УДК 531.391

© 1995 г. В.В. Сидоренко

ОБ ЭВОЛЮЦИИ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ЛИНЕЙНЫМ ДЕМПФЕРОМ БОЛЬШОЙ ЖЕСТКОСТИ

Рассматривается механическая система, состоящая из двух взаимодействующих подсистем. При устранении взаимодействия одна из подсистем становится гамильтоновой системой, а другая – диссипативной линейной колебательной системой. При помощи метода интегральных многообразий изучаются движения, устанавливающиеся после затухания собственных высокочастотных колебаний диссипативной подсистемы. Построены эволюционные уравнения, описывающие поведение гамильтоновой подсистемы на длительных интервалах времени.

1. Описание системы. Основные предположения. Рассматривается механическая система, состоящая из двух взаимодействующих подсистем S_H и S_D.

При устранении взаимодействия подсистема S_H становится гамильтоновой системой с n степенями свободы, подсистема S_D – диссипативной линейной колебательной системой с m степенями свободы. Характерный период колебаний в подсистеме S_D и характерное время затухания этих колебаний сопоставимы по величине и существенно меньше характерного времени движений в подсистеме S_H.

Далее подсистему S_H будем называть демпфируемой, подсистему S_D – демпфером.

Уравнения движения системы $S_H + S_D$ запишем в форме Рауса [1]

$$\mathbf{P}^{\cdot} = -\nabla_{\mathbf{Q}} R, \quad \mathbf{Q}^{\cdot} = \nabla_{\mathbf{P}} R, \quad (\nabla_{\mathbf{v}} R)^{\cdot} - \nabla_{\mathbf{q}} R = -\nabla_{\mathbf{v}} \Phi \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{P} = (P_1,..., P_n)$, $\mathbf{Q} = (Q_1,..., Q_n)$ – канонические переменные используемые для описания движений в S_H, $\mathbf{q} = (q_1,..., q_n)$ – вектор обобщенных координат демпфера, $\mathbf{v} = \mathbf{q}^{\cdot}$. Точки означают производные по времени t.

Функция Рауса R в (1.1) является комбинацией гамильтониана H подсистемы S_H, лагранжиана L подсистемы S_D и некоторой функции K, характеризующей взаимодействие подсистем: $R = H + K - L$.

В соответствии со сделанными предположениями лагранжиан L и диссипативную функцию Φ демпфера можно записать в виде

$$L(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \varepsilon) = {}^1\!/_2[(\mathbf{v}, M\mathbf{v}) - \varepsilon^{-2}(\mathbf{q}, \Lambda\mathbf{q})], \quad \Phi(\mathbf{v}, \varepsilon) = {}^1\!/_2\varepsilon^{-1}(\mathbf{v}, D\mathbf{v}) \tag{1.2}$$

$$\varepsilon = T_D/T_H \ll 1$$

Здесь M, Λ, D – положительно определенные симметричные матрицы с постоянными коэффициентами, T_D и T_H – характерные времена процессов в S_D и S_H.

В качестве функции взаимодействия возьмем

$$K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{v}, \mathbf{q}) = (\mathbf{u}, \mathbf{q}) + {}^1\!/_2(\mathbf{v}, \Gamma\mathbf{q}) + K_2(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{q})$$

где $\mathbf{u} = (u_1(\mathbf{P}, \mathbf{Q}),..., u_m(\mathbf{P}, \mathbf{Q})) = \nabla_{\mathbf{q}} K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, 0, 0)$, Γ – антисимметричная матрица, элементы которой – функции $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$, функция $K_2(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{q}) = O(q^2)$, $q = |\mathbf{q}| = (q_1^2 + \ldots q_m^2)^{1/2}$.

При таком выборе K система $S_H + S_D$ является конечномерной моделью систем, встречающихся при изучении движения относительно центра масс деформируемого твердого тела (см. ниже, разд. 6).

Функцию H будем считать ограниченной в $R^n \times R^n$ вместе с производными до третьего порядка включительно. Функция $K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{v}, \mathbf{q})$ предполагается ограниченной вместе с первыми и вторыми производными в $R^n \times R^n \times \mathcal{B}^m_\Delta \times \mathcal{B}^m_\Delta$ ($\mathcal{B}^m_\Delta$ – шар радиуса Δ в R^m с центром в O).

