)N\sin\theta}{2\nu D}\right]^{1/2}$$

Видно, что хотя зависимость $k_j(k)$, даваемая формулами (2.7), сложнее, чем (2.1) и (2.2), сингулярность при $\sin\varphi = \pm\sin\theta$ отсутствует. При этом пространственная структура одного из пограничных слоев будет иметь сложный характер (не будет простой экспонентой), зависящий от того, какой пучок падает на плоскость. В то же время структура другого пограничного слоя будет продолжать описываться экспоненциальной функцией при любых углах расположения отражающей плоскости.

3. Отражение пучка волн, излученных точечным массовым источником. В качестве примера рассмотрим волновой пучок, излученный точечным массовым источником, расположенным в точке $x = L\cos\theta$, $z = -L\sin\theta$, где L – расстояние от источника до плоскости вдоль направления распространения пучка. Для определенности будем рассматривать пучок, распространяющийся влево и вверх. При этом угол φ лежит в диапазоне $-\theta < \varphi < \pi - \theta$, иначе пучок просто не попадет на плоскость. В прямоугольной декартовой системе координат (p, q) с осью q, направленной вдоль пучка, связь которой с системой (x, z) дается формулами

$$x = -(q - L)\cos\theta - p\sin\theta, \quad z = (q - L)\sin\theta - p\cos\theta \tag{3.1}$$

вертикальные смещения частиц в таком пучке могут быть выражены интегралом [3]

$$h_0(p,q) = \int\limits_0^\infty \exp\left[ikp - \frac{(\nu + D)k^3 q}{2N\cos\theta}\right]dk \tag{3.2}$$

Переходя в систему координат (ξ, ζ) с помощью (1.3) и (3.1), а затем к интегрированию в комплексной плоскости τ, получим из (3.2)

$$h_0(\xi,\zeta) = -\frac{1}{\sin(\varphi+\theta)}\int\limits_C a(\tau)e^{i\tau\xi}e^{i\tau_1(\tau)\zeta}d\tau \quad a(\tau) = \exp[A(\tau)L]$$

$$\tau_1(\tau) = \frac{-\tau\cos(\varphi+\theta) + A(\tau)}{\sin(\varphi+\theta)}, \quad A(\tau) = \frac{(\nu + D)\tau^3}{2N\cos\theta\sin^3(\varphi+\theta)} \tag{3.3}$$

причем контур интегрирования C задается параметрическим уравнением

$$\tau(k) = -k\sin(\varphi+\theta) - \frac{i(\nu + D)k^3\cos(\varphi+\theta)}{2N\cos\theta}, \quad k \in [0, +\infty] \tag{3.4}$$

Деформируя контур C в контур $\mathrm{Im}\,\tau = 0$, получим выражение для вертикального смещения частиц в падающем пучке в координатах (ξ, ζ)

$$h_0(\xi,\zeta) = \frac{I(\xi,\zeta)}{\sin(\varphi+\theta)}, \quad I(\xi,\zeta) = \int\limits_{-\infty}^{0} a(\tau)e^{i\tau\xi}e^{i\tau_1(\tau)\zeta}d\tau \tag{3.5}$$

С помощью соотношений $\upsilon_z = -i\omega h_0$, $\partial\upsilon_\xi / \partial\xi + \partial\upsilon_\zeta / \partial\zeta = 0$ и связи между компонентами (υ_x, υ_z) и $(\upsilon_\xi, \upsilon_\zeta)$, которая совпадает со связью (1.3) между координатами (x, z) и (ξ, ζ), находим компоненты скорости

$$\upsilon_{0\xi} = \frac{i\omega\,\mathrm{ctg}(\varphi+\theta)}{\sin\theta} I(\xi,\zeta), \quad \upsilon_{0\zeta} = \frac{i\omega}{\sin\theta} I(\xi,\zeta) \tag{3.6}$$

Из третьего уравнения системы (1.1) находим соленость в падающем пучке

$$s_0 = \frac{i\omega}{\Lambda\sin(\varphi+\theta)} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{a(\tau)}{i\omega - D(\tau^2+\tau_1^2)} e^{i\tau\xi}e^{i\tau_1(\tau)\zeta}d\tau \tag{3.7}$$

Подстановка (3.6) и (3.7) в (1.7) и (1.8) при учете приближенных решений (2.1) и (2.2) позволяет найти спектральные функции отраженного волнового поля $B_1(k)$ и пограничных слоев $B_2(k)$ и $B_3(k)$

$$B_1(k) = \frac{\vartheta(-k)}{\sin(\varphi-\theta)} \exp\left[-\frac{(\nu+D)k^3L}{2N\cos\theta}\right]$$

$$B_2(k) = b(k_2,k_3)B_1(k), \quad B_3(k) = b(k_3,k_2)B_1(k) \tag{3.8}$$

$$b(x,y) \equiv \frac{2\sin\varphi\cos\theta}{\sin(\varphi+\theta)} \frac{y(i\omega - Dx^2)}{(x-y)(i\omega+Dxy)}$$

где ϑ – единичная функция Хевисайда.

