УДК 531.36:534.1

© 1995 г. А.П. Маркеев

О ПОВЕДЕНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ НА ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

Изучаются нелинейные колебания близкой к интегрируемой периодической по времени гамильтоновой системы с одной степенью свободы в окрестности ее положения равновесия. Рассматривается случай, когда мультипликаторы линеаризованной системы кратны. При помощи канонических замен переменных функция Гамильтона приведена к некоторой простейшей форме, отражающей резонансный характер рассматриваемой задачи. Подробно исследована приближенная система; часть результатов перенесена на полную систему. Установлено правило, позволяющее по характеру зависимости частоты нелинейных колебаний невозмущенной системы от амплитуды отличать границы области параметрического резонанса, на которых положение равновесия устойчиво, от границ, на которых оно неустойчиво. В случае неустойчивости дана оценка размеров окрестности равновесия, в которой остается траектория возмущенной системы. Показано существование устойчивых периодических движений в окрестности неустойчивого положения равновесия. Обсуждаются вопросы о стохастическом поведении системы. Рассмотрен ряд примеров приложения полученных общих результатов в конкретных задачах механики.

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему с одной степенью свободы, движение которой описывается гамильтоновыми обыкновенными дифференциальными уравнениями с функцией Гамильтона, представимой в виде ряда по малому параметру ε ($0 < \varepsilon \ll 1$):

$$H = H^{(0)}(x,y) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k H^{(k)}(x,y,t) \tag{1.1}$$

Пусть $x = y = 0$ – положение равновесия системы, а функции $H^{(k)}(k = 0, 1, 2, \ldots)$ из (1.1) представимы в виде рядов:

$$H^{(k)} = H_2^{(k)} + H_3^{(k)} + \ldots + H_m^{(k)} + \ldots$$

где $H_m^{(k)}$ – форма степени m относительно x,y. Коэффициенты этих форм при $k = 0$ постоянны, а при $k \geqslant 1$ непрерывны и 2π-периодичны по t.

Предположим, что при $\varepsilon = 0$ равновесие $x = y = 0$ устойчиво. Через ω обозначим частоту колебаний линеаризованной системы ($\omega > 0$). При соответствующем выборе переменных x, y, осуществляемом, например, при помощи преобразования Биркгофа [1], функция $H^{(0)}$ запишется в виде

$$H^{(0)} = \tfrac{1}{2}\omega(x^2+y^2) + \tfrac{1}{4}c(x^2+y^2)^2 + O\left((x^2+y^2)^3\right) \tag{1.2}$$

Будем полагать, что величина c в (1.2) отлична от нуля.

Считая, что такой выбор переменных x,y уже сделан, введем новые переменные q,p при помощи канонического преобразования $x = \varepsilon^{1/2}q, y = \varepsilon^{1/2}p$. Тогда получим новую функцию Гамильтона вида

$$H = \tfrac{1}{2}\omega(q^2+p^2) + \varepsilon\left[\tfrac{1}{4}c(q^2+p^2)^2 + H_2^{(1)}(q,p,t)\right] +$$
$$+\varepsilon^{3/2}H_3^{(1)}(q,p,t) + O(\varepsilon^2) \tag{1.3}$$

Без ограничения общности будем считать, что средние значения функций $H_2^{(1)}, H_3^{(1)}$ по явно входящему времени равны нулю.

Пусть в линеаризованной системе имеет место параметрический резонанс $2\omega \simeq N$, где N – целое число. При помощи линейной, близкой к тождественной, 2π-периодической по t канонической замены переменных $q,p \to u,\upsilon$ гамильтониан (1.3) можно [2] привести к виду

$$H = \tfrac{1}{2}\omega(u^2+\upsilon^2) + \varepsilon[\tfrac{1}{4}c(u^2+\upsilon^2)^2 + \tfrac{1}{2}(\kappa_1 \sin Nt - \kappa_2 \cos Nt)(u^2-\upsilon^2) +$$
$$+(\kappa_1 \cos Nt + \kappa_2 \sin Nt)\, u\upsilon] + \varepsilon^{3/2}H_3^{(1)}(u,\upsilon,t) + O(\varepsilon^2) \tag{1.4}$$

Здесь

$$\kappa_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[h_{11}\cos Nt - (h_{02}-h_{20})\sin Nt\right]dt, \quad \kappa_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[h_{11}\sin Nt + (h_{02}-h_{20})\cos Nt\right]dt$$

Величины $h_{ij} = h_{ij}(t)$ – коэффициенты квадратичной формы $H_2^{(1)}$ из (1.3): $H_2^{(1)} = h_{20}q^2 + h_{11}qp + h_{02}p^2$.

Пусть $N - 2\omega = 2\varepsilon\beta$. После перехода к канонически сопряженным переменным ψ, R по формулам

$$u = (2R)^{1/2}\sin(\psi+\psi_0+Nt/2), \quad \upsilon = (2R)^{1/2}\cos(\psi+\psi_0+Nt/2)$$
$$\sin 2\psi_0 = \kappa_1\kappa^{-1}, \quad \cos 2\psi_0 = \kappa_2\kappa^{-1}, \quad \kappa = (\kappa_1^2+\kappa_2^2)^{1/2}$$

получим гамильтониан

$$H = \varepsilon(-\beta R + \kappa R\cos 2\psi + cR^2) + \varepsilon^{3/2}H_3^{(1)} + O(\varepsilon^2)$$

Здесь функция $H_3^{(1)}$ выражена через ψ, R.