2. Установившееся движение. При изучении динамики системы $S_H + S_D$ на интервалах времени, сравнимых с T_H или существенно превосходящих T_H, целесообразно рассматривать движение демпфера как вынужденное и использовать для его описания соотношения вида

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_*(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \varepsilon), \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}_*(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \varepsilon) \tag{2.1}$$

Подстановка (2.1) в уравнения для $\mathbf{P}^\cdot$, $\mathbf{Q}^\cdot$ в (1.1) приводит к замкнутой системе уравнений, характеризующей поведение подсистемы S_H после затухания собственных колебаний демпфера.

Различные модификации уравнений установившегося движения для конкретных систем построены в [2–4]. Были предприняты попытки [5, 6] дать строгое обоснование применению таких уравнений при описании регулярной составляющей движения методами теории пограничных функций [7].

Соотношения (2.1) определяют в фазовом пространстве системы $S_H + S_D$ гиперповерхность Σ, $\dim\Sigma = 2m$. Если эта гиперповерхность инвариантна относительно фазового потока системы, будем называть ее интегральным многообразием (ИМ) [8, 9].

Теорема. При достаточно малом значении параметра ε система (1.1) обладает ИМ Σ, описываемым соотношениями вида (2.1). На многообразии Σ система (1.1) эквивалентна системе

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^\cdot &= -\nabla_{\mathbf{Q}} H - \nabla_{\mathbf{Q}} K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{v}_*(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \varepsilon), \mathbf{q}_*(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \varepsilon))\\
\mathbf{Q}^\cdot &= -\nabla_{\mathbf{P}} H + \nabla_{\mathbf{P}} K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{v}_*(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \varepsilon), \mathbf{q}_*(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \varepsilon))
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Функции $\mathbf{v}_*(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \varepsilon)$, $\mathbf{q}_*(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \varepsilon)$ удовлетворяют неравенствам

$$|\mathbf{v}_*(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \varepsilon)| \leqslant \varepsilon^2 C_1, \quad |\mathbf{q}_*(\mathbf{v}, \mathbf{q}, \varepsilon)| \leqslant \varepsilon^2 C_1, \quad C_1 = \mathrm{const} > 0$$

Доказательство. Введем в уравнениях (1.1) вместо переменных $\mathbf{v}$, $\mathbf{q}$ переменные $\boldsymbol{\upsilon}$, $\boldsymbol{\xi}$ посредством замены

$$\boldsymbol{\upsilon} = \varepsilon^{-1}\mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\xi} = \varepsilon^{-2}\mathbf{q} + \Lambda^{-1}\mathbf{u}$$

В новых переменных движение описывается сингулярно возмущенной системой уравнений

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}^\cdot &= -\nabla_{\mathbf{Q}} H - \nabla_{\mathbf{Q}} K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \varepsilon\boldsymbol{\upsilon}, \varepsilon^2(\boldsymbol{\xi} - \Lambda^{-1}\mathbf{u}))\\
\mathbf{Q}' &= \nabla_{\mathbf{P}} H + \nabla_{\mathbf{P}} K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \varepsilon\boldsymbol{\upsilon}, \varepsilon^2(\boldsymbol{\xi} - \Lambda^{-1}\mathbf{u}))
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\varepsilon \begin{Vmatrix} \boldsymbol{\upsilon}^\cdot \\ \boldsymbol{\xi}^\cdot \end{Vmatrix} = \Xi \begin{Vmatrix} \boldsymbol{\upsilon} \\ \boldsymbol{\xi} \end{Vmatrix} + \varepsilon \begin{Vmatrix} X_{\boldsymbol{\upsilon}}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \boldsymbol{\upsilon}, \boldsymbol{\xi}, \varepsilon) \\ X_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \boldsymbol{\upsilon}, \boldsymbol{\xi}, \varepsilon) \end{Vmatrix}$$

Здесь

$$\Xi = \begin{Vmatrix} -M^{-1}D & -M^{-1}\Lambda \\ E & 0 \end{Vmatrix}$$

$$X_{\boldsymbol{\upsilon}} = \Gamma(\mathbf{P}, \mathbf{Q})\boldsymbol{\upsilon} + O(\varepsilon^2), \quad X_{\boldsymbol{\xi}} = \Lambda^{-1}\{\mathbf{u}, H\} + O(\varepsilon^2)$$

$$\{\mathbf{u}, H\} = (\{u_1, H\}, \ldots, \{u_m, H\})$$

$\{\cdot, \cdot\}$ – скобках Пуассона подсистемы S_H, E – единичная $(m \times m)$-матрица.

