ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 59, Вып. 4, 1995

УДК 532.593:534.1

© 1995 г. А.М. Тер-Крикоров

ВИХРИ И ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

В эйлерово-лагранжевых переменных выводятся уравнения, описывающие эволюцию потенциальных вихрей и внутренних волн в устойчиво стратифицированной жидкости, заполняющей полупространство. Строятся асимптотические ряды по малому параметру, дающие приближенные решения нелинейной задачи. Уравнения линейного приближения для потенциального вихря и внутренних волн независимы, уравнения приближений более высокого порядка описывают взаимодействие потенциальных вихрей и внутренних волн. Показано, что распределенные стоки (которые можно интерпретировать как интенсивные атмосферные осадки) вызывают экспоненциальное возрастание потенциальной завихренности, что в свою очередь может приводить к значительному увеличению амплитуд внутренних волн. Для случая экспоненциальной стратификации построены асимптотики для поля внутренних волн в различных пространственно-временных областях.

1. Уравнения движения в эйлерово-лагранжевых переменных. В поле силы тяжести рассматривается движение невязкой устойчиво стратифицированной жидкости, заполняющей полупространство. Ось z декартовой системы координат x, y, z направлена вертикально вверх. В состоянии равновесия плотность ρ_0 и давление p_0 связаны соотношением $p_0'(z) = -g\rho_0(z)$. Для идеального газа функция $\alpha(z) = p_0(z)/\rho_0^\kappa(z)$ задает распределение энтропии, причем $\kappa = c_p / c_\upsilon > 1$. Условие устойчивости $\rho_0'(z) \leqslant 0$ – для несжимаемой жидкости, $\alpha'(z) \geqslant 0$ – для идеального газа. Без ограничения общности можно считать, что в условии устойчивости знаки неравенства строгие, так как к функциям $\rho_0(z)$ и $\alpha(z)$ всегда можно прибавить сколь угодно малые и строго монотонные функции. Из строгой монотонности функций $\rho_0(z)$ и $\alpha(z)$ следует, что плотность (соответственно энтропия) жидкой частицы однозначно определяет ее расстояние от координатной плоскости xy в положении равновесия.

Рассмотрим жидкую частицу, находящуюся в момент времени t в точке пространства с координатами x, y, z. В положении равновесия та же частица будет расположена на расстоянии $\zeta(x, y, z, t)$ от координатной плоскости x, y. Функция ζ сохраняет свое значение в частице и поэтому является интегралом уравнений движения. Предполагая, что эта функция гладкая и что $\partial\zeta/\partial z \geqslant c_0 > 0$, примем x, y, ζ, t в качестве независимых переменных, а z – одну из зависимых переменных. Величина $z - \zeta$ задает отклонение жидкой частицы от положения равновесия по вертикали.

В частице сохраняется плотность $\rho = \rho_0(\zeta)$, если жидкость несжимаема и энтропия $\alpha = p / \rho^\kappa = \alpha(\zeta)$, если жидкость является идеальным газом.

Пусть (u, υ) – горизонтальные компоненты вектора скорости. Используя обозначения

$$D=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial}{\partial y}, \quad \Omega=\frac{\partial \upsilon}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} \tag{1.1}$$

и применяя простые рассуждения [1], преобразуем уравнения Эйлера и уравнение неразрывности к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\upsilon\Omega+z_x D^2 z=-\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial t}+u\Omega+z_y D^2 z=-\frac{\partial H}{\partial y} \tag{1.2}$$

$$z_\zeta D^2 z=-\frac{\partial H}{\partial \zeta}+n^2(\zeta)\left(H-\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{2}\upsilon^2\right)-N^2(\zeta)z \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+\frac{Dz_\zeta}{z_\zeta}+\frac{D\rho}{\rho}=\varepsilon Q(x,y,\zeta,t) \tag{1.4}$$