Сделаем еще одно каноническое преобразование $\psi, R \to \theta, \rho$:

$$R = \kappa|c|^{-1}\rho, \quad \psi = \sigma\theta + (1-\sigma)\pi/4 \quad (\sigma = \operatorname{sign} c)$$

и перейдем к новой независимой переменной $\tau = \varepsilon\kappa t$. В новых переменных движение описывается уравнениями

$$d\theta/d\tau = \partial\gamma/\partial\rho, \quad d\rho/d\tau = -\partial\gamma/\partial\theta \tag{1.5}$$

с функцией Гамильтона вида

$$\gamma = \gamma_0(\theta,\rho) + \varepsilon^{1/2}\gamma_1(\theta,\rho,\tau) + O(\varepsilon) \tag{1.6}$$
$$\gamma_0 = -\mu\rho + \rho\cos 2\theta + \rho^2, \quad \gamma_1 = c\kappa^{-2}H_3^{(1)}, \quad \mu = \sigma\beta\kappa^{-1}$$

В декартовых канонически сопряженных переменных $x_1 = (2\rho)^{1/2}\cos\theta$, $x_2 = (2\rho)^{1/2}\sin\theta$ имеем

$$\gamma_0 = \tfrac{1}{2}\left[(\mu-1)x_1^2 + (\mu+1)x_2^2\right] - \tfrac{1}{4}(x_1^2+x_2^2)^2 \tag{1.7}$$

Положению равновесия $x = y = 0$ исходной системы отвечает решение уравнений (1.5), в котором $\rho = 0$. Из (1.5)–(1.7) следует, что для достаточно малых ε при выполнении неравенства $|\mu| < 1$ равновесие неустойчиво. Последнее неравенство задает область параметрического резонанса в первом приближении по ε. Если же $|\mu| > 1$, то как, следует из известных результатов [3,4], при достаточно малых ε равновесие $x = y = 0$ устойчиво.

В данной работе исследуется поведение системы на границе области параметрического резонанса, когда $\mu = 1$ или -1. При этом предполагается, что среднее значение функции γ_1 из (1.6) по явно входящему τ равно нулю. При N нечетном это предположение всегда выполняется. Если же N четно, то упомянутое среднее может быть отлично от нуля; этот последний случай требует особого исследования.

2. Об устойчивости на границе области параметрического резонанса. Пусть $\mu = 1$. Тогда

$$\gamma_0 = x_2^2 - \tfrac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2)^2$$

В переменных y_1, y_2, вводимых при помощи равенств

$$x_2 = \partial S / \partial x_1, \quad y_1 = \partial S / \partial y_2$$

где

$$S = x_1 y_2 + \tfrac{1}{12} x_1^3 y_2 + \tfrac{1}{8} x_1 y_2^3$$

имеем

$$\gamma_0 = y_2^2 - \tfrac{1}{4} y_1^4 + O\left((y_1^2 + y_2^2)^{5/2}\right)$$

При $\varepsilon \neq 0$ гамильтониан (1.6) при помощи вещественной аналитической относительно $\varepsilon^{1/2}$ канонической нормализующей замены переменных $\theta, \rho \to z_1, z_2$ можно привести к виду

$$\gamma_0 = z_2^2 - a_1 / 4 z_1^4 + O\left((z_1^2 + z_2^2)^{5/2}\right) \qquad (2.1)$$

Нормализующая замена 2π-периодична по t, если N – четное число и 4π-периодична, если N нечетно. Постоянный коэффициент a_1 в (2.1) стремится к единице, когда $\varepsilon \to 0$. Положение равновесия $x = y = 0$ отвечает равновесию $z_1 = z_2 = 0$ преобразованной системы с функцией Гамильтона (2.1).

Покажем неустойчивость равновесия. Для этого возьмем функцию $V = z_1 z_2$. Для ее производной в силу уравнений движения с гамильтонианом (2.1) получаем выражение

$$dV / d\tau = a_1 z_1^4 + 2 z_2^2 + O\left((z_1^2 + z_2^2)^{5/2}\right)$$

Так как функция $dV/d\tau$ определенно положительна, а V не является знакопостоянной, знака, противоположного с $dV/d\tau$, то на основании первой теоремы Ляпунова о неустойчивости [5] получаем вывод о том, что равновесие $z_1 = z_2 = 0$ неустойчиво.

Иным путем этот результат получен ранее [6,7].

Рассмотрим теперь вторую границу области параметрического резонанса, задаваемую в первом приближении по ε равенством $\mu = -1$. В этом случае

$$\gamma_0 = -x_1^2 - \tfrac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2)^2$$

и аналогично рассмотренному выше случаю $\mu = 1$ гамильтониан (1.6) можно привести к виду

$$\gamma = -z_1^2 - \tfrac{1}{4} a_2 z_2^4 + O\left((z_1^2 + z_2^2)^{5/2}\right) \qquad (2.2)$$

где постоянный коэффициент a_2 при малых ε мало отличается от единицы. Отсюда, согласно [7], следует устойчивость равновесия $z_1 = z_2 = 0$. Это же следует и из разд. 4 данной работы (см. ниже).

Таким образом, с точки зрения устойчивости одна граница области параметрического резонанса существенно отличается от другой: на одной равновесие $x = y = 0$ устойчиво, а на другой неустойчиво. Из изложенного можно получить простое правило, позволяющее определять, на какой именно из границ области параметрического резонанса будет устойчивость, а на какой – неустойчивость.

Границы $\gamma_\pm$ области параметрического резонанса в первом приближении по ε задаются равенствами $\omega = N/2 \pm \varepsilon\kappa$. На γ_+ и γ_- имеем $\mu = -\sigma$ и $\mu = \sigma$ соответственно. Если система такова, что при $\varepsilon = 0$ частота малых нелинейных колебаний убывает с ростом амплитуды, т.е. в (1.2) коэффициент $c < 0$ (система "с мягкой характеристикой восстанавливающей силы"), то имеем $\mu = 1$ на γ_+, и $\mu = -1$ на γ_-; следовательно, на γ_+ равновесие $x = y = 0$ неустойчиво, а на γ_- – устойчиво. Если же частота малых нелинейных колебаний возрастает с ростом амплитуды, т.е. в (1.2) коэффициент $c > 0$ (система "с жесткой характеристикой восстанавливающей силы"), то наоборот: на γ_+ равновесие $x = y = 0$ устойчиво, а на γ_- неустойчиво.

3. Примеры. *Колебания нелинейной консервативной системы под действием внешних периодических сил.* Рассмотрим устойчивость вынужденных периодических колебаний в системе, движение которой описывается уравнением

$$\ddot{z} + \omega^2 z + \alpha z^2 + \delta z^3 = \varepsilon \sin t \tag{3.1}$$

где ω, α, δ, ε – постоянные, ω – не целое число, $0 < \varepsilon \ll 1$.