Система (2.3) удовлетворяет условиям теоремы о существовании ИМ у сингулярно возмущенных систем общего вида ([8], с. 265–271). Доказательство данной теоремы состоит в построении специального сжимающего отображения множества функций, задающих гиперповерхности в фазовом пространстве. Для системы (2.3) конструкция отображения существенно упрощается. Предполагая в дальнейшем использовать это отображение при выводе приближенных уравнений установившегося движения, опишем его подробнее.

Пусть $\mathcal{M}(s, S)$ – множество пар вектор-функций размерности m ($V(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$, $Z(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$), удовлетворяющих условиям

$$|V(\mathbf{P}', \mathbf{Q}') - V(\mathbf{P}, \mathbf{Q})| \leqslant s(|\mathbf{P}' - \mathbf{P}| + |\mathbf{Q}' - \mathbf{Q}|)$$

$$|Z(\mathbf{P}', \mathbf{Q}') - Z(\mathbf{P}, \mathbf{Q})| \leqslant s(|\mathbf{P}' - \mathbf{P}| + |\mathbf{Q}' - \mathbf{Q}|)$$

$$\sup_{R^n \times R^n} \max\{|V(\mathbf{P},\mathbf{Q})|, |Z(\mathbf{P},\mathbf{Q})|\} \leqslant S$$

Рассмотрим отображение $\mathcal{F}_\varepsilon$: $\mathcal{M}(s, S) \to \mathcal{M}(s, S)$ при котором пара (V, Z) переходит в пару $(\tilde{V}, \tilde{Z})$, где

$$\left\| \begin{matrix} \tilde{V}(\mathbf{P},\mathbf{Q}) \\ \tilde{Z}(\mathbf{P},\mathbf{Q}) \end{matrix} \right\| = \varepsilon \int_{-\infty}^{0} \exp(-\Xi\tau) \left\| \begin{matrix} \tilde{X}_\upsilon(\varepsilon\tau, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \varepsilon | V, Z) \\ \tilde{X}_\xi(\varepsilon\tau, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \varepsilon | V, Z) \end{matrix} \right\| d\tau$$

$$\tilde{X}_\zeta(t, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \varepsilon | V, Z) = X_\zeta(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{Q}}, V(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{Q}}), Z(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{Q}}), \varepsilon), \quad \zeta = \boldsymbol{\upsilon}, \boldsymbol{\xi}$$

Функции $\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}(t, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \varepsilon | V, Z)$, $\tilde{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{Q}}(t, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \varepsilon | V, Z)$ являются решением задачи Коши

$$\tilde{\mathbf{P}}(0, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \varepsilon | V, Z) = \mathbf{P}, \quad \tilde{\mathbf{Q}}(0, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \varepsilon | V, Z) = \mathbf{Q}$$

для замкнутой системы уравнений

$$\mathbf{P}^{\cdot} = -\nabla_{\mathbf{Q}} H - \nabla_{\mathbf{Q}} K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \varepsilon V, \varepsilon^2(Z - \Lambda^{-1}\mathbf{u}))$$

$$\mathbf{Q}^{\cdot} = -\nabla_{\mathbf{P}} H + \nabla_{\mathbf{P}} K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \varepsilon V, \varepsilon^2(Z - \Lambda^{-1}\mathbf{u}))$$

Можно показать, что

$$\varepsilon \left\| \begin{matrix} V(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{Q}})^{\cdot} \\ Z(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{Q}})^{\cdot} \end{matrix} \right\| = \Xi \left\| \begin{matrix} V(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{Q}}) \\ Z(\tilde{\mathbf{P}}, \tilde{\mathbf{Q}}) \end{matrix} \right\| + \varepsilon \left\| \begin{matrix} \tilde{X}_\upsilon \\ \tilde{X}_\xi \end{matrix} \right\|$$

