

УДК 531.36:534.1

© 1995 г. А.Д. Морозов

## К ЗАДАЧЕ О МАЯТНИКЕ С ВИБРИРУЮЩЕЙ ТОЧКОЙ ПОДВЕСА

Проводится глобальное качественное исследование уравнения маятника с вертикально колеблющейся точкой подвеса в неконсервативном случае, близком к нелинейному интегрируемому. Анализируется переход от нелинейного резонанса к параметрическому при изменении частоты колебаний точки подвеса. Рассматривается поведение решений как в колебательной, так и во вращательной областях, а также в окрестности невозмущенной сепаратрисы. Устанавливается условие существования квазиаттрактора. Приводятся результаты численного анализа, которые согласуются с теоретическими и иллюстрируют их.

Маятник с вибрирующей точкой подвеса – классический пример задачи, в которой наблюдается параметрический резонанс. Исследованию этой задачи посвящено большое число работ (например, [1, 2]). Отметим также задачи об изгибных колебаниях прямого стержня, нагруженного периодической продольной силой [3], о движении заряженной частицы (электрона) в поле двух бегущих волн [4] и др. Возникновение параметрического резонанса в подобных системах связано с потерей устойчивости неподвижной точки соответствующего отображения Пуанкаре и поэтому обычно описывается линеаризованной в окрестности этой точки системой.

В настоящее время решены вопросы существования и устойчивости резонансных периодических движений (см. например, [1, 2, 5]). Имеется также теория, позволяющая исследовать глобальное поведение решений подобных систем в квазиинтегрируемом случае в областях, не содержащих состояний равновесия и сепаратрис невозмущенной системы [6–8]. Центральное место в этой теории занимает анализ резонансных зон. Представляет интерес изучение поведения параметрической системы при стягивании резонансной кольцевой зоны в точку, т.е. установление бифуркаций, происходящих при переходе от обычного нелинейного резонанса к параметрическому. Эта задача рассматривалась [9] для непараметрических систем. Также изучались [10] локальные перестройки фазового портрета укороченных систем ("главных деформаций  $q$ -эквивариантных векторных полей") в окрестности указанной точки. Решению этого вопроса на примере неконсервативного маятника с вертикально колеблющейся точкой подвеса и посвящена данная работа.

В квазиинтегрируемом существенно нелинейном случае решается также задача о движении маятника в глобальных областях (как колебательной, так и вращательной) и в окрестности невозмущенной сепаратрисы, т.е. проводится глобальное исследование маятника с колеблющейся точкой подвеса. Подобное исследование было проведено для уравнения Дюффинга [11] (см. также [6]). Поэтому здесь акцентируется внимание лишь на основных моментах в исследовании.

**1. Постановка задачи. Квазиинтегрируемый случай.** Уравнение движения маятника с вертикально колеблющейся точкой подвеса при некоторых упрощающих предположениях имеет вид

$$(J + ma^2)\theta'' + marv^2[g/(rv^2) + \cos vt]\sin\theta + \delta\theta' = 0 \quad (1.1)$$

где  $J$  – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр масс

перпендикулярно плоскости колебаний,  $\delta$  — коэффициент вязкого трения,  $m$  — масса маятника,  $a$  — его длина,  $r$  — амплитуда колебаний точки подвеса,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\theta$  — угол отклонения маятника от положения равновесия.

Делая в (1.1) замену времени  $\sqrt{mag/(J+ma^2)}t \Rightarrow t$  и координаты  $\theta \Rightarrow x$ , приходим к уравнению

$$x'' + \sin x + p_1 \cos \beta t \sin x + p_2 x' = 0 \quad (1.2)$$

$$p_1 = rv^2/g, \quad p_2 = \delta/\sqrt{mag(J+ma^2)}, \quad \beta = v\sqrt{(J+ma^2)/(mag)}$$

Далее усложним модель и рассмотрим уравнение

$$x'' + \sin x + p_1 \cos \beta t \sin x + (p_2 + p_3 \cos x)x' = 0 \quad (1.3)$$

фазовым пространством которого является  $\mathbb{R}^1 \otimes S^1 \otimes S^1$ . Слагаемое  $p_3 \cos(x)x'$  появляется, например, в случае маятника, в котором сила сопротивления создается вертикально ориентированной пластиной, перпендикулярной плоскости колебаний. Отметим также, что для математического маятника  $\beta = v\sqrt{a/g}$ .

При произвольных параметрах уравнение (1.3) не поддается аналитическому глобальному исследованию. Уравнение вида (1.2) аналитически исследовалось в квазилинейном случае (например, [1, 2]), решались локальные вопросы существования и устойчивости периодических движений (например, [2, 5]), а также вопрос о существовании нерегулярной структуры или двоякоасимптотических решений (например, [4, 12–15]). В то же время отсутствуют работы по глобальному анализу уравнения (1.3) в существенно нелинейном квазиинтегрируемом случае (параметры  $p_i$  малы). В данной статье делается попытка восполнить этот пробел.

Рассмотрим уравнение (1.3) в случае, близком к интегрируемому, т.е. при малых значениях параметров  $p_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Обозначим  $p_i = -\epsilon C_i$ , где  $\epsilon$  — малый параметр. Тогда исходное уравнение (1.3) примет вид

$$x'' + \sin x = \epsilon [C_1 \cos \beta t \sin x + (C_2 + C_3 \cos x)x'] \quad (1.4)$$

Ясно, что в (1.4) можно избавиться от одного параметра и рассмотреть двухпараметрическое семейство векторных полей. Однако для удобства этого делать не будем.