Согласно методу Пуанкаре [8], при достаточно малом ε уравнение (3.1) имеет единственное аналитическое по ε 2π-периодическое по t решение $z = f(t,\varepsilon)$, переходящее при $\varepsilon = 0$ в решение $z = 0$. Оно представимо рядом

$$f(t) = \frac{\varepsilon}{\omega^2 - 1}\sin t + \ldots$$

Для исследования устойчивости этого решения положим

$$z = f(t) + \varepsilon^{1/2}\omega^{-1/2}x_*, \quad \dot{x}_* = \omega y_*$$

Уравнения возмущенного движения будут иметь гамильтонову форму с гамильтонианом

$$H = \tfrac{1}{2}\omega(x_*^2 + y_*^2) + \tfrac{1}{3}\varepsilon^{1/2}\alpha\omega^{-3/2}x_*^3 +$$

$$+\varepsilon\left[\alpha\omega^{-1}(\omega^2 - 1)^{-1}\sin t\, x_*^2 + \tfrac{1}{4}\delta\omega^{-2}x_*^4\right] + O(\varepsilon^{3/2}) \tag{3.2}$$

Пусть $2\omega \approx 1$. Методом Депри–Хори [9] можно построить каноническое преобразование $x_*, y_* \to u, \upsilon$, приводящее гамильтониан (3.2) к виду (1.4). При этом $N = 1$, а коэффициенты c, κ_1, κ_2, как показывают вычисления, будут такими:

$$c = \frac{9\delta\omega^2 - 10\alpha^2}{24\omega^4}, \quad \kappa_1 = \frac{\alpha}{2\omega(\omega^2 - 1)}, \quad \kappa_2 = 0$$

В первом приближении по ε границы $\gamma_\pm$ области параметрического резонанса, исходящей в плоскости ω, ε из точки (1/2,0), задаются уравнениями $\omega = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{4}{3}\varepsilon|\alpha|$.

В соответствии с полученным в п.2 правилом находим, что при достаточно малых ε периодическое решение $z = f(t, \varepsilon)$ на границе γ_+ устойчиво, если $\delta > 40\alpha^2/9$, и неустойчиво, если $\delta < 40\alpha^2/9$. На γ_- картина обратная: при $\delta > 40\alpha^2/9$ имеет место неустойчивость, а при $\delta < 40\alpha^2/9$, – устойчивость.

Маятник с вибрирующей точкой подвеса. Пусть точка подвеса математического маятника длины l совершает гармонические колебания вдоль вертикали с амплитудой a и частотой Ω: $z_0(t) = a\cos\Omega t$. Уравнение движения маятника имеет вид

$$d^2q/d\eta^2 + (\omega^2 + \varepsilon\cos\eta)\sin q = 0 \qquad (3.3)$$

где q – угол отклонения маятника от вертикали, $\eta = \Omega t$, $\omega^2 = g/(\Omega^2 l)$, $\varepsilon = a/l$.

Решение $q = 0$ отвечает равновесию маятника на вертикали. Линейная задача об устойчивости этого равновесия приводит к уравнению Матье. Это уравнение хорошо изучено. В частности, во всей плоскости ω,ε выделены области устойчивости и неустойчивости в линейном приближении (диаграмма Айнса–Стретта) [10]. Области неустойчивости (области параметрического резонанса) исходят из точек $(N/2, 0)$ оси $\varepsilon = 0$. Для ω, ε из этих областей равновесие $q = 0$ неустойчиво и в строгой нелинейной постановке задачи, что следует из теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Рассмотрим вопрос об устойчивости равновесия $q = 0$ для значений ω,ε, не лежащих внутри областей параметрического резонанса. Величину ε считаем малой. Уравнению (3.3) соответствует функция Гамильтона

$$H = \tfrac{1}{2}p^2 - (\omega^2 + \varepsilon\cos\eta)\cos q \qquad (3.4)$$

Заметим, что разложение H в ряд не содержит членов третьей степени относительно q,p, а в разложении (1.2), соответствующем гамильтониану (3.4), коэффициент $c = -1/16 \neq 0$ [11]. Отсюда на основании теории устойчивости гамильтоновой системы с одной степенью свободы [2], делаем вывод о том, что внутри области устойчивости в линейном приближении при достаточно малых значениях ε равновесие $q = 0$ действительно устойчиво.

Осталось рассмотреть границы областей параметрического резонанса. Возьмем область, исходящую из точки $(\tfrac{1}{2}, 0)$. В обозначениях разд. 2 ее правой границей будет кривая γ_+, а левой – кривая γ_-. А так как $c < 0$, то при малых ε на γ_+ равновесие $q = 0$ неустойчиво, а на γ_- – устойчиво.

Для областей параметрического резонанса, исходящих из точек $(N/2, 0)$ для $N \geqslant 2$ результат аналогичен: на правых границах этих областей имеет место неустойчивость, а на левых – устойчивость.

4. Колебания невозмущенной системы в случае $\mu = -1$. Если в гамильтониане (1.6) пренебречь величинами порядка $\varepsilon^{1/2}$ и выше, то получим систему с гамильтонианом γ_0. Будем называть эту систему невозмущенной. Исследуем нелинейные колебания невозмущенной системы на границах области параметрического резонанса. Рассмотрим сначала границу, которая в первом приближении по ε задается равенством $\mu = -1$.