где функция $\varepsilon Q(x, y, \zeta, t)$ задает распределение источников и стоков, ε – малый параметр, функция $n^2(\zeta)$, H и $N^2(\zeta)$ определяются различными формулами для несжимаемой жидкости и для идеального газа: для несжимаемой жидкости

$$H=\frac{p}{\rho}+gz+\frac{1}{2}(u^2+\upsilon^2), \quad n^2(\zeta)=-\frac{\rho_0'(\zeta)}{\rho_0(\zeta)}, \quad N^2(\zeta)=-g\frac{\rho_0'(\zeta)}{\rho_0(\zeta)}$$

а для идеального газа

$$H=\frac{\kappa}{\kappa-1}\frac{p}{p}+gz+\frac{1}{2}(u^2+\upsilon^2), \quad n^2(\zeta)=\frac{\alpha'(\zeta)}{\kappa\alpha(\zeta)}, \quad N^2(\zeta)=\frac{h\alpha'(\zeta)}{\kappa\alpha(\zeta)}.$$

Если жидкость несжимаема, то $D\rho=0$ и член $D\rho/\rho$ в уравнении (1.4) отсутствует. Если жидкость сжимаема и a – скорость звука, то для медленных движений величина $D\rho/\rho=2Da/a(\kappa-1)$ мала по сравнению с $\partial u/\partial x$ и $\partial v/\partial y$ и в уравнении (1.4) $D\rho/\rho$ можно отбросить [2]. Таким образом, различие между случаями сжимаемой и несжимаемой жидкости в таком приближении будет заключено в различных определениях функции H. В приближении Буссинеска величина $n^2(\zeta)$ предполагается малой и члены, содержащие $n^2(\zeta)$ в качестве множителя из уравнений удаляются. В дальнейшем ограничимся приближением Буссинеска, хотя случай $n\neq 0$ отличается от случая $n=0$ лишь непринципиальными техническими усложнениями.

Запишем выражения (1.1) в виде

$$D=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial(\psi,\cdot)}{\partial(x,y)}, \quad \Omega=\Delta_2\psi \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=\Delta_2\varphi, \quad \Delta_2\varphi+\frac{Dz_\zeta}{z_\zeta}=\varepsilon Q$$

$$\left(u=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \upsilon=\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \Delta_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

Исключая H из первых двух уравнений (1.2), получаем

$$D\Omega+\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)+\frac{\partial(D^2z,z)}{\partial(x,y)}=0 \tag{1.6}$$

Воспользовавшись тождеством

$$D\left(\frac{\partial(Dz,z)}{\partial(x,y)}\right)=\frac{\partial(D^2z,z)}{\partial(x,y)}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)\frac{\partial(Dz,z)}{\partial(x,y)}$$

и соотношениями (1.5), запишем уравнение (1.6) в виде

$$D\Gamma=-\varepsilon Q\Gamma,\quad \Gamma=\frac{1}{z_\zeta}\left(\Omega+\frac{\partial(Dz,z)}{\partial(x,y)}\right) \tag{1.7}$$

Можно показать, что в независимых переменных x, y, z, t:

$$\Gamma=(\operatorname{rot}\mathbf{v},\nabla\zeta) \tag{1.8}$$

Формулу (1.7) можно рассматривать как обобщение формулы Эртеля (3) на случай, когда в пространстве распределены источники и стоки. В области пространства, где нет источников и стоков, величина $(\operatorname{rot}\mathbf{v},\nabla\rho)$ сохраняет свое значение в жидких частицах; ее обычно называют потенциальным вихрем [4]. Так как $\nabla\rho=\rho'(\zeta)\nabla\zeta$, то в дальнейшем будем величину Γ также называть потенциальным вихрем. Заметим, что если отказаться от гипотезы о медленном движении идеального газа и не отбрасывать в уравнении неразрывности член $D\rho/\rho$, то формула (1.7) остается верной, но в ней надо положить

$$\Gamma=\frac{1}{\rho z_\zeta}\left(\Omega+\frac{\partial(Dz,z)}{\partial(x,y)}\right)$$

Применяя оператор Δ_2 к уравнению (1.3) и находя $\Delta_2 H$ из уравнений (1.2), получаем уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial t}\left(\frac{Dz_\zeta}{z\zeta}\right)+\Delta_2(z_\zeta D^2z+N^2(\zeta)z)=$$

$$=\varepsilon\frac{\partial^2 Q}{\partial\zeta\partial t}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial(\varphi,\Omega)}{\partial(x,y)}+\Delta_2 zD^2z+(\nabla_2\psi,\nabla_2\Omega)+(\nabla_2 z,\nabla_2 D^2z)\right) \tag{1.9}$$

Для трех неизвестных функций z, φ, ψ получена система трех нелинейных уравнений (1.7), (1.9) и (1.5).