Уравнение вида (1.4) в консервативном случае, когда  $C_2 = C_3 = 0$ , рассматривались во многих работах. Так, для малых углов отклонения  $x$  рассмотрен случай  $\beta \cong 2$  [1]. Критерий перекрытия резонансов применялся [4] для оценки ширины "эргодического слоя"; исследовалось [13, 14] существование двоякоасимптотических (гомоклинических) решений. Полный анализ этого вопроса был дан в [14] без предположения о малости параметра  $\epsilon$ . Существование гомоклинических решений в уравнении (1.4) является препятствием к его интегрируемости [14, 15]. Решалась задача о существовании предельных циклов и квазиаттракторов в уравнении, близком по виду к (1.4) [16].

Известно, что невозмущенное уравнение  $x'' + \sin x = 0$  допускает первый интеграл (интеграл энергии)

$$H(x, y) \cong y^2/2 - \cos x = h = \text{const}, \quad y = x'$$

Значениям  $h \in (-1, 1)$  отвечают колебательные движения маятника, а значениям  $h > 1$  — вращательные. Особенностью уравнения математического маятника является специфика зависимости периода  $\tau$  от  $h$  в колебательной области:

$$\tau(h) = 4K(k), \quad k^2 = \rho = (1+h)/2, \quad -1 < h < 1 \quad (1.5)$$

Здесь  $K = K(k)$  — полный эллиптический интеграл первого рода,  $k$  — его модуль.

Из (1.5) следует, что период  $\tau$  заметно изменяется лишь при значениях  $h$ , близких к единице, т.е. в окрестности сепаратрисы. Поэтому малые интервалы по периоду  $\tau$ , определяющие ширину резонансных зон, приводят к достаточно большим интервалам по координате  $x$ . Следует также помнить, что значение собственной частоты  $\omega(h) = 2\pi/\tau$  при  $h = -1$  равно единице, в то время как для исходного уравнения оно равно  $\sqrt{mag/(J+ma^2)}$ .

**2. Структура резонансных зон.** При исследовании возмущенного уравнения остановимся прежде всего на вопросе о структуре резонансных зон, расположенных в областях  $G^1 = \{(x, \dot{x}): -1 < h_- \leq H(x, y) \leq h_+ < 1\}$  и  $G^2 = \{(x, \dot{x}): H(x, y) \geq h_+ > 1\}$ . Условие резонанса  $\tau(h_{pq}) = (p/q)(2\pi/\beta)$ , где  $p, q$  — взаимно простые целые числа, определяет резонансные уровни энергии:  $H(x, y) = h_{pq}$ .

Структура индивидуальных резонансных зон

$U_{\sqrt{\epsilon}} = \{(x, \dot{x}): h_{pq} - \sqrt{\epsilon}C < H(x, y) < h_{pq} + \sqrt{\epsilon}C\}$ ,  $C = \text{const}$  описывается (с точностью до членов  $O(\epsilon^{3/2})$ ) уравнением маятникового типа [6–8]

$$\frac{d^2v}{dt^2} - bA(v; h_{pq}) = \mu\sigma(v; h_{pq}) \frac{dv}{dt} \quad (2.1)$$

Здесь

$$A(v; h_{pq}) = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} F\left(h_{pq}, v + \frac{q\phi}{p}, \phi\right) d\phi \quad (2.2)$$

$$\sigma(v; h_{pq}) = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} \frac{\partial f(x, \dot{x}, \phi)}{\partial \dot{x}} d\phi \quad (2.3)$$

$$F = fx'_\phi, \quad f = [C_1 \cos \beta t \sin x + (C_2 + C_3 \cos x)x], \quad \tau = \mu t, \quad \mu = \sqrt{\epsilon}, \quad b = d\omega(I_{pq})/dI$$

$x = x(v + q\phi/p; h_{pq})$ ,  $\dot{x} = \dot{x}(v + q\phi/p; h_{pq})$  — решение невозмущенного уравнения на уровне  $H(x, \dot{x}) = h_{pq}$ .

При выводе (2.1) используются переменные действие ( $I$ ) — угол ( $\vartheta$ ),  $\vartheta = v + q\phi/p$ .

Невозмущенное решение для колебательной ( $-1 < h < 1$ ) и вращательной ( $h > 1$ ) области имеет вид

$$x(\vartheta) = 2 \arcsin\left(k \operatorname{sn} \frac{2K\vartheta}{\pi}\right), \quad \dot{x} = y = 2k \operatorname{cn} \frac{2K\vartheta}{\pi}, \quad \vartheta = \omega t, \quad \omega = \frac{\pi}{2K}, \quad -1 < h < 1 \quad (2.4)$$

$$x(\vartheta) = 2 \operatorname{am} \frac{K\vartheta}{\pi}, \quad y = \pm \frac{2}{k} \operatorname{dn} \frac{2K\vartheta}{\pi}, \quad \omega = \frac{\pi}{kK}, \quad k^2 = \frac{2}{1+h}, \quad h > 1$$

Так как функции  $A$  и  $\sigma$  различны в колебательной и вращательной областях, то введем обозначения  $A^{(s)}(\vartheta, h_{pq})$ ,  $\sigma^{(s)}(v, h_{pq})$ , где  $s = 1$  отвечает колебательной области, а  $s = 2$  — вращательной.

Функции  $A^{(s)}$ ,  $\sigma^{(s)}$  — периодические по  $v$  с наименьшим периодом  $2\pi/p$  [6]. Поскольку в рассматриваемом случае дивергенция векторного поля уравнения (1.4) не содержит членов, зависящих явно от времени  $t$ , то  $\sigma$  не зависит от  $v$  [17], т.е.  $\sigma = \text{const}$ .