При условии $\varepsilon < \varepsilon_0(s, S)$ для (V_a, Z_a), $(V_b, Z_b) \in \mathcal{M}(s, S)$ справедливы соотношения

$$\sup_{R^n \times R^n} \max\{|\tilde{V}_\zeta|, |\tilde{Z}_\zeta|\} \leqslant \varepsilon C_2 \quad (\zeta = a, b)$$

$$\sup_{R^n \times R^n} \max\{|\tilde{V}_a - \tilde{V}_b|, |\tilde{Z}_a - \tilde{Z}_b|\} \leqslant \tag{2.4}$$

$$\leqslant \varepsilon C_3 \sup_{R^n \times R^n} \max\{|V_a - V_b|, |Z_a - Z_b|\}$$

$$((\tilde{V}_a, \tilde{Z}_a) = \mathcal{F}_\varepsilon[(V_a, Z_a)], \quad (\tilde{V}_b, \tilde{Z}_b) = \mathcal{F}_\varepsilon[(V_b, Z_b)])$$

(C_2, C_3 – положительные постоянные).

Так как при $\varepsilon < \min\{\varepsilon_0, C_3^{-1}\}$ отображение $\mathcal{F}_\varepsilon$ является сжимающим, то существует такая пара $(V_*, Z_*) \in \mathcal{M}(s, S)$, что $(V_*, Z_*) = \mathcal{F}_\varepsilon[(V_*, Z_*)]$. Соотношения

$$\boldsymbol{\upsilon} = V_*(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \varepsilon), \quad \boldsymbol{\xi} = Z_*(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \varepsilon) \tag{2.5}$$

определяют ИМ системы (2.3). Функции V_*, Z_* зависят от ε как от параметра отображения $\mathcal{F}_\varepsilon$.

Наличие у системы (2.3) ИМ (2.5) означает существование ИМ (2.1) у системы (1.1). Теорема доказана.

Многообразие Σ – притягивающее множество. В некоторой окрестности Σ изменение отношения текущего и начального расстояний до многообразия Σ для произвольного решения системы (1.1) ограничено сверху функцией $C_5\exp(-C_4t/\varepsilon)$, где C_4, C_5 –положительные постоянные ([8], с. 273–276). Поэтому при изучении асимптотического поведения движений в подсистеме S_H можно ограничиться анализом решений, лежащих на многообразии Σ.

3. Особенности локального описания установившихся движений. В фазовом пространстве демпфируемой системы выделим замкнутую ограниченную область $\mathfrak{D}$. Локальным ИМ $\Sigma_{\mathfrak{D}}$ будем называть гиперповерхность в $\mathfrak{D}\times\mathcal{B}^m_\Delta\times\mathcal{B}^m_\Delta$, описываемую соотношениями вида (2.1) и удовлетворяющую условию: любая начинающаяся на $\Sigma_{\mathfrak{D}}$ фазовая траектория системы (1.1) принадлежит $\Sigma_{\mathfrak{D}}$ до тех пор, пока не покинет $\mathfrak{D}\times\mathcal{B}^m_\Delta\times\mathcal{B}^m_\Delta$ [8].

Пусть у систем $S_H^{(1)}+S_D^{(1)}$ и $S_H^{(2)}+S_D^{(2)}$ функции Рауса $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$ совпадают в $\mathfrak{D}\times\mathcal{B}^m_\Delta\times\mathcal{B}^m_\Delta$. Тогда $\Sigma^{(k)}_{\mathfrak{D}}=\Sigma^{(k)}\cap\mathfrak{D}\times\mathcal{B}^m_\Delta\times\mathcal{B}^m_\Delta$ $(k=1,2)$ будут локальными ИМ обеих систем одновременно.