Начальные условия возьмем в виде

$$z|_{t=0}=\zeta+\varepsilon\omega_0(x,y,\zeta),\quad Dz|_{t=0}=\varepsilon\omega_1(x,y,\zeta),\quad \Gamma|_{t=0}=\varepsilon\gamma_0(x,y,\zeta) \tag{1.10}$$

Таким образом, в начальный момент задается отклонение частицы по вертикали от положения равновесия, вертикальная скорость частицы и потенциальный вихрь. Функции ω_0, ω_1, γ_0 и Q – гладкие и финитные (или достаточно быстро убывающие на бесконечности). Из уравнений (1.5) и (1.7) следует, что для определения начальных значений функций φ и ψ нужно решать плоское уравнение Пуассона с финитной и гладкой правой частью, либо с правой частью, достаточно быстро стремящейся к нулю на бесконечности.

Пусть (r,θ) – полярные координаты на плоскости. В осесимметрическом случае функции φ, ψ, z зависят только от r, ζ, t, и уравнения и граничные условия принимают вид

$$\Delta_2\varphi+\frac{1}{z_\zeta}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial t\partial\zeta}+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial^2 z}{\partial\zeta\partial r}\right)=\varepsilon Q(r,\zeta,t)$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{\partial\Gamma}{\partial r}=-\varepsilon\Gamma Q(r,\zeta,t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial t}\left(\frac{1}{z_\zeta}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial\zeta\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,\frac{\partial^2 z}{\partial\zeta\partial r}\right)\right)+\Delta_2(z_\zeta D^2 z+N^2(\zeta)z)=$$

$$=\varepsilon\frac{\partial^2 Q}{\partial\zeta\partial t}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\,\frac{\partial(\Gamma z_\zeta)}{\partial r}-(\Gamma z_\zeta)^2+\Delta_2 z D^2 z+\frac{\partial z}{\partial r}\,\frac{\partial}{\partial r}(D^2 z)\right) \tag{1.11}$$

$$\Delta_2\psi=-\Gamma z_\zeta,\quad \Delta_2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}$$

$$D^2=\frac{\partial^2}{\partial t}+2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,\frac{\partial^2}{\partial t\partial r}+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial r}+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right)\frac{\partial}{\partial r}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

Если жидкость ограничена снизу подвижной твердой стенкой, то граничное условие возьмем в виде

$$z|_{\zeta=0}=\varepsilon\omega_2(x,y,t) \tag{1.12}$$

Из условия (1.12) следует, что на твердой стенке расположены частицы одинаковой плотности.

2. Построение решения в виде рядов по малым параметрам. Пусть область $G\subset R^3$ ограничена и обладает осевой симметрией и пусть функция Q имеет носитель в $G\times\times[0,T]$. Развитие потенциального вихря связано не только с величиной параметра ε, характеризующего мощность источников, но и с количеством жидкости, произведенным в данной точке пространства за время t действия источника. Учитывая это замечание, введем функциональный параметр

$$\tau=\varepsilon\exp\left(-\varepsilon\int_0^t Q(r,\zeta,t')dt'\right) \tag{2.1}$$

и будем искать формальное решение уравнений (1.11) с начальными условиями (1.10) и граничным условием (1.12) в виде рядов по степеням параметров τ и ε:

$$z=\zeta+\varepsilon z_0+\sum_{k=2}^{\infty}z_k\tau^k,\quad z_k=\sum_{m=0}^{\infty}z_{km}\varepsilon^m$$

$$\varphi=\varepsilon\varphi_0+\sum_{k=2}^{\infty}\varphi_k\tau^k,\quad \varphi_k=\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_{km}\varepsilon^m \tag{2.2}$$

$$\Gamma=\sum_{k=1}^{\infty}\Gamma_k\tau^k,\quad \Gamma_k=\sum_{m=0}^{\infty}\Gamma_{km}\varepsilon^m,\quad \psi=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k\tau^k,\quad \psi_k=\sum_{m=0}^{\infty}\psi_{km}\varepsilon^m$$

Подставляя ряды (2.2) в уравнения (1.11), начальные и граничные условия (1.10) и (1.12), получаем последовательность граничных задач для определения неизвестных функций z_{km}, φ_{km}, Γ_{km}, ψ_{km}.