Вычислим  $A^{(1)}$  и  $\sigma^{(1)}$ . Из (2.2) и полученных ранее результатов [16] следует

$$A^{(1)} = 2C_1 \frac{\rho}{\pi\omega q} \int_0^{2\pi q} \cos \frac{p(\vartheta - v)}{q} \operatorname{sn} \frac{2K\vartheta}{\pi} \operatorname{dn} \frac{2K\vartheta}{\pi} \operatorname{cn} \frac{2K\vartheta}{\pi} d\vartheta + \frac{8}{q\pi} [C_2 F_0^{(1)}(\rho) + C_3 F_1^{(1)}(\rho)] \quad (2.5)$$

$$F_0^{(1)} = (\rho - 1)K(k) + E(k), \quad F_1^{(1)} = [(1 - \rho)K(k) + (2\rho - 1)E(k)]/3, \quad \rho = k^2$$

где  $E = E(k)$  – полный эллиптический интеграл второго рода. Вычисление интеграла в (2.5) дает

$$A^{(1)} = C_1 \Gamma_p^{(1)} \sin(p\nu) + B^{(1)} \quad (2.6)$$

$$\Gamma_p^{(1)} = \begin{cases} 0 & \text{при } p \neq 2(2n-1) \text{ и/или } q > 1 \\ 8\beta^2 a_{p/2}^2 / p & \text{при } p = 2(2n-1) \text{ и } q = 1, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$a_{p/2} = \frac{\alpha^{p/4}}{1 - \alpha^{p/2}}, \quad \alpha = \exp\left(-\frac{\pi K(\sqrt{1-\rho})}{K(\sqrt{\rho})}\right), \quad B^{(1)} = \frac{8}{\pi} [C_2 F_0^{(1)} + C_3 F_1^{(1)}],$$

где  $B^{(1)}$  – порождающая функция Пуанкаре–Понтрягина для автономного уравнения ( $C_1 = 0$ , подробнее о порождающей функции см. в [6, 7]).

Из (2.3) находим

$$\sigma^{(1)}(\nu, h_{pq}) = C_2 + C_3(2E - K) / K$$

Аналогичные вычисления для вращательной области дают

$$A^{(2)} = C_1 \Gamma_p^{(2)} \sin p\nu + B^{(2)} \quad (2.7)$$

где  $p$  – нечетное число и

$$\Gamma_p^{(2)} = \begin{cases} 0 & \text{при } p \neq 2n-1 \text{ и/или } q > 1 \\ 4\beta^2 a_p^2 / p & \text{при } p = 2n-1 \text{ и } q = 1, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$a_p = \frac{\alpha^{p/2}}{1 - \alpha^p}, \quad B^{(2)} = \frac{8}{\rho^{1/2} \pi} [C_2 F_0^{(2)} + C_3 F_1^{(2)}]$$

$$F_0^{(2)} = E(\rho), \quad F_1^{(2)} = [2(\rho-1)K + (2-\rho)E] / (3\rho)$$

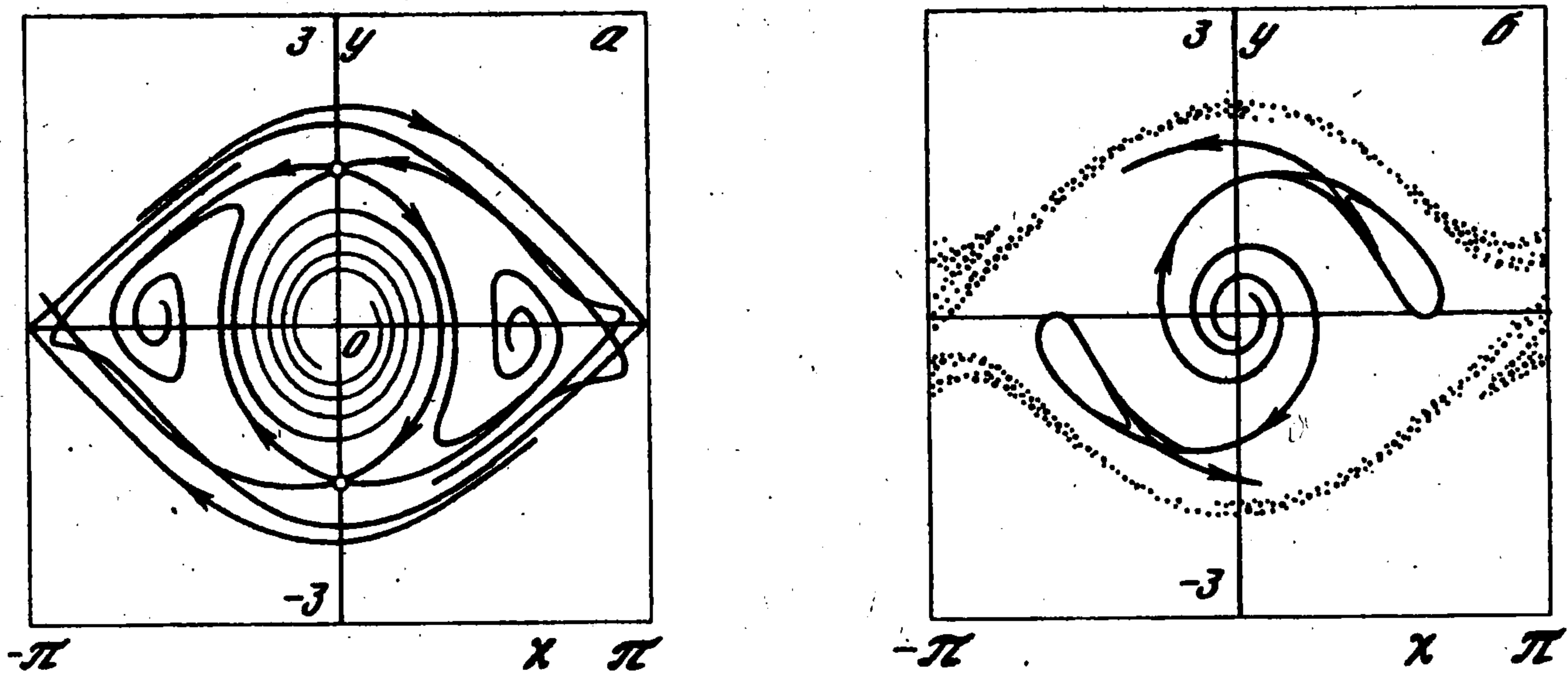
$$\sigma^{(2)}(\nu, h_{pq}) = C_2 + C_3((p-2)K + 2E) / (\rho K)$$

