УДК 531.36:534.1

© 1995 г. О.В. Холостова

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ МАЯТНИКА ПРИ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ ВИБРАЦИЯХ ТОЧКИ ПОДВЕСА

Рассматривается движение математического маятника, точка подвеса которого совершает горизонтальные гармонические колебания малой амплитуды. Установлена неинтегрируемость уравнения движения маятника. Найдено периодическое движение маятника, рождающееся из устойчивого положения равновесия, и исследована его устойчивость. Указаны неустойчивые периодические движения, рождающиеся из неустойчивых положений равновесия, и определены сепаратрисные поверхности, асимптотические к этим движениям. Изучен вопрос о существовании и устойчивости периодических движений маятника, рождающихся из его колебаний с произвольной амплитудой и вращений с произвольной средней угловой скоростью.

Ранее был рассмотрен [1] ряд общих вопросов о существовании периодических движений маятника с горизонтальными вибрациями точки подвеса. Изучено [2, 3] движение маятника в окрестности резонанса, когда частота вибраций точки подвеса маятника близка к частоте его собственных малых колебаний. Исследовались [4] субгармонические колебания маятника, возбуждаемые горизонтальными колебаниями его точки подвеса.

1. Постановка задачи. Пусть маятник имеет длину l, а его точка подвеса совершает горизонтальные гармонические колебания с амплитудой a и частотой Ω. Будем полагать, что амплитуда колебаний точки подвеса маятника мала по сравнению с его длиной, так что $\varepsilon = a/l \ll 1$. Перейдя к безразмерным времени $\tau = \Omega t$ и частоте $\omega_0^2 = g/(\Omega^2 l)$, запишем уравнение движения маятника в виде

$$q'' + \omega_0^2 \sin q = \varepsilon \sin\tau \cos q \tag{1.1}$$

где q – угол отклонения маятника от вертикали, а штрих означает дифференцирование по τ.

Уравнение (1.1) можно представить также в виде канонических уравнений

$$\frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{1.2}$$

где введен импульс $p = q'$, а функция Гамильтона имеет вид

$$H = H_0 + \varepsilon H_1; \quad H_0 = \frac{1}{2}p^2 - \omega_0^2 \cos q, \quad H_1 = -\sin\tau \sin q \tag{1.3}$$

При $\varepsilon = 0$ уравнение (1.1) представляет собой известное уравнение колебаний математического маятника. Его постоянные решения $q = 0 \pmod{2\pi}$ и $q = \pi \pmod{2\pi}$ соответствуют устойчивому нижнему и неустойчивому верхнему положениям равновесия. Отличные от постоянных решения отвечают либо колебаниям маятника с произвольной амплитудой, либо вращениям с произвольной средней угловой скоростью, либо асимптотическим движениям.

Асимптотическим движениям маятника соответствует движение по сепаратрисам, разделяющим области колебаний и вращений в плоскости (q, p). Обозначим через S^+ и S^- сепаратрисы в верхней и нижней полуплоскости соответственно и будем задавать их следующими уравнениями, полученными при интегрировании (1.2), (1.3) при $\varepsilon = 0$:

$$p = \pm\frac{2\omega_0}{\operatorname{ch}\omega_0\tau}, \quad \cos q = \frac{2}{\operatorname{ch}^2\omega_0\tau} - 1 \tag{1.4}$$

где верхний знак отвечает кривой S^+, а нижний – S^-.

В следующих разделах изучается движение маятника при достаточно малых, но отличных от нуля значениях ε.

2. Расщепление сепаратрис и неинтегрируемость уравнения (1.1). Если точка подвеса маятника неподвижна ($\varepsilon = 0$), то имеет место интеграл энергии $H_0 = \text{const}$. Покажем, что при достаточно малых, но отличных от нуля значениях ε, система уравнений (1.2) с гамильтонианом (1.3) не имеет вещественно-аналитического первого интеграла, отличного от константы. Для этого воспользуемся результатами работ [5, 6].

Рассмотрим функцию

$$J(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} (H_0, H_1)\,d\tau$$

где скобка Пуассона (H_0, H_1) вычисляется на невозмущенной сепаратрисе S^+ или S^-, а в H_1 сделана замена τ на $\tau + \alpha$. Используя формулы (1.3), (1.4), получим

$$J(\alpha) = \pm 2\omega_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\tau+\alpha)}{\operatorname{ch}\omega_0\tau}\left(\frac{2}{\operatorname{ch}^2\omega_0\tau} - 1\right)d\tau \tag{2.1}$$

где верхний знак относится к сепаратрисе S^+, а нижний – к S^-.