Для определения функции z_{00} нужно решить смешанную задачу

$$\mathrm{L}z_{00}=\frac{\partial^2 Q}{\partial\zeta\partial t},\quad L=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)+N^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

$$z_{00}|_{t=0}=\omega_0(r,\zeta),\quad \left.\frac{\partial z_{00}}{\partial t}\right|_{t=0}=\omega_1(r,\zeta),\quad z_{00}|_{\zeta=0}=\omega_2(r,\zeta) \tag{2.3}$$

(L – дифференциальный оператор внутренних волн).

При наложенных ограничениях на известные функции существование и единственность решения задачи (2.3) при дополнительном условии ограниченности поля скоростей на бесконечности может быть установлено методами математической физики. Для случая $N = \text{const}$ решение выражается явно через свертки с фундаментальным решением уравнения $\mathrm{L}u = 0$ [4].

Запишем решение задачи (2.3) в виде

$$z_{00} = \mathrm{A}Q + \mathrm{B}\omega_0 + \mathrm{C}\omega_1 + \mathrm{D}\omega_2 \tag{2.4}$$

Явные выражения для линейных операторов A, B, C и D будут приведены в следующем разделе.

Для определения функции φ_{00} нужно найти ограниченное решение уравнения Пуассона на плоскости

$$\Delta_2\varphi_{00} = Q(r,\zeta,t) - \partial^2 z_{00} / \partial t\partial\zeta$$

Известно, что для гладкой и достаточно быстро убывающей на бесконечности правой части решение уравнения Пуассона существует и единственно.

Для определения Γ_{10} и ψ_{10} получаем уравнения

$$\partial\Gamma_{10} / \partial t = 0, \qquad \Gamma_{10}|_{t=0} = \gamma_0(r,\zeta), \qquad \Delta_2\psi_{10} = -\gamma_0(r,\zeta)$$

из которых ясно, что $\Gamma_{10} = \gamma_0(r,\zeta)$ и $\psi_{10} = -\Delta_2^{-1}\gamma_0$.

Для определения z_{20}, получаем смешанную задачу

$$\mathrm{L}z_{20} = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\psi_{10}}{\partial r}\frac{\partial\gamma_0}{\partial r} - \gamma_0^2\right)$$

$$z_{20}|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial z_{20}}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \quad z_{20}|_{\zeta=0} = 0$$

Функция φ_{20} является решением уравнения Пуассона

$$\Delta_2\varphi_{20} = -\partial z_{20} / \partial t\partial\zeta$$

Учитывая обозначения (2.4), получаем

$$z_{20} = \mathrm{A}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\psi_{10}}{\partial r}\frac{\partial\gamma_0}{\partial r} - \gamma_0^2\right)\right), \qquad \varphi_{20} = -\Delta_0^{-1}\left(\frac{\partial^2 z_{20}}{\partial t\partial\zeta}\right) \tag{2.5}$$

Определение остальных членов рядов (2.2) сводится к решению неоднородных граничных задач для операторов L, Δ_2 и $\partial/\partial t$ с правыми частями, зависящими от ранее найденных членов этих рядов, так что принципиально ряды (2.2) могут быть построены. Главные члены асимптотики по параметрам ε и τ имеют вид

$$z = \zeta + \varepsilon z_{00} + \tau^2 z_{20}, \qquad \varphi = \varepsilon\varphi_{00} + \tau^2\varphi_{20}, \qquad \Gamma = \gamma_0(r,\zeta)\tau, \qquad \psi = -\tau\Delta_2^{-1}\gamma_0 \tag{2.6}$$

причем параметр τ определяется формулой (2.1), z_{00} и z_{20} – уравнениями (2.4) и (2.5).