Из соотношений (2.6)–(2.7) следует, что ширина резонансной зоны, определяемая величиной  $C_1 \Gamma_p^{(s)}$ , быстро убывает с ростом  $p$ . Поэтому при  $C_2^2 + C_3^2 \neq 0$  трудно обнаружить резонансные режимы с  $p > 2$  в колебательной области и с  $p > 1$  – во вращательной области. Условие существования резонансного режима с  $p = 2$  согласно (2.6) имеет вид  $|C_1 \Gamma_2^{(1)}| > |B^{(1)}|$ . Например, при  $\beta = 1,6$  оно сводится к условию  $|C_1| > a_1 C_2 + a_2 C_3$ ,  $a_1 = 9,71$ ,  $a_2 = 6,41$ .

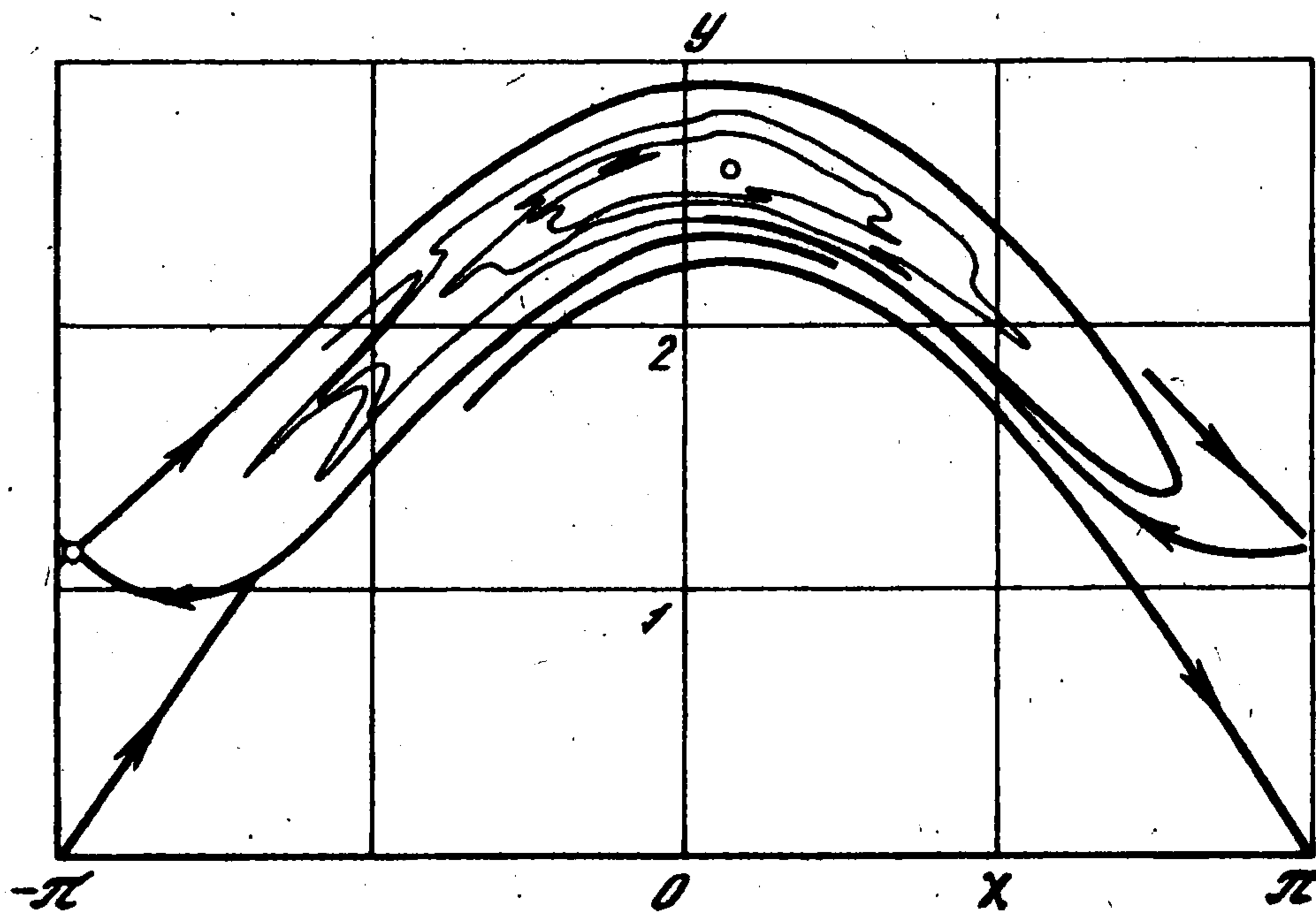
Переход от укороченной системы (2.1) к исходной системе (1.4) связан с хорошо известным результатом: если укороченная система (2.1) груба в смысле Андронова–Понтрягина, то малые добавки, которые появляются при переходе к исходной системе, существенно не изменят поведения решений (подробнее см., например, [7, 11]).