После преобразования подынтегрального выражения в (2.1) и интегрирования по частям с использованием известных формул [7] получим

$$J(\alpha) = \pm 2\pi\left(\omega_0^2 \operatorname{ch}\frac{\pi}{2\omega_0}\right)^{-1} \sin\alpha \tag{2.2}$$

Из (2.2) очевидно следует, что как для S^+, так и для S^- функция $J(\alpha)$ не является тождественным нулем и меняет знак. Это означает расщепление и пересечение обеих пар сепаратрис и отсутствие первого интеграла системы уравнений (1.2), (1.3) [5].

3. Периодические движения, рождающиеся из устойчивых положений равновесия. Пусть частота ω_0 не близка к целому числу. Тогда, согласно методу Пуанкаре [8], при достаточно малых значениях ε существует единственное 2π-периодическое решение q_* уравнения (1.1), аналитическое по ε и переходящее при $\varepsilon = 0$ в решение $q = 0$.

$$q_* = \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2 + \varepsilon^3 q_3 + \ldots \tag{3.1}$$

Из (1.1) и (3.1) следует, что в (3.1) $q_i \equiv 0$, если i четно, а для нечетных i имеем

$$q_1 = \frac{\sin\tau}{\omega_0^2 - 1}, \quad q_3 = \frac{3 - 2\omega_0^2}{24(\omega_0^2 - 1)^3}\left[\frac{3\sin\tau}{\omega_0^2 - 1} - \frac{\sin 3\tau}{\omega_0^2 - 9}\right], \ldots \tag{3.2}$$

Устойчивость в первом приближении. Положим $q = q_* + x$, тогда линеаризованное уравнение возмущенного движения при учете (3.1), (3.2) запишем в виде

$$x'' + \left[\omega_0^2 + \varepsilon^2\frac{\omega_0^2 - 2}{2(\omega_0^2 - 1)^2}\sin^2\tau + O(\varepsilon^4)\right]x = 0 \tag{3.3}$$

Можно проверить, при учете (1.1), (3.1), что в уравнении (3.3) члены $O(\varepsilon^4)$ содержат только четные гармоники.

При $\varepsilon = 0$ имеем устойчивость. При достаточно малых отличных от нуля значениях ε неустойчивость для линейного дифференциального уравнения (3.3) с периодическими коэффициентами возможна [9] вследствие параметрического резонанса, когда величина $2\omega_0$ равна четному целому числу. Но эти значения ω_0 исключены из рассмотрения и, таким образом, в изучаемом нерезонансном случае (частота ω_0 не близка к целому числу) решение $q = q_*$ при достаточно малых ε устойчиво в первом приближении.

Нелинейный анализ устойчивости. Для строгого решения вопроса об устойчивости решения (3.1), (3.2) воспользуемся методами исследования гамильтоновых систем, изложенными в [10].

Найдем предварительно характеристические показатели $\pm i\lambda$ для линеаризованного уравнения возмущенного движения (3.3). Ищем решение уравнения (3.3) в виде [11]

$$x = ze^{i\lambda\tau}$$

где 2π-периодическая функция вермени $z(\tau)$ и величина λ представляются в виде рядов по степеням ε:

$$z = z_0 + \varepsilon z_1 + \varepsilon^2 z_2 + \ldots, \qquad \lambda = \omega_0 + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \ldots$$

Составляя дифференциальные уравнения для функций $z_i(\tau)$ и используя условие периодичности их решений, получим выражение для характеристического показателя уравнения (3.3)

$$\lambda = \omega_0 + \varepsilon^2 \frac{\omega_0^2 - 2}{8\omega_0(\omega_0^2 - 1)^2} + O(\varepsilon^4) \tag{3.4}$$

Сделаем в гамильтониане (1.3) замену переменных, введя возмущения решения $q_*(\tau)$, $p_*(\tau) \equiv dq_*/d\tau$ по формулам

$$q = x + q_*(\tau), \quad p = y + p_*(\tau)$$

Гамильтониан возмущенного движения представляется в виде ряда

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots \tag{3.5}$$

где H_k – форма степени k относительно x, y с 2π-периодическими по τ коэффициентами:

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(\omega_0^2 \cos q_* + \varepsilon \sin\tau \sin q_*)x^2 \\ H_3 &= \frac{1}{6}(-\omega_0^2 \sin q_* + \varepsilon \sin\tau \cos q_*)x^3 \\ H_4 &= -\frac{1}{24}(\omega_0^2 \cos q_* + \varepsilon \sin\tau \sin q_*)x^4 \end{aligned} \tag{3.6}$$

При помощи линейной 2π-периодической замены переменных $x, y \to x_*, y_*$ (отличающейся от тождественной членами порядка ε^2) гамильтониан H_2 можно привести к виду $H_2 = \lambda(x_*^2 + y_*^2)/2$. Если затем положить

$$x_* = \sqrt{\frac{2r}{\omega_0}}\sin\varphi, \quad y_* = \sqrt{2\omega_0 r}\cos\varphi$$

то гамильтониан возмущенного движения запишется в виде (3.5), где

$$H_2 = \lambda r, \quad H_3 = -\frac{\sqrt{2}r\sqrt{r}\sin^3\varphi}{3\omega_0\sqrt{\omega_0}}[\varepsilon\sin\tau + O(\varepsilon^2)]$$

$$H_4 = \left(-\frac{1}{6} + O(\varepsilon^2)\right)r^2\sin^4\varphi \tag{3.7}$$

Рассмотрим устойчивость движения (3.1), (3.2) для значений ω_0, ε, лежащих на кривых резонансов третьего и четвертого порядков, когда величины 3λ и 4λ соответственно равны целому числу.

Вычисления показывают, что в случае резонанса $3\lambda = 1$ гамильтониан (3.5), (3.7) при помощи нелинейного канонического преобразования $\varphi, r \to \psi, \rho$ приводится к виду

$$H = \lambda\rho + \varepsilon\alpha\rho\sqrt{\rho}\cos 3\psi + O(\rho^2), \quad \alpha = \sqrt{6}/8 + O(\varepsilon) \tag{3.8}$$

Так как при $\varepsilon = 0$ коэффициент α в резонансном члене в (3.8) отличен от нуля, то на резонансной кривой $3\lambda = 1$ периодическое движение (3.1), (3.2) неустойчиво [10], если ε достаточно мало. Уравнение этой кривой может быть получено из (3.4) и имеет вид

$$\omega_0 = \frac{1}{3} + \varepsilon^2\frac{459}{512} + \ldots$$

В случае резонансов $3\lambda = k$, где k четно, форма H_3 в гамильтониане (3.5), (3.7) уничтожается при нормализации, так как в ней отсутствуют соответствующие резонансные члены (это следует из структур формы H_3 из (3.6) и решения (3.1)). Следовательно, на соответствующих резонансных кривых решение (3.1), (3.2) устойчиво по Ляпунову.

При резонансах $3\lambda = k$, где k нечетно и $k \geqslant 5$, резонансные члены в форме H_3 появляются в слагаемых порядка ε^k; вопрос об устойчивости решения (3.1), (3.2) в этом случае не исследовался.

Вне кривых резонансов третьего порядка гамильтониан возмущенного движения при помощи нелинейной канонической замены переменных приводится к следующей нормальной форме:

$$H = \lambda\rho + c\rho^2 + \beta\rho^2\cos 4\psi + O(\rho^{5/2})$$

с постоянными коэффициентами β и c. Изучаемое движение устойчиво по Ляпунову, если $|c| > |\beta|$, и неустойчиво при $|c| < |\beta|$ [10].

Вычисления показывают, что $c = -1/16 + O(\varepsilon^2)$. Если параметры ω_0, ε не лежат на кривых резонансов четвертого порядка, то $\beta = 0$; если же ω_0, ε лежат на этих кривых, то $\beta = O(\varepsilon^2)$, и, таким образом, периодическое движение (3.1), (3.2) при достаточно малых значениях ε устойчиво по Ляпунову как при наличии резонансов четвертого порядка, так и при их отсутствии.