Подставляя (3.8) в (1.5), получим выражение для отраженного волнового поля

$$h_\omega = \frac{1}{\sin(\varphi-\theta)} \int\limits_{-\infty}^{0} \exp\left[\frac{(\nu+D)k^3L}{2N\cos\theta\sin^3(\varphi+\theta)}\right] e^{i(k\xi+k_1(k)\zeta)}dk \tag{3.9}$$

При $-\theta < \varphi < \theta$ отраженный пучок будет распространяться влево и вниз, а при $\theta < \varphi < \pi - \theta$ – вправо и вверх.

Введем прямоугольную систему координат (p, q) с осью q, направленной вдоль отраженного пучка и связанную с системой (x, z) соотношениями

$$x = \mp(p\sin\theta + q\cos\theta), \quad z = \pm(p\cos\theta - q\sin\theta) \tag{3.10}$$

причем верхние знаки берутся для первого случая, нижние – для второго. Теперь получаем

$$h_w = \mp\int\limits_{0}^{\infty} \exp\left[ikp - \frac{(\nu+D)k^3(q+L')}{2N\cos\theta}\right]dk, \quad L' = L\left|\frac{\sin(\varphi-\theta)}{\sin(\varphi+\theta)}\right|^3 \tag{3.11}$$

Таким образом, отраженный от плоскости пучок эквивалентен пучку, создаваемому исходным источником, расположенным позади плоскости на расстоянии L' вдоль направления распространения отраженного пучка. Поскольку фазы распространяющихся вверх пучков, излученных точечным массовым источником, противоположны фазам пучков, распространяющихся вниз, то при $-\theta < \varphi < \theta$ фаза отраженного пучка противоположна фазе падающего, а при $\theta < \varphi < \pi - \theta$ падающий и отраженный пучки находятся в фазе. При критическом угле $\varphi = \theta$, когда отраженный пучок распространяется вдоль отражающей плоскости, происходит перестройка его фазовой структуры.

Проведенный анализ показывает, что вязкость и диффузия влияют на характер отражения пучков внутренних волн, с ними связано формирование расщепленного пограничного течения на отражающей поверхности и ограничение коэффициента геометрического сжатия на критических углах.

В пограничном течении, которое формируется на отражающей поверхности, различаются масштабы пространственной изменчивости скорости и солености (плотности) во всех случаях, когда коэффициенты молекулярного переноса импульса и вещества не совпадают между собой (среда с *дисцерсией*). Соотношение масштабов зависит также от геометрии задачи и определяется формулами (2.4) и (2.5). Даже в вырожденном случае, когда коэффициенты кинематической вязкости и диффузии равны, характерные толщины плотностного и динамического пограничных слоев различаются между собой, за исключением случая горизонтальной отражающей поверхности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-05-8291).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лайтхилл Дж.* Волны в жидкостях. М.: Мир, 1981. 598 с.
2. *Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д.* Генерация, распространение и нелинейное взаимодействие внутренних волн // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ, 1990. Т. 24. С.77–144.
3. *Макаров С.А., Неклюдов В.И., Чашечкин Ю.Д.* Пространственная структура пучков двумерных монохроматических внутренних волн в экспоненциально стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1990. Т. 26. № 7. С.744–754.
4. *Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д.* Нелинейное взаимодействие двумерных пакетов монохроматических внутренних волн // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1991. Т. 27. № 12. С. 1292–1301.
5. *Филлипс О.М.* Динамика верхнего слоя океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1980. 319 с.
6. *Габов С.А., Свешников А.Г.* Задачи динамики стратифицированных жидкостей. М.: Наука, 1986. 288 с.
7. *Кистович Ю.В., Чашечкин Ю.Д.* Отражение пакетов внутренних волн от плоской жесткой границы // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1993. Т. 29. № 6. С. 831–836.
8. *Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д.* Структура нестационарного пограничного течения на наклонной плоскости в непрерывно стратифицированной среде // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 4. С. 50–56.
9. *Байдулов В.Г., Чашечкин Ю.Д.* Влияние диффузионных эффектов на пограничные течения в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1993. Т. 29. № 5. С. 666–672.
10. Океанология. Физика океана. Т. 1. Гидрофизика океана / Отв. ред. *В.М. Каменкович, А.С. Монин.* М.: Наука, 1978. 455 с.
11. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.
12. *Long R.R.* A theory of turbulence in stratified fluids // J. Fluid Mech. 1970. V. 42. Pt 2. P. 349–365.

Москва

Поступила в редакцию
31.I.1994