В силу условия  $\sigma^{(s)}(\rho_*) \neq 0$ , когда  $B^{(s)}(\rho_*) = 0$ , справедлива теорема 1 из [8], определяющая глобальное качественное поведение решений в областях  $G^{(s)}$  ( $s = 1, 2$ ).

Поведение инвариантных кривых отображения Пуанкаре для уравнения (1.3), полученное на компьютере, показано на фиг. 1, 2 при  $\beta = 1,6$ . На фиг. 1,а представлен случай синхронизации колебаний на субгармонике с  $p = 2$  ( $B(h_{21}) = 0$ ;  $p_1 = 0,1$ ,  $p_2 = 0,07$ ,  $p_3 = -0,1$ ), на фиг. 1,б показан частично проходимый резонанс с  $p = 2$  ( $p_1 = 0,1$ ,  $p_2 = 1/30$ ,  $p_3 = -0,1$ ). На фиг. 2 приведено поведение инвариантных кривых отображения Пуанкаре во вращательной области на верхнем полуцилиндре ( $x \bmod 2\pi$ ,  $y$ ;  $y > 0$ ) для уравнения (1.3) при  $p_1 = 0,1$ ,  $p_2 = 0,015$ ,  $p_3 = -0,1$  (картина поведения инвариантных



Фиг. 1



Фиг. 2

кривых на нижнем полуцилиндре ( $y < 0$ ) симметрична картине их поведения на верхнем полуцилиндре). В этом случае имеет место синхронизация колебаний на основном резонансе ( $p = 1, q = 1$ ). Резонансная зона для основного резонанса расположена вблизи сепаратрис неподвижной точки  $(\pi, 0)$ . С увеличением частоты  $\beta$  резонансный уровень  $H(x, y) = h_{11}$  поднимается вверх по цилиндру в соответствии с формулой для собственной частоты и условием резонанса. Видно общее согласие с теоретическими результатами. Однако усредненная система (2.1) не определяет нерегулярный характер установления резонансного режима, представленный на фиг. 2. Стрелки на фиг. 1, 2 указывают направление движения с ростом  $t$ .

Отметим, что в соответствии с (2.1), (2.6), (2.7) изменение знака у параметра  $p_1$  на противоположный приводит к тому, что седловые точки в резонансных зонах меняются на "устойчивые", а "устойчивые" – на седловые. Так, в случае резонанса с  $p = 2, q = 1$  это приводит к повороту картины поведения инвариантных кривых отображения Пуанкаре в резонансной зоне на  $90^\circ$  по часовой стрелке.

**3. Окрестность начала координат.** Обозначим  $U_n = \{(x, y): 0 \leq H(x, y) \leq C\varepsilon^{2/n}\}$  и сделаем в уравнении (1.4) замену

$$x = \varepsilon^{1/n} \xi, \quad y = \varepsilon^{1/n} \eta$$

В результате приходим к системе

$$\dot{\xi} = \eta, \quad \dot{\eta} = -\xi + \varepsilon[C_1 \xi \cos \beta t + (C_2 + C_3)\eta] + \varepsilon^{2/n} \xi^3 / 6 - \varepsilon^{1+2/n} (C_1 \xi^3 \cos \beta t / 6 + \xi^2 \eta) + \dots \quad (3.1)$$

Система (3.1) определена в  $D \otimes S^1$ , где  $D$  некоторая область из  $\mathbb{R}^2$ .

В окрестности  $U_1$  ( $n = 1$ ) система (3.1) принимает вид

$$\dot{\xi} = \eta, \quad \dot{\eta} = -\xi + \varepsilon[C_1 \xi \cos \beta t + (C_2 + C_3)\eta] + O(\varepsilon^2) \quad (3.2)$$

Если в (3.2) пренебречь членами  $O(\varepsilon^2)$ , то приходим к уравнению Матье с дополнительным слагаемым, учитывающим вязкое трение. Ясно, что в рамках линейного уравнения нельзя получить нелинейные эффекты, связанные с переходом от нелинейного резонанса к параметрическому. Поэтому рассмотрим более широкую окрестность  $U_2$  ( $n = 2$ ) начала координат. В этом случае, пренебрегая в (3.1) членами  $O(\varepsilon^2)$ , получаем систему, для которой будем рассматривать резонансные случаи, когда  $\omega = 1 = q\beta/p$ , где  $p$  и  $q$  — взаимно простые целые числа. Для исследования бифуркаций, связанных с переходом от параметрического резонанса к обычному резонансу, введем расстройку  $1 - q\beta/p = \gamma_1 \varepsilon$ . В результате рассматриваемая система переписывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (q\beta/p)\eta + \gamma_1 \varepsilon \\ \dot{\eta} &= -(q\beta/p)\xi + \varepsilon[C_1 \xi \cos \beta t + (C_2 + C_3)\eta - \gamma_1 \xi + \xi^3 / 6] \end{aligned} \quad (3.3)$$