Покажем, что в общем случае $\Sigma^{(1)}_{\mathfrak{D}}\not\equiv\Sigma^{(2)}_{\mathfrak{D}}$. Рассмотрим такую область $\mathfrak{D}$ и такие системы $S_H^{(1)}+S_D^{(1)}$ и $S_H^{(2)}+S_D^{(2)}$, что любая принадлежащая $\Sigma^{(1)}_{\mathfrak{D}}$ или $\Sigma^{(2)}_{\mathfrak{D}}$ фазовая траектория уравнений (1.1) с функцией $R=R^{(1)}\equiv R^{(2)}$ при $t\to-\infty$ покидает $\mathfrak{D}\times\mathcal{B}^m_\Delta\times\mathcal{B}^m_\Delta$. В области $\mathfrak{D}$

$$\left\|\begin{matrix}V_*^{(1)}-V_*^{(2)}\\ Z_*^{(1)}-Z_*^{(2)}\end{matrix}\right\|=\varepsilon\int\limits_{-\infty}^{T_{\mathfrak{D}}(\mathbf{P},\mathbf{Q})}\exp(-\Xi\tau)\left\|\begin{matrix}\tilde{X}_\upsilon^{(1)}-\tilde{X}_\upsilon^{(2)}\\ \tilde{X}_\xi^{(1)}-\tilde{X}_\xi^{(2)}\end{matrix}\right\|d\tau \tag{3.1}$$

Здесь $V_*^{(k)}$, $Z_*^{(k)}$ – функции, определяющие им $\Sigma_*^{(k)}$ системы $S_H^{(k)}+S_D^{(k)}$, $T_{\mathfrak{D}}(\mathbf{P},\mathbf{Q})\leqslant 0$ – момент пересечения решением

$$\tilde{\mathbf{P}}(t,\mathbf{P},\mathbf{Q},\varepsilon|V_*^{(k)},Z_*^{(k)}),\quad \tilde{\mathbf{Q}}(t,\mathbf{P},\mathbf{Q},\varepsilon|V_*^{(k)},Z_*^{(k)})$$

границы области $\mathfrak{D}$ $(k=1,2)$.

Значение интеграла в (3.1) определяется поведением функций $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$ вне $\mathfrak{D}\times\mathcal{B}^m_\Delta\times\mathcal{B}^m_\Delta$ и в общем случае отлично от нуля.

Оценим расстояние между гиперповерхностями $\Sigma^{(1)}_{\mathfrak{D}}$ и $\Sigma^{(2)}_{\mathfrak{D}}$. Возьмем область $\tilde{\mathfrak{D}}$, лежащую в $\mathfrak{D}$ вместе с некоторой окрестностью, и обозначим

$$T_{\mathfrak{D}}(\tilde{\mathfrak{D}})=\max_{(\mathbf{P},\mathbf{Q})\in\partial\tilde{\mathfrak{D}}}T_{\mathfrak{D}}(\mathbf{P},\mathbf{Q})$$

Используя ограниченность функций $X_\upsilon^{(k)}$, $X_\xi^{(k)}$ $(k=1,2)$ и соотношение (3.1), найдем

$$\sup_{\mathfrak{D}}\max\{|V_*^{(1)}-V_*^{(2)}|,\ |Z_*^{(1)}-Z_*^{(2)}|\}\leqslant\varepsilon C_6\exp(-\kappa T_{\mathfrak{D}}(\tilde{\mathfrak{D}})/\varepsilon) \tag{3.2}$$

Здесь κ – значение действительной части ближайшего к мнимой оси корня характеристического уравнения $\det|M\rho^2+D\rho+\Lambda|=0$, C_6 – положительная постоянная.

Из (3.2) следует, что расстояние между $\Sigma^{(1)}_{\mathfrak{D}}$ и $\Sigma^{(2)}_{\mathfrak{D}}$ в $\tilde{\mathfrak{D}}$ имеет величину $O(\varepsilon^2\exp(-\kappa T_{\mathfrak{D}}(\tilde{\mathfrak{D}})/\varepsilon))$.

Неединственность локального ИМ следует учитывать при анализе динамики конкретных систем S_H+S_D в ситуации, когда применение доказанной в разд. 2 теоремы становится возможным только после переопределения или доопределения функций $H(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$, $K(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{v}, \mathbf{q})$ в некоторой области фазового пространства системы.