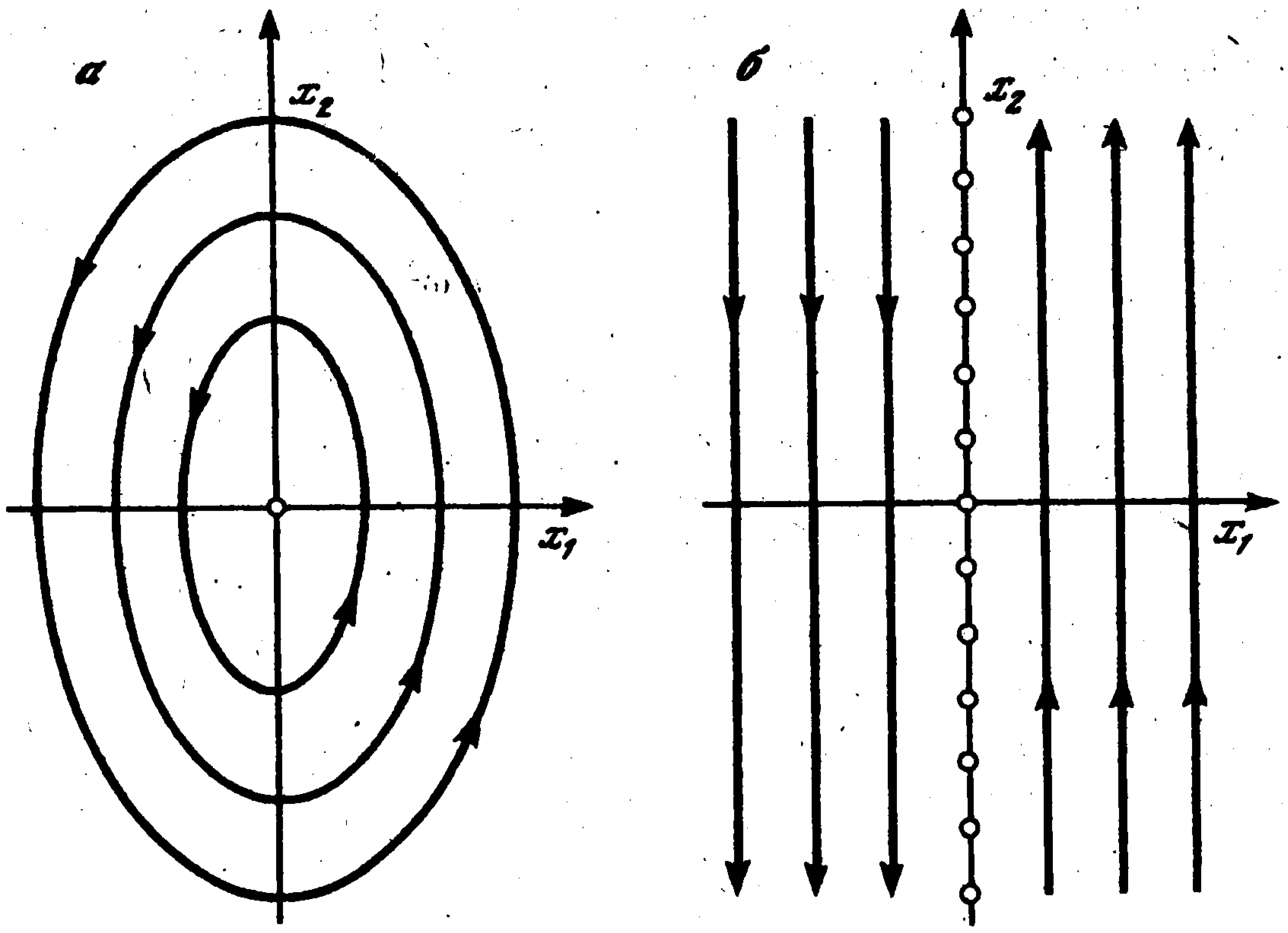
Уравнения (1.5) с гамильтонианом $\gamma = \gamma_0$ имеют в этом случае интеграл энергии

$$\rho^2 + 2\rho\cos^2\theta = h \qquad (4.1)$$

Фазовые траектории изображены в плоскости x_1, x_2 на фиг. 1,*а*. Для сравнения на фиг. 1,*б* приведен фазовый портрет линеаризованной невозмущенной системы.

В линейной системе любая точка оси Ox_2 является положением равновесия; при $x_1 \neq 0$ траектории – прямые линии, параллельные оси Ox_2; начало координат неустойчиво.

В нелинейной системе траектории – замкнутые кривые, на которых $\rho = (\cos^4\theta + h)^{1/2} - \cos^2\theta\,(h > 0)$. Существует только одно положение равновесия – начало координат, отвечающее нулевому значению h. При $h > 0$ имеем $\rho_2 \leqslant \rho \leqslant \rho_1$, где



Фиг. 1

$\rho_1 = h^{1/2}$, $\rho_2 = (1+h)^{1/2} - 1$. Дифференциальные уравнения (1.5) интегрируются в эллиптических функциях. Вычисления показывают, что

$$\rho = \rho_1 \frac{\rho_2 + \rho_1 \mathrm{sn}^2(u,k) + \rho_2 \mathrm{cn}^2(u,k)}{\rho_1 + \rho_2 \mathrm{sn}^2(u,k) + \rho_1 \mathrm{cn}^2(u,k)} \tag{4.2}$$

$$k^2 = \tfrac{1}{2}\left(1 - h^{1/2}(1+h)^{-1/2}\right), \quad u = 2h^{1/4}(1+h)^{1/4}(\tau + \tau_0) \tag{4.3}$$

Величина τ_0 – произвольная постоянная. При известном $\rho(\tau)$ функция $\theta(\tau)$ находится из интеграла (4.1).

Частота нелинейных колебаний определяется равенством

$$\omega = \pi h^{1/4}(1+h)^{1/4} K^{-1}(k) \tag{4.4}$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Невозмущенный гамильтониан γ_0 можно записать в переменных действие–угол. Тогда он выразится только через переменную действие I: $\gamma_0 = h(I)$. Проверим условие невырожденности γ_0. Имеем

$$\frac{d^2h}{dI^2} = \frac{d\omega}{dI} = \omega\frac{d\omega}{dh} = \frac{\pi^2}{8kh^{1/2}(1+h)K^3}\left[2kK(1+h)^{1/2}(1+2h) + h^{1/2}\frac{dK}{dk}\right] > 0 \tag{4.5}$$

Следовательно, невозмущенная функция Гамильтона невырождена.