При выводе уравнения (2.1) использованы переменные действие ( $I$ )—угол ( $\vartheta$ ) [6, 7]. Здесь также воспользуемся этими переменными. Поскольку невозмущенная система линейная, то эта замена принимает простой вид  $\xi = \sqrt{2I} \sin \vartheta$ ,  $\eta = \sqrt{2I} \cos \vartheta$ . После этой замены система (3.3) запишется в виде

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon F(I, \vartheta, \varphi), \quad \dot{\vartheta} = q\beta/p - \varepsilon R(I, \vartheta, \varphi), \quad \dot{\varphi} = \beta \\ F &= 2IG \cos \vartheta - \gamma_1 \sqrt{2I} \sin \vartheta, \quad R = G \sin \vartheta + \gamma_1 \cos \vartheta / \sqrt{2I} \\ G &= C_1 \sin \vartheta \cos \varphi + (C_2 + C_3) \cos \vartheta - \gamma_1 \sin \vartheta + (1/3) \sin^3 \vartheta \end{aligned} \quad (3.4)$$

Введем в (3.4) "резонансную фазу"  $\psi = \vartheta - q\varphi/p$  и усредним полученную систему по одной "быстрой" переменной  $\varphi$ . В результате приходим к двумерной автономной системе

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \varepsilon[(C_1/2)u \sin(2v) + (C_2 + C_3)u] \\ \dot{v} &= \varepsilon[(C_1/4) \sin(2v) - u/8 - \gamma_1/2] \end{aligned} \quad (3.5)$$

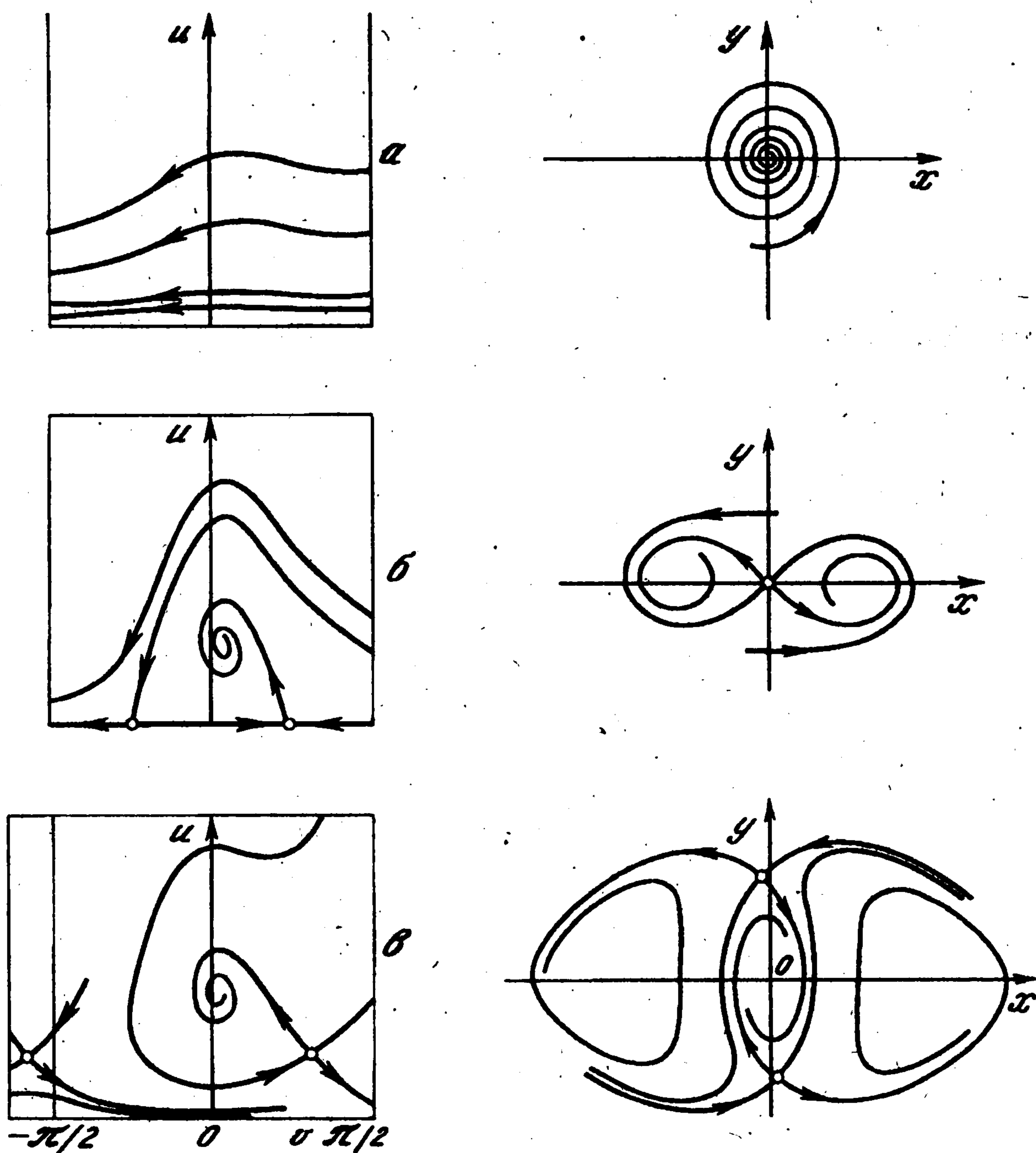
при  $p = 2$  и  $q = 1$ , и к системе

$$\dot{u} = \varepsilon(C_2 + C_3)u, \quad \dot{v} = \varepsilon(-u/8 - \gamma_1/2) \quad (3.6)$$

при  $p \neq 2$  и/или  $q > 1$ . Как известно [6],  $u = I + O(\varepsilon)$ ,  $v = \psi + O(\varepsilon^2)$ . Из (3.5), (3.6) следует, что в окрестности  $U_2$  в данном приближении проявляется лишь один резонанс с  $p = 2$ ,  $q = 1$ .