4. Приближенные уравнения установившегося движения системы. С погрешностью $O(\varepsilon^{k+1})$ ИМ Σ_* системы (2.3) описывается соотношениями $\mathbf{v} = V_k$, $\xi = Z_k$, где $(V_k, Z_k) = \mathcal{F}_\varepsilon^k[(0, 0)]$. Действительно, имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\sup_{R^n\times R^n} \max\{|V_k - V_*|, |Z_k - Z_*|\} \leqslant \varepsilon C_3 \sup \max\{|V_{k-1} - V_*|, |Z_{k-1} - Z_*|\} \leqslant \ldots$$

$$\ldots \leqslant (\varepsilon C_3)^{(k-1)} \sup_{R^n\times R^n} \max\{|V_1 - V_*|, |Z_1 - Z_*|\} \leqslant$$

$$\leqslant (\varepsilon C_3)^k \sup_{R^n\times R^n} \max\{|V_*|, |Z_*|\} \leqslant \varepsilon^{k+1} C_7, \quad C_7 = C_2 C_3^{k+1}$$

При $k = 1$ получим

$$\left\| \begin{matrix} V_1 \\ Z_1 \end{matrix} \right\| = \varepsilon \int_{-\infty}^{0} \exp(-\Xi\tau) \left\| \begin{matrix} \tilde{X}_\mathbf{v}(\varepsilon\tau, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \varepsilon|0,0) \\ \tilde{X}_\xi(\varepsilon\tau, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \varepsilon|0,0) \end{matrix} \right\| d\tau = -\varepsilon\Xi^{-1} \left\| \begin{matrix} X_\mathbf{v}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, 0, 0, \varepsilon) \\ X_\xi(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, 0, 0, \varepsilon) \end{matrix} \right\| +$$

$$+\varepsilon\Xi^{-1} \int_{-\infty}^{0} \exp(-\Xi\tau) \left\| \begin{matrix} \dfrac{d}{d\tau}\tilde{X}_\mathbf{v}(\varepsilon\tau, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \varepsilon|0,0) \\ \dfrac{d}{d\tau}\tilde{X}_\xi(\varepsilon\tau, \mathbf{P}, \mathbf{Q}, \varepsilon|0,0) \end{matrix} \right\| d\tau =$$

$$= -\varepsilon\Xi^{-1} \left\| \begin{matrix} 0 \\ \Lambda^{-1}\{\mathbf{u}, H\} \end{matrix} \right\| + O(\varepsilon^2), \quad \Xi^{-1} = \left\| \begin{matrix} 0 & E \\ -\Lambda^{-1}M & -\Lambda^{-1}D \end{matrix} \right\|$$

Таким образом, с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ ИМ Σ_* определяют соотношения

$$\mathbf{v} = -\varepsilon\Lambda^{-1}\{\mathbf{u}, H\}, \quad \xi = \varepsilon\Lambda^{-1}D\Lambda^{-1}\{\mathbf{u}, H\}$$

Отсюда следует, что в установившемся движении с погрешностью $O(\varepsilon^3)$

$$\mathbf{v} = -\varepsilon^2\Lambda^{-1}\{\mathbf{u}, H\} \tag{4.1}$$

и с погрешностью $O(\varepsilon^4)$

$$\mathbf{q} = -\varepsilon^2\Lambda^{-1}\mathbf{u} + \varepsilon^3\Lambda^{-1}D\Lambda^{-1}\{\mathbf{u}, H\} \tag{4.2}$$

Подстановка выражений (4.1), (4.2) в (2.2) приводит к системе уравнений установившегося движения

$$\mathbf{P}^\cdot = -\nabla_\mathbf{Q}\mathcal{H} - \varepsilon^3 U_\mathbf{Q}\Lambda^{-1}D\Lambda^{-1}\{\mathbf{u}, H\}, \quad \mathbf{Q}^\cdot = \nabla_\mathbf{P}\mathcal{H} + \varepsilon^3 U_\mathbf{P}\Lambda^{-1}D\Lambda^{-1}\{\mathbf{u}, H\} \tag{4.3}$$

где

$$U_\mathbf{P} = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial P_1} \cdots \dfrac{\partial u_m}{\partial P_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial P_n} \cdots \dfrac{\partial u_m}{\partial P_n} \end{matrix} \right\|, \quad U_\mathbf{Q} = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial Q_1} \cdots \dfrac{\partial u_m}{\partial Q_1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial Q_n} \cdots \dfrac{\partial u_m}{\partial Q_n} \end{matrix} \right\|$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \varepsilon) = H(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) + \varepsilon^2 H_2(\mathbf{P}, \mathbf{Q}), \quad H_2(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = -{}^1\!/_2(\mathbf{u}, \Lambda^{-1}\mathbf{u})$$

Близкая к гамильтоновой система уравнений (4.3) описывает влияние взаимодействия с демпфером на динамику подсистемы S_H с точностью $O(\varepsilon)$ на интервале времени ε^{-3}.