При $h \to 0$ частота колебаний (4.4) стремится к нулю:

$$\omega \sim bh^{1/4} \quad (b = \pi K^{-1}(\sqrt{2}/2) = 1{,}694) \tag{4.6}$$

Следовательно, при $0 < h \ll 1$ (малая окрестность начала координат $x_1 = x_2 = 0$) имеем

$$h \approx (3bI/4)^{4/3}, \quad d^2h/dI^2 \approx \tfrac{4}{9}(3b/4)^{4/3} I^{-2/3} \neq 0$$

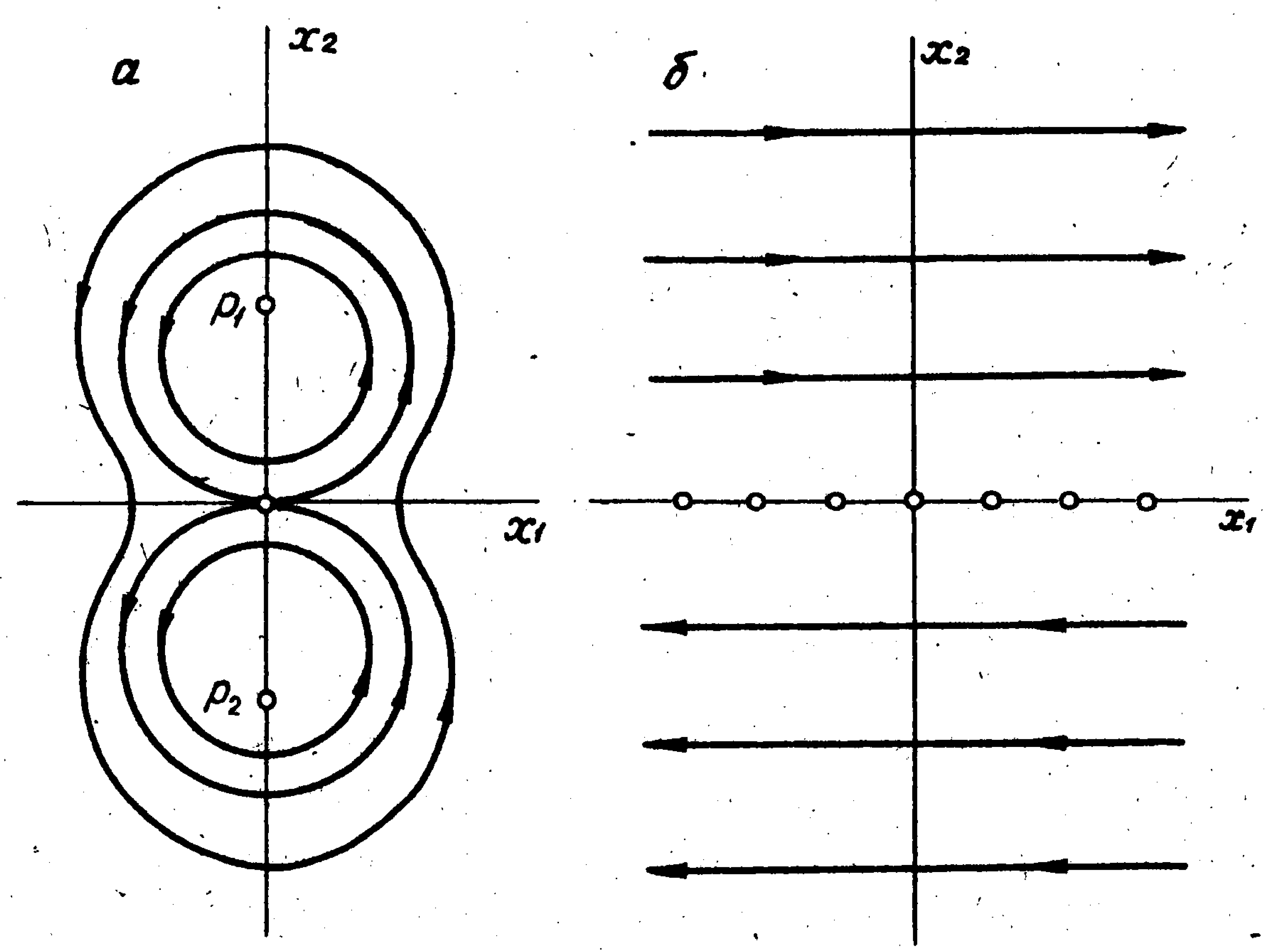
В силу невырожденности γ_0 на основании теоремы Мозера об инвариантных кривых [4] получаем, что неустойчивое в линеаризованной задаче равновесие $x = y = 0$

исходной системы в действительности устойчиво. Несколько иным путем этот результат получен ранее [7].

5. Колебания невозмущенной системы в случае $\mu = 1$. При $\mu = 1$ невозмущенная система имеет интеграл

$$\rho^2 - 2\rho \sin^2\theta = h \tag{5.1}$$

Фазовый портрет показан на фиг. 2,*а*. На фиг. 2,*б* приведен фазовый портрет соответствующей линеаризованной системы. Для нее любая точка оси Ox_1 – равновесие, а при $x_2 \neq 0$ фазовые траектории – прямые, параллельные оси Ox_1; начало координат неустойчиво. Как показано в разд. 2, оно остается неустойчивым и в возмущенной системе (1.5).



Фиг. 2

Рассмотрим нелинейные колебания невозмущенной системы подробно. При $h < -1$ движение невозможно. Значение $h = -1$ отвечает положениям равновесия P_1 и P_2, в которых $x_1 = 0$, $x_2 = \pm\sqrt{2}$; в фазовой плоскости точки P_1 и P_2 – центры.

Если $-1 < h < 0$ (область колебаний), то фазовые траектории представляют собой замкнутые кривые, охватывающие особые точки P_1, P_2. При этом $\rho_2 \leqslant \rho \leqslant \rho_1$, где $\rho_1 = 1 + (1+h)^{1/2}$, $\rho_2 = 1 - (1+h)^{1/2}$. Решение $\rho(\tau)$, $\theta(\tau)$ уравнений (1.5) выражается через эллиптические функции. Имеем

$$\rho = \sqrt{-h}\,\frac{1 - d\,\mathrm{cn}(u,k)}{1 + d\,\mathrm{cn}(u,k)} \tag{5.2}$$

где

$$k^2 = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{-h}), \quad d = \sqrt{1+h}/(1+\sqrt{-h}), \quad u = 2\sqrt{2}(-h)^{1/4}(\tau + \tau_0) \tag{5.3}$$

а функция $\theta(\tau)$ определяется из (5.1), (5.2). Частота колебаний задается равенством

$$\omega = \sqrt{2}\,\pi(-h)^{1/4} K^{-1}(k) \tag{5.4}$$

При $h \to 0$ частота стремится к нулю

$$\omega = \sqrt{2}\, b(-h)^{1/4} \qquad (5.5)$$

где b – величина из (4.6).