Если функция $Q(r, \zeta, t)$ отрицательна (т.е. по пространству распределены стоки), то функциональный параметр τ, определяемый функцией (2.1) будет экспоненциально возрастать с течением времени и величина τ^2 может сравняться или превзойти величину ε. Поэтому главный член асимптотики необходимо брать в виде (2.6) и недостаточно ограничиться только членом $\zeta + \varepsilon z_{00}$, который определяется из линейной теории внутренних волн. Линейная теория будет правильно описывать ситуацию только в случае, когда в заданной области пространства потенциальные вихри отсутствуют или достаточно малы.

Заметим еще, что в метеорологии стоки иногда могут быть интерпретированы как интенсивные атмосферные осадки. Процессы испарения с поверхности океана и конвекция приводят к образованию над поверхностью океана обширных зон облачности. В облаке происходят сложные и пока недостаточно изученные процессы, в том числе процессы испарения и конденсации водяных паров. Процесс конденсации при определенных условиях сопровождается осадками в виде дождя, снега и града. В первом приближении процесс выпадения интенсивных осадков можно интерпретировать как возникновение стоков в толще облаков. Согласно описанной выше теории присутствующие в атмосфере потенциальные вихри могут, экспоненциально усиливаясь, набирать силу и приводить к образованию мощных вихрей типа торнадо. Известны и другие механизмы образования атмосферных вихрей, связанные с ветровыми сдвигами и со сворачиванием неустойчивой вихревой пелены в кольцевой вихрь. Какой из процессов играет основную роль или какое сочетание процессов приводит к реальному возникновению вихрей в атмосфере? Ответ на эти вопросы требует дальнейших исследований.

3. Исследование операторов, дающих решение линейной задачи для N = const. Из результатов разд. 2 следует, что определение функции z_{mk} сводится к решению смешанной задачи

$$\mathrm{L}u = f_3(x,y,\zeta,t) \tag{3.1}$$

$$u|_{t=0} = f_0(x,y,\zeta), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = f_1(x,y,\zeta), \qquad u|_{\zeta=0} = f_2(x,y,t)$$

где функции f_i – гладкие и финитные (или достаточно быстро убывающие на бесконечности). Подобные задачи исследовались многими авторами. Решение обычно выражается через различные свертки функций f_i с фундаментальным решением уравнения $\mathrm{L}u = 0$. Достаточно полное исследование фундаментального решения и подробная библиография даны в [5, 6]. Наиболее простой путь решения граничной задачи (3.1), отличный от использованного в [5], основан на том, что после применения преобразования Лапласа по времени и простой замены переменной задача сводится к решению задачи Дирихле для уравнения Пуассона в полупространстве, которое известным образом выражается через потенциалы. Производя обратное преобразование Лапласа, получаем решение задачи (3.1) в виде сверток функции f_i с фундаментальным решением уравнения $\mathrm{L}u = 0$.

Фундаментальное решение для полупространства имеет вид

$$F(x,y,\zeta,\zeta',t) = \Phi(x,y,\zeta-\zeta',t) - \Phi(x,y,\zeta+\zeta',t) \tag{3.2}$$

$$\Phi(x,y,\zeta,t) = -\frac{1}{4\pi N}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+\zeta^2}}\,\omega\left(\frac{\zeta}{\sqrt{x^2+y^2+\zeta^2}},\ Nt\right), \qquad k^2+\lambda^2 = 1$$

$$\omega(\lambda,\tau) = \frac{2}{\pi}\int_{|\lambda|}^{1}\frac{\sin(\tau\xi)d\xi}{\sqrt{(1-\xi)^2(\xi^2-\lambda^2)}} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(\tau\sqrt{1-k^2\cos^2 u})}{\sqrt{1-k^2\cos^2 u}}du$$