5. Эволюция установившихся движений в интегрируемой подсистеме S_H. Пусть $\mathbf{I} = (I_1, \ldots, I_n)$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ – переменные "действие–угол" в S_H. В переменных $\mathbf{I}$, φ уравнения установившегося движения имеют вид

$$\mathbf{I}^\cdot = -\varepsilon^2\nabla_\varphi H_2 - \varepsilon^3 U_\varphi \Lambda^{-1} D\Lambda^{-1} U_\varphi^T \omega, \tag{5.1}$$

$$\varphi^{\cdot} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}) + \varepsilon^2 \nabla_{\mathbf{I}} H_2 + \varepsilon^3 U_{\mathbf{I}} \Lambda^{-1} D \Lambda^{-1} U_{\varphi}^T \boldsymbol{\omega}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}) = \nabla_{\mathbf{I}} H(\mathbf{I})$ – вектор частот подсистемы S_H.

Переменные в (5.1) разделяются: переменные **I** являются медленными ($\mathbf{I}^{\cdot} = O(\varepsilon^2)$), переменные φ – быстрыми ($\varphi^{\cdot} = O(1)$).

Изучим поведение медленных переменных при помощи метода усреднения [10].

Ограничимся случаем, когда ряд Фурье по φ функции $\mathbf{u}(\mathbf{I}, \varphi)$ содержит конечное число членов:

$$\mathbf{u}(\mathbf{I}, \varphi) = \sum_{\mathbf{k} \in Z^n, |\mathbf{k}| \leqslant N} \mathbf{u}_k(\mathbf{I}) e^{i\langle \mathbf{k}, \varphi \rangle}, \quad \langle \mathbf{k}, \varphi \rangle = k_1 \varphi_1 + \ldots + k_n \varphi_n$$

В системе (5.1) совершим две последовательные усредняющие замены переменных

$$(\mathbf{I}, \varphi) \xrightarrow{1} (\tilde{\mathbf{I}}, \tilde{\varphi}) \xrightarrow{2} (\tilde{\tilde{\mathbf{I}}}, \tilde{\tilde{\varphi}})$$

Первая замена устраняет члены второго порядка по ε в уравнениях для медленных переменных и представляет каноническое преобразование с производящей функцией

$$S(\tilde{\mathbf{I}}, \varphi) = \langle \tilde{\mathbf{I}}, \varphi \rangle - i\varepsilon^2 \sum_{\mathbf{k} \in Z^n \setminus 0,\ |\mathbf{k}| \leqslant 2N} \frac{H_{2\mathbf{k}}(\mathbf{I})}{\langle \mathbf{k}, \varphi \rangle} e^{i\langle \mathbf{k}, \varphi \rangle}$$

где

$$H_{2\mathbf{k}}(\mathbf{I}) = -\tfrac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}' \in Z^n,\ |\mathbf{k}'| \leqslant N,\ |\mathbf{k}-\mathbf{k}'| \leqslant N} (\mathbf{u}_{\mathbf{k}'}(\mathbf{I}),\ \Lambda^{-1} \mathbf{u}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}(\mathbf{I}))$$

Вторая замена удаляет из уравнений для медленных переменных члены третьего порядка по ε, зависящие от φ.

В асимптотически малых окрестностях резонансных поверхностей $\langle \boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}), \mathbf{k} \rangle = 0$ ($\mathbf{k} \in Z^n$, $|\mathbf{k}| \leqslant 2N$) данные замены теряют смысл. Свойства решений системы (5.1) при резонансах следует исследовать методами, описанными в [11] (гл. III).