При $h \to -1$ получаем частоту малых колебаний в окрестности P_1 или P_2, она равна $2\sqrt{2}$.

В переменных действие–угол имеем $\gamma_0 = h(I)$. Вычисления показывают, что

$$\frac{d^2h}{dI^2} = -\frac{\pi^2}{4k\sqrt{-h}K^3}\left(2kK + \sqrt{-h}\frac{dK}{dk}\right) < 0 \qquad (5.6)$$

Следовательно, в области нелинейных колебаний в окрестности равновесий P_1 и P_2 гамильтониан невозмущенной системы является невырожденным. В частности, вблизи этих равновесий имеем

$$h = -1 + 2\sqrt{2}I - \tfrac{5}{4}I^2 + O(I^3)$$

При $h > 0$ (область вращений) фазовые траектории охватывают все три особые точки: P_1, P_2 и начало координат (фиг. 2,*а*). При этом $\rho_2 \leqslant \rho \leqslant \rho_1$, где $\rho_1 = 1 + (1 + h)^{1/2}$, $\rho_2 = h^{1/2}$, а

$$\rho = \rho_2\Lambda_+ / \Lambda_- \qquad (5.7)$$

$$\Lambda_\pm = (\rho_1 - 1) + (\rho_2 \pm 1)\operatorname{sn}^2(u,k) + (\rho_1 - 1)\operatorname{cn}^2(u,k)$$

Величины u, k и ω определяются по формулам (4.3) и (4.4). В силу (4.5) невозмущенная функция Гамильтона невырожденна. При $h \to 0$ справедливо соотношение (4.6).

Значение $h = 0$ отвечает либо равновесию – началу координат, либо сепаратрисам, разделяющим на фиг. 2,*а* области колебаний и вращений. Сепаратрисы являются окружностями $x_1^2 + (x_2 \pm 1)^2 = 1$, из которых выброшена точка $x_1 = x_2 = 0$. На сепаратрисе, лежащей в верхней полуплоскости, имеем (принято $\rho(0) = 2$)

$$\rho = \frac{2}{1+4\tau^2}, \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+4\tau^2}}, \quad \cos\theta = -\frac{2\tau}{\sqrt{1+4\tau^2}} \qquad (5.8)$$

Соответствующее решение для сепаратрисы, лежащей в нижней полуплоскости фиг. 2,*а*, получается из (5.8) заменой θ на $\pi + \theta$.

6. О нелинейных колебаниях возмущенной системы. Выясним, как результаты, полученные в разд. 4 и 5 при исследовании нелинейных колебаний невозмущенной системы с гамильтонианом γ_0, переносятся на полную систему с гамильтонианом γ из (1.6).

Вне достаточно малой окрестности начала координат и (при $\mu = 1$) окрестностей сепаратрис функция γ, записанная в переменных действие–угол, аналитична, причем, как следует из разд. 4 и 5, ее невозмущенная часть γ_0 невырожденна. Поэтому [12] большинство замкнутых траекторий фиг.1,*а* и 2,*а* порождает при $0 < \varepsilon \ll 1$ условнопериодические движения. Мера Лебега дополнения к множеству этих порождающих траекторий имеет [13] порядок $\exp(-c_1\varepsilon^{-1})$ ($c_1 > 0$ – const).

Как отмечалось выше, положение равновесия $x = y = 0$ на границе $\mu = -1$ области параметрического резонанса устойчиво в полной возмущенной системе, а на границе $\mu = 1$ – неустойчиво. Но, как следует из разд. 5, в последнем случае траектории системы, начинающиеся достаточно близко к началу координат, остаются при последующем движении в ограниченной его окрестности (так как тогда величина $\rho(\tau)$ при всех τ не превосходит величину, близкую двум).

Согласно методу Пуанкаре, в теории периодических движений [8], положения равновесия P_1, P_2 невозмущенной системы с функцией Гамильтона γ_0 при $0 < \varepsilon \ll 1$ переходят в 2π-периодические (если N четно) или 4π-периодические (если N нечетно) по t движения полной системы, причем, ввиду невырожденности γ_0, на основании теоремы Мозера об инвариантных кривых [4], эти периодические движения устойчивы..

При $\mu = 1$ невозмущенная система имеет четыре асимптотические траектории: две из них стремятся к началу координат при $\tau \to +\infty$ и две – при $\tau \to -\infty$ (фиг. 2,*а*). Как следует из работ [6,14], в достаточно малой окрестности начала координат такие четыре асимптотические траектории существуют и в полной системе.

Но если в невозмущенной системе асимптотические траектории попарно сливаются, образуя сепаратрисы, то в полной системе в общем случае имеет место расщепление сепаратрис [12], а в их окрестности возникает стохастический слой [15].

Воспользовавшись методом Б.В. Чирикова [16, 17], получим оценку ширины стохастического слоя. Сначала, следуя [18], найдем сепаратрисное отображение для системы (1.5) с полным гамильтонианом (1.6). Общее решение невозмущенной системы запишем в виде

$$\rho = \rho(\tau + \sigma, h), \quad \theta = \theta(\tau + \sigma, h) \tag{6.1}$$

где σ и h – произвольные постоянные, причем h – константа интеграла (5.1). Если пренебречь величинами порядка ε и выше, то для переменных σ, h, являющихся в возмущенной задаче медленно меняющимися функциями τ, получим [18] систему уравнений

$$dh/d\tau = \varepsilon^{1/2}(\gamma_0, \gamma_1), \quad d\sigma/d\tau = \varepsilon^{1/2}\partial\gamma_1/\partial h \tag{6.2}$$

где (γ_0, γ_1) – скобка Пуассона. В правых частях уравнений (6.2) величины θ и ρ выражены через σ, h и τ в соответствии с (6.1).