Обратимся к системе (3.5). Фазовым пространством системы (3.5) служит цилиндр  $\{v \bmod (\pi), u\}$ . Эта система при  $C_2 = C_3 = 0$ ,  $\gamma_1 = 0$  гамильтонова с гамильтонианом  $H(u, v) = -\varepsilon C_1 u \cos(2v)/4 + \varepsilon u^2/16$ .

Исследование системы (3.5) при  $C_2^2 + C_3^2 \neq 0$  и разных значениях расстройки  $\gamma_1$  не представляет особого труда, ибо, согласно критерию Бендиксона, отсутствуют предельные циклы. Наиболее характерные грубые (в смысле Андронова—Понтрягина) фазовые портреты приведены на фиг. 3, где наряду с фазовыми портретами в плоскости  $(u, v)$  показаны соответствующие фазовые портреты в декартовых



Фиг. 3

координатах  $(x, y = \dot{x})$ . Фиг. 3,а соответствуют случаю, когда в системе (3.5)  $\gamma_1 > \gamma_* > 0$ ,  $\gamma_* = \sqrt{C_1^2 - 4(C_2 + C_3)^2} / 2$ , фиг. 3,б – случаю, когда  $|\gamma_1| \leq \gamma_*$  и фиг. 3,в – случаю  $|\gamma_1| > \gamma_*$ ,  $\gamma_1 < 0$ . Кроме этого, во всех трех случаях  $C_2 + C_3 < 0$ .

В случае, когда параметр  $\epsilon$  не мал, отображение Пуанкаре в окрестности начала координат приводит к фазовым портретам в плоскости  $(x, y)$ , соответствующим рис. 143 из [10] для "главной деформации 2-эквиариантного поля". Отметим, что главные деформации из [10] не дают фазовый портрет, представленный на фиг. 3,в и его модификации при наличии предельного цикла. Последние соответствуют прохождению цикла через резонансную зону [7, 8] и, естественно, не описываются классической локальной теорией.

**4. Окрестность сепаратрисы.** Как известно, в окрестности невозмущенной сепаратрисы может существовать гомоклиническая структура Пуанкаре и связанное с ней нерегулярное поведение решений. Условие существования такой структуры получается с помощью функции Мельникова [18]  $\Delta_\epsilon(t) = \epsilon \Delta_1(t) + O(\epsilon^2)$ , где

$$\Delta_1(t) = E \sin(\beta t) + E_*; \quad E = -\frac{2C_1 \pi \beta^2}{\text{sh}(\pi \beta / 2)}, \quad E_* = 4\pi \left( C_2 + \frac{C_3}{3} \right)$$

Здесь использовано невозмущенное решение на сепаратрисе, получающееся из (2.4) при  $k = 1$ .

Заметим, что функцию, решающую вопрос о существовании гомоклинической структуры, можно определить как предел  $L$  функции  $2\pi p A(-\beta t'; h_{p1})$  при  $h_{p1} \Rightarrow 1$ , где  $-\beta t'$  заменяет аргумент  $p\nu$  в  $A$ . Последнее связано с тем, что подынтегральные выражения в определении  $A$  (см. формулу (2.2)) и в определении функции Мельникова имеют один и тот же вид с несколькими отличными аргументами ( $\beta(t - t')$  в  $\Delta_1$  и  $t + p\nu/q\beta$  в  $A$ ). Очевидно, эти функции содержат одни и те же гармоники.

Предел  $L$  можно вычислить либо при  $h \Rightarrow 1 - 0$  (из колебательной области, обозначим его  $L^-$ ), либо при  $h \Rightarrow 1 + 0$  (из вращательной области, обозначим его  $L^+$ ). В нашем случае  $L^- = 2L^+$ . Подобное соотношение связано с тем, что в невозмущенном уравнении предел из колебательной области сразу дает две петли сепаратрисы (сепаратрисный контур), в то время как предел из вращательной области дает лишь одну петлю сепаратрисы. Тогда в автономном уравнении (1.4) ( $C_1 = 0$ ) можно определить непрерывную глобальную порождающую функцию Пуанкаре–Понтрягина для всех значений  $h \in (-1, \infty)$ .

Значение  $E$  характеризует величину расщепления сепаратрисы в консервативном случае, а также в неконсервативном при  $C_2 = -C_3/3$ . При  $|E| = |E_*|$  имеем (с точностью до членов  $O(\epsilon)$ ) касание соответствующих сепаратрис неподвижной точки  $(\pi, 0)$ .

Отметим, что здесь, так же как и для уравнения Дюффинга [11], нетривиальное гиперболическое множество появляется до момента касания. При выполнении условия  $C_2 = -C_3/3$ ,  $C_2^2 + C_3^2 \neq 0$  в возмущенной автономной системе ( $C_1 = 0$ ) предельный цикл образует сепаратрисный контур. В неавтономной системе ( $C_1 \neq 0$ ) в этом случае существует квазиаттрактор [16], если  $\epsilon \sigma^{(s)}(1) = \epsilon(C_2 - C_3) < 0$ .