Решение смешанной задачи (3.1) записывается в виде сверток с фундаментальным решением

$$u = \sum_{k=0}^{4} \mathrm{A}_k f_k$$

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_0 f_0 &= \iiint_{R^3} \frac{\partial F}{\partial t}(x-x',y-y',\zeta,\zeta',t)\Delta f_0(x',y',\zeta')dx'dy'd\zeta' \\ \mathrm{A}_1 f_1 &= \iiint_{R^3} F(x-x',y-y',\zeta,\zeta',t)\Delta f_1(x',y',\zeta')dx'dy'd\zeta' \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\mathrm{A}_2 f_2 = -\int_0^t dt' \iint_{R^2} \frac{\partial}{\partial\zeta}\Phi(x-x',y-y',\zeta,t-t')f_2(x',y',t')dx'dy'$$

$$A_3 f_3 = \int_0^t dt' \iiint_{R^3} F(x-x', y-y', \zeta, \zeta' t-t') f_3(x', y', \zeta', t') dx'dy'd\zeta'$$

Из формул (3.2) следует, что при построении фундаментального решения основную роль играет функция $\omega(\lambda, \tau)$, для которой разными авторами были выведены разнообразные точные и приближенные выражения. Приведем без доказательства несколько, по-видимому, новых формул для функции $\omega(\lambda, \tau)$:

$$\omega(\lambda,\tau) = 2\sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(\tau) P_n(1-2\lambda^2) = \int_0^{\tau} J_0(u)du + 2\sum_{n=0}^{\infty} (P_n(1-2\lambda^2)-1) J_{2n+1}(\tau) =$$

$$= \sin\tau + 2\sum_{n=0}^{\infty} (P_n(1-2\lambda^2) - (-1)^n) J_{2n+1}(\tau) \qquad (3.4)$$

где $J_n(\tau)$ – функция Бесселя, $P_n(z)$ – многочлен Лежандра. При фиксированном формулы (3.4) определяют асимптотику функции $\omega(\lambda, \tau)$ при $\lambda \to 0$ и $\lambda \to 1$.

При $0 < \lambda_0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ справедлива асимптотическая при $\tau \to +\infty$ и равномерная по λ формула

$$\omega(\lambda,\tau) = 2\sin\kappa^+ \left(A_0(\lambda) J_0(\kappa^-) + \frac{1}{\kappa^-} A_1(\lambda) J_1(\kappa^-)\right) -$$

$$-2(1-\lambda)\cos\kappa^+ \left(B_0(\lambda) J_1(\kappa^-) + \frac{1}{\kappa^-} B_1(\lambda) J_2(\kappa^-)\right)$$

$$\kappa^{\pm} = \frac{1 \pm \lambda}{2}\tau, \qquad A_0 = \frac{1+\sqrt{\lambda}}{\sqrt{8\lambda(1+\lambda)}}, \qquad B_0 = \frac{1}{(1+\sqrt{\lambda})\sqrt{8\lambda(1+\lambda)}}$$

$$A_1 = -\frac{1}{2}\,\frac{1+\sqrt{\lambda}+4\lambda+\lambda^{3/2}+\lambda^2}{(1+\sqrt{\lambda})(8\lambda(1+\lambda))^{3/2}}, \qquad B_1 = -\frac{1+3\sqrt{\lambda}+3\lambda^{3/2}+\lambda^2}{2(1+\sqrt{\lambda})^3(8\lambda(1+\lambda))^{3/2}}$$

При $0 < \delta \leqslant \lambda \leqslant 1-\delta$ и $\tau \to \infty$ справедлива более простая асимптотическая формула

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\omega(\lambda,\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau(1-\lambda^2)}}\sin\left(\tau - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{\tau\lambda(1-\lambda^2)}}\sin\left(\lambda\tau + \frac{\pi}{4}\right) -$$

$$-\frac{5-\lambda^2}{8(1-\lambda^2)^{3/2}\tau^{3/2}}\sin\left(\tau+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{5\lambda^2-1}{8(\lambda(1-\lambda^2))^{3/2}\tau^{3/2}}\sin\left(\lambda\tau - \frac{\pi}{4}\right) -$$

$$-\frac{3(43+2\lambda^2+3\lambda^4)}{128(1-\lambda^2)^{5/2}\tau^{5/2}}\sin\left(\tau-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{3(43\lambda^4+2\lambda^2+3)}{128(\lambda(1-\lambda^2))^{5/2}\tau^{5/2}}\sin\left(\lambda\tau+\frac{\pi}{4}\right) + \ldots \qquad (3.5)$$