Пусть h_0 и σ_0 – значения h и σ при $\tau = 0$. Через промежуток времени, равный одному циклу движения вблизи сепаратрисы, величины h и σ примут значения h_1 и σ_1. Отображение $h_0, \sigma_0 \to h_1, \sigma_1$ и будет сепаратрисным отображением.

Рассматривая траектории, достаточно близкие к сепаратрисе, можно в правых частях системы уравнений (6.2) положить $h = 0$. При этом, согласно (5.5), продолжительность одного цикла движения вблизи сепаратрисы приблизительно равна $\sqrt{2}\,\pi\, b^{-1}\,|h|^{-1/4}$. Аналогично [18] получаем, что сепаратрисное отображение будет приближенно задаваться равенствами

$$h_1 = h_0 + \varepsilon^{1/2} G(\sigma_0), \quad \sigma_1 = \sigma_0 + \sqrt{2}\pi b^{-1}|h_1|^{-1/4} \tag{6.3}$$

где

$$G(\sigma_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\gamma_0(\theta, \rho), \gamma_1(\theta, \rho, \tau - \sigma_0)\big) d\tau \tag{6.4}$$

а величины θ и ρ после вычисления скобки Пуассона в подынтегральном выражении должны быть заменены на их выражения из (5.8) (для сепаратрисы, лежащей в верхней полуплоскости фиг. 2,*а*).

Представим функцию γ_1 из (1.6) в виде

$$\gamma_1 = \rho^{3/2}(f_1 \sin\theta + f_2 \cos\theta + f_3 \sin 3\theta + f_4 \cos 3\theta) \tag{6.5}$$

$$f_i = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^{(i)} \sin k\lambda t + b_k^{(i)} \cos k\lambda t\right) \left(\lambda = (2\varepsilon\kappa)^{-1}\right) \tag{6.6}$$

Вычисления показывают, что тогда

$$G(\sigma_0)=\pi 2^{-5/2}\lambda\sum_{k=1}^{\infty}k\left[4c_k^{(1)}+2k\lambda(c_k^{(1)}+d_k^{(2)})-k^2\lambda^2(c_k^{(3)}+d_k^{(4)})\right]e^{-k\lambda/2} \tag{6.7}$$

где

$$c_k^{(i)}=a_k^{(i)}\cos k\lambda\sigma_0+b_k^{(i)}\sin k\lambda\sigma_0,\quad d_k^{(i)}=-a_k^{(i)}\sin k\lambda\sigma_0+b_k^{(i)}\cos k\lambda\sigma_0 \tag{6.8}$$

Пусть наименьшее значение k, которое действительно присутствует в ряде (6.7), равно $q (q \geqslant 1)$. Тогда при малых ε можно записать

$$G(\sigma_0)=\chi\sin(q\lambda\sigma_0+\delta_1)\lambda^p e^{-q\lambda/2}\left(1+O(\lambda^{-\delta_2})\right) \tag{6.9}$$

где χ, δ_1, δ_2 – некоторые числа, $\delta_2 \geqslant 1$, а p – одно из чисел: 1, 2, 3.

Если вместо σ ввести переменную $\alpha = q\lambda\sigma + \delta_1$, то для малых ε отображение (6.3) запишется приближенно в виде

$$h_1=h_0+\varepsilon^{1/2}\chi\lambda^p e^{-q\lambda/2}\sin\alpha_0,\quad \alpha_1=\alpha_0+\sqrt{2}\pi q b^{-1}\lambda|h_1|^{-1/4} \tag{6.10}$$

В неподвижных точках этого отображения величина α равняется 0 или π, а

$$h=h_*=\pm\tfrac{1}{4}(q\lambda/(bn))^4\quad (n=1,2,\ldots)$$

Положив

$$h=h_*-2\sqrt{2}\pi^{-1}bq^{-1}\lambda^{-1}h_*|h_*|^{1/4}P$$

линеаризуем отображение (6.10) по P в окрестности неподвижных точек. Получим стандартное [17] отображение вида

$$P_1=P_0+K\sin\alpha_0,\quad \alpha_1=\alpha_0+P_1$$

где параметр стохастичности определяется по формуле

$$K=-\varepsilon^{1/2}2^{-3/2}\pi b^{-1}\chi q h_*^{-1}|h_*|^{-1/4}\lambda^{p+1}e^{-q\lambda/2}$$

Согласно [16, 17] оценка ширины стохастического слоя может быть получена из условия $|K| > 1$. (Следует, однако, иметь в виду, что строгое обоснование этого условия отсутствует, поэтому оценка ширины стохастического слоя здесь и в конце следующего раздела не является вполне математически строгой.) Имеем

$$|h_*|<\left(\pi\sqrt{2}|\chi|q/(4b)\right)^{4/5}\varepsilon^{2/5}\lambda^{4(p+1)/5}e^{-2q\lambda/5}$$

Отсюда следует, что ширина стохастического слоя имеет порядок

$\varepsilon^{-c_2}\exp(-c_3\varepsilon^{-1})$, где $c_2=2(2p+1)/5$, $c_3=q/(5\kappa)$.

7. Пример. *О стохастичности движения вблизи эксцентриситетных колебаний спутника.* Плоские движения твердого тела относительно центра масс на эллиптической орбите описываются уравнением [19]

$$(1+\varepsilon\cos\nu)\frac{d^2\delta}{d\nu^2}-2\varepsilon\sin\nu\frac{d\delta}{d\nu}+\omega^2\sin\delta\cos\delta=2\varepsilon\sin\nu \tag{7.1}$$

где ε – эксцентриситет орбиты центра масс тела, ν – истинная аномалия; $\omega^2 = 3(C - A)/B$, а A, B, C – главные центральные моменты инерции тела (момент инерции B отвечает оси, перпендикулярной плоскости орбиты); δ – угол между радиусом-вектором центра масс тела относительно притягивающего центра и осью, отвечающей моменту инерции A.