4. Решения, рождающиеся из неустойчивых положений равновесия. Неустойчивые при $\varepsilon = 0$ положения равновесия $(-\pi, 0)$ и $(\pi, 0)$ при достаточно малых значениях ε переходят, согласно методу малого параметра Пуанкаре [8], в 2π-периодические решения, аналитические по ε. Эти решения имеют вид

$$q^* = \pm\pi + \frac{\varepsilon}{\omega_0^2 + 1}\sin\tau + O(\varepsilon^3), \quad p^* = \frac{\varepsilon}{\omega_0^2 + 1}\cos\tau + O(\varepsilon^3) \tag{4.1}$$

Решения (4.1) неустойчивы, что следует из непрерывности по ε характеристических показателей соответствующих линейных уравнений возмущенного движения.

Определим, согласно [12], вещественную, 2π-периодическую по τ, аналитическую по ξ, η, ε замену переменных

$$q = q^* + Q(\xi,\eta,\tau,\varepsilon), \quad p = p^* + P(\xi,\eta,\tau,\varepsilon) \tag{4.2}$$

приводящую гамильтониан возмущенного движения к нормальной форме $H = H(\zeta)$, где

$$\zeta = \xi\eta, \quad H = \lambda\zeta + a_2\zeta^2 + a_3\zeta^3 + \ldots \ (\lambda, a_2, a_3, \ldots - \text{const}) \tag{4.3}$$

Соответствующая (4.3) система уравнений имеет решение

$$\zeta = \text{const}, \quad \xi = \xi_0 \exp[(\partial H/\partial\zeta)\tau], \quad \eta = \eta_0 \exp[-(\partial H/\partial\zeta)\tau]$$

Равенства $\eta = 0$ и $\xi = 0$ определяют двумерные поверхности

$$q = q^* + Q(\xi,0,\tau,\varepsilon), \quad p = p^* + P(\xi,0,\tau,\varepsilon)$$

и

$$q = q^* + Q(0,\eta,\tau,\varepsilon), \quad p = p^* + P(0,\eta,\tau,\varepsilon)$$

состоящие из решений, асимптотических к решению q^*, p^* соответственно при $\tau \to -\infty$ и $\tau \to +\infty$. Эти поверхности называют выходящей и входящей сепаратрисами соответственно.

Вычисления показывают, что нормализующее преобразование (4.2) получается в результате проведения следующей последовательности канонических замен переменных:

$$q = q^* + x, \quad p = p^* + y \tag{4.4}$$

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2\omega_0}}, \quad y = \sqrt{\frac{\omega_0}{2}}(x' + y') \tag{4.5}$$

$$x' = x'' - \frac{\varepsilon}{\chi}(A^- x''^2 - 2A^+ x'' y'' + B^+ y''^2) \tag{4.6}$$

$$y' = y'' + \frac{\varepsilon}{\chi}(B^- x''^2 + 2A^- x'' y'' - A^+ y''^2)$$

$$\chi = 4\sqrt{2}\omega_0\sqrt{\omega_0}(\omega_0^2 + 1), \quad A^\pm = \frac{\pm\omega_0 \sin\tau + \cos\tau}{\omega_0^2 + 1}, \quad B^\pm = \frac{3\omega_0 \sin\tau \pm \cos\tau}{9\omega_0^2 + 1}$$

$$x'' = \xi - \frac{1}{48\omega_0}\xi^3 + \frac{1}{16\omega_0}\xi\eta^2 - \frac{1}{96\omega_0}\eta^3$$

$$y'' = \eta - \frac{1}{96\omega_0}\xi^3 + \frac{1}{16\omega_0}\xi^2\eta - \frac{1}{48\omega_0}\eta^3 \tag{4.7}$$

Нормализованный гамильтониан при этом имеет вид

$$H = \omega_0\xi\eta + \frac{1}{16}(\xi\eta)^2 + O(\varepsilon^2) + O((\xi\eta)^{5/2}) \tag{4.8}$$

Если в (4.8) отбросить два последних слагаемых, то общее решение соответствующей (4.8) системы уравнений задается равенствами

$$\xi = \xi_0 e^{\kappa\tau}, \quad \eta = \eta_0 e^{-\kappa\tau}, \quad \kappa = \omega_0 + \frac{1}{8}\xi_0\eta_0 \tag{4.9}$$

Асимптотическими к (4.9) будут следующие решения:

$$\xi = \xi_0 e^{\omega_0\tau}, \quad \eta = 0; \quad \xi = 0, \quad \eta = \eta_0 e^{-\omega_0\tau} \tag{4.10}$$

Подставив (4.10) в формулы (4.4)–(4.7), задающие нормализующее преобразование, получим сепаратрисные поверхности для каждого из решений (4.1).