Вдали от резонансных поверхностей поведение медленных переменных с точностью $O(\varepsilon)$ на интервале времени ε^{-3} описывается эволюционными уравнениями (для усредненных переменных используются исходные обозначения)

$$\mathbf{I}^{\cdot} = -\nabla_{\omega} \Phi_{\text{eff}}(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}), \mathbf{I}) \tag{5.2}$$

где

$$\Phi_{\text{eff}}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I}) = \varepsilon^3/2 \langle \boldsymbol{\omega}, D_{\text{eff}} \boldsymbol{\omega} \rangle$$

$$D_{\text{eff}} = \langle\langle U_{\varphi} \Lambda^{-1} D \Lambda^{-1} U_{\varphi}^T \rangle\rangle = \sum_{\mathbf{k} \in Z^n,\ |\mathbf{k}| \leqslant N} (\mathbf{u}_{\mathbf{k}}, \Lambda^{-1} D \Lambda^{-1} \mathbf{u}_{-\mathbf{k}}) \mathbf{k}^T \mathbf{k}$$

$$\langle\langle \cdot \rangle\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} (\cdot) d\varphi_1 \ldots d\varphi_n$$

Квадратичная форма $\Phi_{\text{eff}}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{I})$ в (5.2) является аналогом функции $\Phi(\mathbf{v}, \varepsilon)$ в (1.1) и характеризует диссипацию энергии в установившемся движении

$$\langle\langle \Phi(\mathbf{v}_*(\mathbf{I}, \varphi, \varepsilon), \varepsilon) \rangle\rangle = \Phi_{\text{eff}}(\boldsymbol{\omega}(\mathbf{I}), \mathbf{I}) + O(\varepsilon^4)$$

6. Система $S_H + S_D$ как модель деформируемого твердого тела, совершающего вращательно-поступательное движение. Во многих исследованиях, например, при изучении динамики больших космических конструкций или приливной эволюции вращения планет [4, 12, 13], возникают задачи о вращательно-поступательном движении деформируемого твердого тела в потенциальном поле.

Движение деформируемого тела относительно центра масс состоит из вращения тела как целого и упругих смещений **s** отдельных элементов. Диссипацией механической энергии при относительных смещениях приводит к затуханию высокочастотных собственных колебаний и оказывает влияние на движение тела как целого.

Как правило, время затухания собственных колебаний существенно меньше характерного времени в движении тела как целого. Поэтому режим установившегося движения является основным для деформируемого тела.

Моделью N-го порядка назовем систему $S_H + S_D$, у которой подсистема S_H описывает движение тела как целого без учета деформаций, а подсистема S_D характеризует деформацию тела на основе конечномерной аппроксимации поля смещений s, использующей формы свободных колебаний, отвечающие N низшим частотам тела.

При $N \to \infty$ правые части уравнений установившегося движения моделей соответствующего порядка образуют быстро сходящуюся функциональную последовательность. Это позволяет при качественном анализе влияния деформаций на движение конкретных объектов рассматривать модели малых порядков.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (ФИ-00374), Международной ассоциации развития сотрудничества ученых СНГ и ЕС (INTAS) (93–339) и Международного научного фонда (THN 000).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Наука, 1966. 300 с.
2. *Черноусько Ф.Л.* О движении твердого тела с упругими и диссипативными элементами // ПММ. 1978. Т. 42. Вып. 1. С. 34–42.
3. *Черноусько Ф.Л.* О движении вязкоупругого твердого тела относительно центра масс // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. № 1. С. 22–26.
4. *Вильке В.Г.* Аналитические и качественные методы механики систем с бесконечным числом степеней свободы. М.: Изд-во МГУ, 1986. 192 с.
5. *Черноусько Ф.Л., Шамаев А.С.* Асимптотика сингулярных возмущений в задаче динамики твердого тела с упругими и диссипативными элементами // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. № 3. С. 33–42.
6. *Синицын Е.В.* Асимптотика сингулярных возмущений в исследовании поступательно-вращательного движения вязкоупругого тела // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С. 104–110.
7. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.
8. *Митропольский Ю.А., Лыкова О.Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973. 512 с.
9. *Стрыгин В.В., Соболев В.А.* Разделение движений методом интегральных многообразий. М.: Наука, 1988. 256 с.
10. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963. 410 с.
11. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 3. 304 с.
12. *Маркеев А.П.* Влияние продольных упругих колебаний тела на его быстрые вращения в гравитационном поле // Изв. АН СССР. МТТ. 1989. № 6. С. 38–45.
13. *Холостова О.В.* О быстрых вращениях упругой сферической оболочки в гравитационном поле // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 2. С. 129–139.

Москва

Поступила в редакцию
27.IX.1994