На круговой орбите ($\varepsilon = 0$) уравнение (7.1) имеет решение соответствующее относительному равновесию тела. На эллиптической орбите это равновесие переходит в периодические ("эксцентриситетные") колебания. Если $\omega \neq 1$, а эксцентриситет орбиты достаточно мал, то эксцентриситетные колебания описываются [19] аналитическим по ε решением уравнения (7.1) вида

$$\delta = \delta_* = \frac{2\varepsilon}{\omega^2 - 1}\sin\nu + \ldots \tag{7.2}$$

Устойчивость этого решения подробно исследована [19, 20]. В частности, показано [19], что если выполняются неравенства

$$\tfrac{1}{2} - 3\varepsilon/8 + \ldots < \omega < \tfrac{1}{2} + 3\varepsilon/8 + \ldots \tag{7.3}$$

то при достаточно малых ε эксцентриситетные колебания неустойчивы.

Исследуем устойчивость решения (7.2) и нелинейные колебания в его окрестности для значений величин ω, ε, соответствующих границам области параметрического резонанса (7.3). Положим $\omega = \tfrac{1}{2} + 3\mu/8 + \ldots$. В обозначениях разд. 2 на границах γ_+ и γ_- имеем $\mu = 1$ и $\mu = -1$ соответственно.

Уравнение (7.1) в окрестности решения (7.2) представим в гамильтоновой форме. Для этого положим

$$\delta = \delta_* + \varepsilon^{1/2}\omega^{-1/2}(1 + \varepsilon\cos\nu)^{-1}\xi, \quad \eta = \omega^{-1}d\xi/d\nu$$

В переменных ξ, η уравнения движения имеют гамильтонову форму. Функция Гамильтона имеет вид (ξ – координата, η – импульс)

$$H = \tfrac{1}{2}\omega(\xi^2 + \eta^2) + \varepsilon(\tfrac{3}{4}\cos\nu\xi^2 - \tfrac{1}{6}\xi^4) + \varepsilon^{3/2}(8\sqrt{2}\sin\nu/9)\xi^3 + O(\varepsilon^2) \tag{7.4}$$

При помощи преобразования Биркгофа $\xi, \eta \to q, p$ нормализуем в (7.4) члены, не зависящие от ν. Тогда получим функцию Гамильтона (1.3), в которой $H_2^{(1)} = \tfrac{3}{4}\cos\nu q^2$, $H_3^{(1)} = (8\sqrt{2}\sin\nu/9)\xi^3$, $c = -\tfrac{1}{4}$.

Так как $c < 0$, то, согласно разд. 2, на границе $\omega = \tfrac{1}{2} + 3\varepsilon/8 + \ldots$ при достаточно малых ε эксцентриситетные колебания (7.2) неустойчивы, а на границе $\omega = \tfrac{1}{2} - 3\varepsilon/8 + \ldots$ – устойчивы.

Преобразуя далее гамильтониан (1.3) к виду (1.4), получаем $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = -\kappa = -3/8$. Сделав затем каноническую замену переменных $u, v \to \theta, \rho$ по формулам

$$u = (3\rho)^{1/2}\sin(\theta - \nu/2), \quad v = -(3\rho)^{1/2}\cos(\theta - \nu/2)$$

и перейдя к новой независимой переменной $\tau = 3\varepsilon\nu/8$, придем к функции Гамильтона (6.6), в которой γ_i имеет вид (6.5), (6.6), где $\lambda = 4/(3\varepsilon)$, а

$$f_1 = -16\sqrt{6}(\sin\lambda\tau + \sin 3\lambda\tau)/9, \quad f_2 = 16\sqrt{6}(\cos\lambda\tau - \cos 3\lambda\tau)/9$$

$$f_3 = -16\sqrt{6}(\sin\lambda\tau - \sin 5\lambda\tau)/27, \quad f_4 = -16\sqrt{6}(\cos\lambda\tau - \cos 5\lambda\tau)/27$$

Теперь характер нелинейных колебаний спутника вблизи его движения (7.2) может быть описан в соответствии с разд. 4–6. В частности, для границы $\omega = 1/2 + 3\varepsilon/8 + \ldots$ при оценке ширины стохастического слоя получаем, что входящие в правую часть выражения (6.9) постоянные величины χ, q, p, δ_1 и δ_2 имеют числовые значения $8\pi\sqrt{3}/27$, 1, 3, $\pi/2$ и 1 соответственно. При малых ε ширина стохастического слоя имеет порядок $\varepsilon^{-14/5}\exp(-8/(15\varepsilon))$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16257) и Международного научного фонда (MFG 300).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Биркгоф Дж.Д.* Динамические системы. М.; Л.: Гостехиздат, 1941. 320 с.
2. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.
3. *Арнольд В.И.* Об устойчивости положений равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. № 2. С. 255–257.
4. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.
5. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
6. *Мерман Г.А.* Асимптотические решения канонической системы с одной степенью свободы в случае нулевых характеристических показателей // Бюлл. Ин-та теорет. астрон. АН СССР. 1964. Т. 9. № 6. С. 394–424.
7. *Иванов А.П., Сокольский А.Г.* Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы при параметрическом резонансе основного типа // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 6. С. 963–970.
8. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.
9. *Джакалья Г.Е.О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 319 с.
10. *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М.: Изд-во иностр. лит, 1952. 264 с.
11. *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1990. 414 с.
12. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической механики // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. пробл. математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 3. 304 с.
13. *Нейштадт А.И.* Оценки в теореме Колмогорова о сохранении условнопериодических движений // ПММ. 1981. Т. 45. Вып. 6. С. 1016–1025.
14. *Бардин Б.С.* Об асимптотических решениях гамильтоновых систем при резонансе первого порядка // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 587–593.
15. *Заславский Г.М., Чириков Б.В.* Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний // Успехи физ. наук. 1971. Т. 105. Вып. 1. С. 3–39.
16. *Чириков Б.В.* Нелинейный резонанс. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1977. 81 с.
17. *Чириков Б.В.* Взаимодействие нелинейных резонансов. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1978. 79 с.
18. *Маркеев А.П.* Резонанс третьего порядка в гамильтоновой системе с одной степенью свободы // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 5. С. 37–48.
19. *Белецкий В.В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965. 416 с.
20. *Zlatoustov V.A., Markeev A.P.* Stability of planar oscillations of a satellite in an elliptic orbit // Celestial Mech. 1973. V. 7. N 1. P. 31–45.

Москва

Поступила в редакцию
7.VI.1994