При $\varepsilon = 0$ выходящая из точки $(-\pi, 0)$ (выходящая из $(\pi, 0)$) и входящая в точку $(\pi, 0)$ (входящая в $(-\pi, 0)$) сепаратрисы совпадают и представляют собой кривую S^+ (S^-), задаваемую равенствами (1.4). При $\varepsilon \neq 0$ имеет место расщепление сепаратрис, как это следует из результатов разд. 2.

5. Периодические движения, рождающиеся из колебаний и вращений, и их устойчивость. Изучим вопрос о существовании и устойчивости периодических движений, рождающихся из колебаний маятника с произвольной амплитудой и его вращений с произвольной средней угловой скоростью.

Запишем гамильтониан H_0 из (1.3) в переменных действие–угол I, w, произведя каноническую, унивалентную, 2π-периодическую по w замену переменных $p, q \to I, w$ [13], которая в области колебаний имеет вид

$$q = 2\arcsin[k_1 \operatorname{sn}(2\pi^{-1}K(k_1)w, k_1)], \quad p = 2\omega_0 k_1 (2\pi^{-1}K(k_1)w, k_1) \tag{5.1}$$

а в области вращений

$$q = \pm 2\operatorname{am}(\pi^{-1}K(k_2)w), \quad p = \pm 2\omega_0 k_2^{-1} \operatorname{dn}(\pi^{-1}K(k_2)w) \tag{5.2}$$

Верхний и нижний знаки в (5.2) отвечают вращениям маятника против и по часовой стрелке соответственно.

В (5.1) и (5.2) sn, cn, am и dn – эллиптические синус, косинус, амплитуда и дельта амплитуды; $K(k_i)$ ($i = 1,2$) – полный эллиптический интеграл первого рода. Величины k_i – функции переменной действия I, задаваемые равенствами

$$I = \frac{8\omega_0}{\pi}[E(k_1) - (1 - k_1^2)K(k_1)], \quad I = \frac{4\omega_0 E(k_2)}{\pi k_2}$$

где $E(k_i)$ – полный эллиптический интеграл второго рода.

В результате замены (5.1) или (5.2) гамильтониан (1.3) примет вид

$$H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, w, \tau), \quad H_0(I) = 2\omega_0^2\zeta \tag{5.3}$$

где $\zeta = k_1^2$ в случае колебаний и $\zeta = k_2^{-2}$ в случае вращений, а функция $H_1(I, w, \tau)$ получается в результате подстановки (5.1) или (5.2) в выражение для H_1 из (1.3).

Решение соответствующей гамильтониану (5.3) невозмущенной (при $\varepsilon = 0$) системы уравнений записывается в виде

$$I = I_0, \quad w = \omega(I)\tau + w_0$$

где частота $\omega(I) = \partial H_0/\partial I$ в случаях колебаний и вращений маятника определяется соответственно выражениями

$$\omega_1 = \frac{\pi\omega_0}{2K(k_1)}, \quad \omega_2 = \frac{\pi\omega_0}{k_2 K(k_2)} \tag{5.4}$$

Пусть при некотором значении $I = I_0$ частота – рациональное число: $\omega = rs^{-1}$. Тогда в невозмущенном движении имеем $2\pi s/r$-периодическое решение вида

$$I = I_0, \quad w = rs^{-1}\tau + w_0 \tag{5.5}$$

Выясним вопрос о существовании и устойчивости периодических решений системы уравнений с гамильтонианом (5.3) при $\varepsilon \neq 0$, переходящих при $\varepsilon = 0$ в решения (5.5). Для этого воспользуемся теоремой [14], которая состоит в следующем.