Отметим, что "амплитуда"  $E$  экспоненциально убывает с ростом частоты  $\beta$ . Поэтому ширина (по энергии  $h$ ) окрестности, содержащей квазиаттрактор, быстро убывает с ростом  $\beta$ . При  $|E| < |E_*| + O(\epsilon)$  сепаратрисы неподвижной точки  $(\pi, 0)$  не пересекаются. Однако они пересекаются с сепаратрисами гиперболических периодических (неподвижных) точек, расположенных в окрестностях расщепляемых резонансных уровней (если такие существуют).

Именно эта ситуация показана на фиг. 1,а. Подобные пересечения сепаратрис дают гетероклинические точки. На фиг. 1,б показан "квазиаттрактор" ( $B^{(1)}(1) = B^{(2)}(1) = 0$ ), полученный на компьютере для уравнения (1.3) при  $p_1 = 0,1$ ,  $p_2 = 1/30$ ,  $p_3 = -0,1$ ;  $\beta = 1,6$ . Этот квазиаттрактор содержит около 5000 итераций одной начальной точки. Заслуживает внимание достаточно большой размер "ширины" окрестности квазиаттрактора при малой амплитуде  $p_1$  внешней силы (ср. с [16]). На фиг. 1,б также показан частично проходимый резонанс с  $p = 2$ ,  $q = 1$ . Области притяжения резонансного режима очень тонкие (на фиг. 1,б сливаются в спиральные линии). Поэтому, если взять начальную точку в окрестности начала координат, то с вероятностью, близкой к единице, в системе устанавливается нерегулярный режим, отвечающий квазиаттрактору.

**5. Заключение.** Формулы (2.6)–(2.7) позволяют получить количественные оценки существования того или иного резонансного режима и месторасположение соответствующей резонансной зоны. Число расщепляемых резонансов при  $C_2^2 + C_3^2 \neq 0$  ограничено. При реальных движениях маятника (1.3), когда присутствуют малые неконсервативные силы, в колебательной области наиболее вероятен один резонансный режим с  $p = 2$ ,  $q = 1$ , а во вращательной – с  $p = 1$ ,  $q = 1$ .

Отметим также следующие моменты в исследовании уравнений (1.3), (1.4).

1°. Переход от фиг. 3,а к фиг. 3,в соответствует двум бифуркациям "удвоения периода", причем переход от параметрического резонанса (фиг. 3,б) к обычному нелинейному резонансу (фиг. 3,в) связан с бифуркацией рождения из сложной седловой неподвижной точки двух периодических (период равен двум) седловых точек и узла (фокуса).

2°. Наиболее интересна бифуркация появления в окрестности невозмущенной сепаратрисы квазиаттрактора (фиг. 1,б): Она имеет место при любых амплитудах внешней силы (параметр  $C_1$ ): достаточно лишь, чтобы  $B^{(s)}(1) = 0$ , ( $C_2 = -C_3/3$ ),  $\varepsilon(C_2 - C_3) < 0$ , например,  $C_2 = -1/30$ ,  $C_3 = 0,1$ ,  $\varepsilon > 0$ .

3°. В квазиинтегрируемом неконсервативном случае не проявляются резонансы с  $q > 1$  и нечетными  $p$  в колебательной области и резонансы с  $q > 1$  и четными  $p$  – во вращательной области.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы "Университеты России" (Фундаментальные проблемы математики и механики, 3.3.20) и Российского фонда фундаментальных исследований.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Struble R.A.* Oscillations of a pendulum under parametric excitation // *Quart Appl. Math.* 1963. V. 21. N 2. P. 121–131.
2. *Struble R.A., Marlin J.A.* Periodic motion of a simple pendulum with periodic disturbance // *Quart J. Mech. and Appl. Math.* 1965. V. 18. N 4. P. 405–417.
3. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат. 1956. 600 с.
4. *Заславский Г.М., Чириков Б.В.* Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний // *Успехи физ. наук.* 1971. Т. 105. Вып. 1. С. 3–39.
5. *Волосов В.М., Моргунов Б.И.* Методы осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М.: Изд-во МГУ, 1971. 507 с.
6. *Морозов А.Д.* Системы, близкие к нелинейным интегрируемым. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1983. 96 с.
7. *Морозов А.Д., Шильников Л.П.* О неконсервативных периодических системах, близких к двумерным гамильтоновым // *ПММ.* 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 385–394.
8. *Morozov A.D.* On the global behavior of self-oscillatory systems // *Intern. J. Bifurcation and Chaos.* 1993. V. 3. N 1. P. 195–200.
9. *Морозов А.Д.* О качественном поведении решений в окрестности нелинейного центра двумерных периодических по времени систем, близких к гамильтоновым // *Прикладные проблемы теории колебаний.* Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1990. С. 119–132.
10. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.
11. *Морозов А.Д.* О полном качественном исследовании уравнения Дюффинга // *Дифференц. уравнения.* 1976. Т. 12. N 2. С. 241–255.
12. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 2. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1972. 999 с.
13. *Birkhoff G.D.* Collected Mathematical Papers. V. 2. New York: Amer. Math. Soc., 1950. 334 p.
14. *Cherry T.M.* The asymptotical solutions of the analytical hamiltonian systems // *J. Different. Equat.,* 1969. V. 4. N 2. P. 142–156.
15. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // *Успехи матем. наук.* 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3–67.
16. *Морозов А.Д.* О предельных циклах и хаосе в уравнениях маятникового типа // *ПММ.* 1989. Т. 53. Вып. 5. С. 721–730.
17. *Морозов А.Д.* О резонансах и хаосе в параметрических системах // *ПММ.* 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 41–51.
18. *Мельников В.К.* Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // *Тр. Моск. мат. о-ва.* 1963. Т. 12. С. 3–52.