Из формул (3.2) и (3.5) следует, что в конусе, лежащем внутри первого октанта с вершиной в начале координат при $Nt \to \infty$ справедлива асимптотическая формула ($\rho^2 = x^2 + y^2$, $R^2 = \rho^2 + z^2$):

$$-(2\pi)^{3/2} N\Phi(x,y,z,t) = -\frac{1}{\rho\sqrt{Nt}}\sin\left(Nt - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{R}}{\rho\sqrt{Ntz}}\sin\left(\frac{Ntz}{R} + \frac{\pi}{4}\right) -$$

$$-\frac{5\rho^2+4z^2}{8(\rho\sqrt{Nt})^3}\sin\left(Nt+\frac{\pi}{4}\right) - \frac{(4z^2-\rho^2)}{8(\rho\sqrt{Ntz})^3}\sin\left(\frac{Ntz}{R} - \frac{\pi}{4}\right) -$$

$$-\frac{3(43\rho^4+88z^2\rho^2+48z^4)}{128(\rho\sqrt{Nt})^5}\sin\left(Nt-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{3(48z^4+8z^2\rho^2+3\rho^4)R^{5/2}}{128(\rho\sqrt{Ntz})^5}\sin\left(\frac{Ntz}{R}+\frac{\pi}{4}\right) \qquad (3.6)$$

В формулах (3.3) фундаментальное решение сворачивается с бесконечно дифференцируемыми и финитными функциями. Пусть их носитель расположен в области Ω, тогда на множестве

$$G=\left\{(x,y,z):\ 0<\lambda_0\le\min_{\Omega}\lambda_{\pm}\le\max_{\Omega}\lambda_{\pm}\le 1-\lambda_0\right\}$$

$$\left(\lambda_{\pm}=\frac{z\pm z'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z\pm z')^2}}\right)$$

асимптотика решения задачи (3.1) при $Nt\to\infty$ получается подстановкой в формулы (3.2) асимптотического представления (3.6). После интегрирования по области Ω члены, содержащие гармоники $\sin(Nt\lambda_{\pm})$, начнут убывать быстрее любой отрицательной степени Nt, так как фаза этих гармоник не имеет стационарных точек, а функции f_i финитны и бесконечно-дифференцируемы. Полагая $f_2=f_3=0$, найдем асимптотическое приближение для решения задачи Коши в виде

$$u(x,y,z,t)=-\left(\frac{2}{\pi Nt}\right)^{3/2}z\left(\Gamma_1(x,y)\sin\left(Nt+\frac{\pi}{4}\right)+N\Gamma_0(x,y)\cos\left(Nt+\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\Gamma_i(x,y)=\iiint_{\Omega}\frac{z'f_i(x',y',z')dx'dy'dz'}{((x-x')^2+(y-y')^2)^{5/2}}$$

Для получения приближенных формул при $(x,y,z)\notin G$ можно пользоваться формулой (3.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тер-Крикоров А.М.* Об уравнениях движения стратифицированной жидкости в эйлерово-лагранжевых переменных // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286. № 5. С. 1085–1087.
2. *Дородницын А.А.* Влияние рельефа земной поверхности на воздушные течения // Тр. Центр. ин-та прогнозов. 1950. Вып. 21. С. 3–25.
3. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Т. 1. М.: Гостехиздат, 1955. 560 с.
4. *Lelong M.P., Riley J.J.* Internal wave-vortical model interactions in strongly stratified flows // J. Fluid Mech. 1991. V. 232. P. 1–19.
5. *Габов С.А., Свешников А.Г.* Линейные задачи нестационарных внутренних волн. М.: Наука: 1990. 344 с.
6. *Voisin B.* Internal wave generation in uniformly stratified fluids. Pt. 1. Green's function and point sources // J. Fluid Mech. 1991. V. 231. P. 439–480.

Долгопрудный

Поступила в редакцию 17.VI.1994