Пусть $\bar{H}_1(I_0, w_0)$ – среднее значение функции H_1 на невозмущенном движении (5.5), т.е.

$$\bar{H}_1 = \frac{1}{2\pi s}\int_0^{2\pi s} H_1(I_0, rs^{-1}\tau + w_0, \tau)d\tau$$

и выполняются следующие три условия:

1) при $I = I_0$

$$\partial^2 H_0 / \partial I^2 \neq 0 \tag{5.6}$$

2) существует $w_0 = \overset{*}{w}_0$, такое, что

$$\partial\bar{H}_1 / \partial w_0 = 0 \tag{5.7}$$

3) при этом

$$\partial^2\bar{H}_1 / \partial w_0^2 \neq 0 \tag{5.8}$$

Тогда существует $2\pi s$-периодическое решение системы уравнений с гамильтонианом (5.3), которое аналитично по ε и при $\varepsilon = 0$ переходит в $2\pi s/r$–периодическое решение (5.5) невозмущенной системы. При выполнении неравенства (для $I = I_0$, $w_0 = \overset{*}{w}_0$)

$$(\partial^2\bar{H}_1 / \partial w_0^2)\partial^2 H_0 / \partial I^2 < 0 \tag{5.9}$$

это периодическое решение неустойчиво, а при одновременном выполнении неравенств

$$\frac{\partial^2\bar{H}_1}{\partial w_0^2}\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} > 0, \quad 5\left(\frac{\partial^3\bar{H}_1}{\partial w_0^3}\right)^2 - 3\frac{\partial^2\bar{H}_1}{\partial w_0^2}\frac{\partial^4\bar{H}_1}{\partial w_0^4} \neq 0 \tag{5.10}$$

устойчиво по Ляпунову.

Область колебаний. Из (5.4) и выражений для производных эллиптических интегралов из [7] получим

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} = -\frac{\pi^2[E(k_1) - (1-k_1^2)K(k_1)]}{16k_1^2(1-k_1^2)K^3(k_1)} < 0 \tag{5.11}$$

и, таким образом, условие (5.6) теоремы выполняется.

Получим выражение для функции $\bar{H}_1$, воспользовавшись разложением эллиптических функций в ряды Фурье [7]

$$\bar{H}_1 = -\frac{\pi}{2sK^2(k_1)}\int_0^{2\pi s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)\sin[(2n-1)(rs^{-1}\tau + w_0)]\sin\tau}{\mathrm{ch}(K'(k_1)(\omega_0 s)^{-1}(2n-1)r)}d\tau \tag{5.12}$$

где $K'(k_1) = K(1-k_1^2)$.

Анализ структуры подынтегрального выражения в (5.12) показывает, что условие $\bar{H}_1 \neq 0$ возможно лишь при $r = 1$ и $s = 2n-1$ ($n = 1, 2, 3,\ldots$), т.е. когда частота невозмущенного движения равна $\omega_1 = (2n-1)^{-1}$. При этом

$$\bar{H}_1 = -2s^{-1}\cos sw_0 / \Delta_1, \quad \Delta_1 = \omega_0^2\,\mathrm{ch}(K'(k_1)/\omega_0)$$

Отсюда имеем

$$\partial\overline{H}_1 / \partial w_0 = 2\sin sw_0 / \Delta_1$$

Из условия (5.7) получим $2s$ различных значений переменной w_0: $w_0 = w_0^* = k\pi/s$ ($k =$ $= 1, 2,..., 2s$), отвечающих периодическим решениям в невозмущенном движении. При этих значениях w_0, очевидно, выполняется условие (5.8), так как

$$\partial^2\overline{H}_1 / \partial w_0^2\Big|_{w_0 = w_0^*} = 2s(-1)^k / \Delta_1 \neq 0 \tag{5.13}$$

Итак, согласно сформулированной теореме, при достаточно малых ε существует $2s$ (s – нечетное число) $2\pi s$-периодических решений, переходящих при $\varepsilon = 0$ в $2\pi s$-периодические решения вида (5.5), в которых полагаем

$$w = \tau/s + k\pi/s \quad (k = 1,2,..., 2s)$$

Для выяснения вопроса об устойчивости этих колебаний проверим условия (5.9) и (5.10).

Из (5.11) и (5.13) следует, что при четных k выполняется неравенство (5.9), что означает неустойчивость соответствующих периодических решений. Если же k нечетно, то справедливо первое неравенство (5.10), при этом

$$\partial^3\overline{H}_1 / \partial w_0^3\Big|_{w_0 = w_0^*} = 0, \quad \partial^4\overline{H}_1 / \partial w_0^4\Big|_{w_0 = w_0^*} = 2s^3(-1)^{k+1} / \Delta_1$$

и, таким образом, при учете (5.13), имеем

$$5\left(\frac{\partial^3\overline{H}_1}{\partial w_0^3}\right)^2 - 3\frac{\partial^2\overline{H}_1}{\partial w_0^2}\,\frac{\partial^4\overline{H}_1}{\partial w_0^4} > 0$$

т.е. выполняется второе условие (5.10). Следовательно, при нечетных значениях k изучаемые периодические колебания маятника устойчивы по Ляпунову.

Область вращений. В области вращений маятника имеет место неравенство

$$\frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} = \frac{\pi^2 E(k_2)}{4(1-k_2^2)K^3(k_2)} > 0 \tag{5.14}$$

т.е. выполняется условие (5.6) теоремы.

Функция H_1 на невозмущенном движении представляется в виде ряда Фурье следующим образом:

$$H_1 = \mp\frac{2\pi^2}{k_2^2K^2(k_2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin[n(rs^{-1}\tau + w_0)]\sin\tau}{\operatorname{ch}(K'(k_2)(\omega_0 s)^{-1}nrk_2)}$$

Ее среднее значение будет ненулевым только при частоте $\omega_2 = 1/s$ ($s = 1,2,3,...$) и при этом

$$\overline{H}_1 = \mp\cos sw_0 / (s\Delta_2), \quad \Delta_2 = \omega_0^2\operatorname{ch}(K'(k_2)k_2 / \omega_0)$$

Из условия (5.7) получаем следующие $2s$ значений w_0^*:

$$w_0^* = k\pi / s \quad (k = 1,2,...,2s)$$

Условие (5.8) при $w_0 = w_0^*$ очевидно выполняется, так как

$$\partial^2\overline{H}_1 / \partial w_0^2 = \pm s(-1)^k / \Delta_2 \neq 0 \tag{5.15}$$

Таким образом, при достаточно малых ε существует $2s$ $2\pi s$-периодических движений маятника, переходящих при $\varepsilon = 0$ в $2\pi s$-периодические вращения.

Из (5.14) и (5.15) следует выполнение неравенства (5.9), если маятник вращается против часовой стрелки (верхний знак) и k нечетно, а также если маятник вращается по часовой стрелке (нижний знак) и k четно. Эти периодические движения маятника неустойчивы.

Если же k четно (при вращениях против часовой стрелки) или нечетно (при вращениях по часовой стрелке), то выполняются неравенства (5.10), и следовательно, указанные периодические движения маятника устойчивы по Ляпунову.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16257) и Международного научного фонда (MFG300).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Struble R.A., Marlin J.A.* Periodic motion of a simple pendulum with periodic disturbance // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1965. V. 18. Pt 4. P. 405–417.
2. *Jeffreys H.* The simple pendulum under periodic disturbance // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1959. V. 12. Pt 1. P. 124–128.
3. *Struble R.A.* On the simple pendulum under periodic disturbance // Quart. J. Mech. and Appl. Math. 1962. V. 15. Pt 2. P. 245–251.
4. *Чешанков Б.И.* О субгармонических колебаниях маятника // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 2. С. 343–348.
5. *Козлов В.В.* Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38. Вып. 1. С. 3–67.
6. *Зиглин С.Л.* Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела // Тр. Моск. мат. о-ва. 1980. Т. 41. С. 287–303.
7. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм и произведений. М.: Наука, 1971. 1100 с.
8. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
9. *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Параметрический резонанс в линейных системах. М.: Наука, 1987. 328 с.
10. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
11. *Артемьев Н.А.* Метод определения характеристических показателей и приложение его к двум задачам небесной механики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1944. Т. 8. № 2. С. 61–100.
12. *Moser J.* The analytical invariants of an area-preserving mapping near a hyperbolic point // Comm. Pure Appl. Math. 1956. V. 9. № 4. P. 673–692.
13. *Маркеев А.П.* Устойчивость плоских колебаний и вращений спутника на круговой орбите // Космич. исследования. 1975. Т. 13. Вып. 3. С. 322–336.
14. *Маркеев А.П., Чуркина Н.И.* О периодических решениях Пуанкаре канонической системы с одной степенью свободы // Письма в Астрон. ж. 1985. Т. 11. № 8. С. 634–639.

Москва

Поступила в редакцию 24.III.1994