УДК 531.36

© 1995 г. В.И. Воротников

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ОТНОШЕНИЮ К ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассматривается задача устойчивости по отношению к части переменных (частичной устойчивости). Проанализированы мотивы и "последствия" назначений допустимых границ изменения "неконтролируемых" переменных в данной задаче. Показывается, что дополнительные ограничения на "неконтролируемые" переменные при исследовании частичной устойчивости приводят к возможности (и целесообразности) использования функций Ляпунова с "промежуточными" к известным свойствами. Также показывается, как конкретизировать понятие знакоопределенности по части переменных функций Ляпунова, чтобы избежать подобных "промежуточных" свойств. Даются дополнения к основной теореме об устойчивости по части переменных, учитывающие возникающие особенности. Формулируются положения, позволяющие лучше понять особенности функционирования частично устойчивых систем. Приводятся примеры.

Задача об устойчивости движения по части переменных [1, 2] естественным образом возникает в приложениях и называется также задачей частичной устойчивости (ЧУ-задачей). В общем плане ЧУ-задача анализируется как единообразная задача $\mathbf{y}$-устойчивости положения $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{0}$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений [2–14]

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{X}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0} \qquad (0.1)$$

При этом система (0.1) строится (каждый раз заново) как система возмущенного движения для исследуемого на устойчивость процесса. К ЧУ-проблеме примыкают также задачи: устойчивости по заданным функциям состояния [15, 16]; устойчивости по двум мерам [17–19]; полиустойчивости [20, 21].

Состояние собственно ЧУ-теории и ее приложений можно представить по работам [2–14], где указаны задачи, методы и особенности исследования, а также библиография.

В то же время мало анализировались мотивы и "последствия" назначений допустимых границ изменения "неконтролируемых" $\mathbf{z}$-переменных в ЧУ-задачах. Между тем указанный фактор существенно влияет на эффективность их исследования.

Кроме этого, осмысления требуют особенности функционирования ЧУ-систем. В самом деле, в ЧУ-теории изучаются достаточно тонкие свойства системы. Необходимая "стабильность" таких ЧУ-свойств в отличие от свойств "полной" устойчивости определяется бóльшим числом факторов. Требуется глубокое проникновение в сущность ЧУ-задач, понимание законов функционирования ЧУ-систем, механизмов возникновения (потери) ЧУ-свойств.

Цель статьи – изучение данных вопросов.

1. Мотивы назначения допустимых границ изменения "неконтролируемых" переменных. В задаче $\mathbf{y}$-устойчивости положения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (0.1) поведение $\mathbf{z}$-переменных (при соблюдении общих условий) в принципе не требует контроля. В то же время во взаимосвязанной системе (0.1) они оказывают существенное влияние на "основные" $\mathbf{y}$-переменные.

Выделим факторы, определяющие допущения на "неконтролируемые" z-переменные.

1) *Расчет на "наихудший" (при соблюдении общих условий) случай изменения "неконтролируемых" переменных.* Приводит к допущению $\|\mathbf{z}\| < \infty$ и, в итоге, к изучению y-устойчивости положения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (0.1) в области

$$t \geqslant 0, \quad \|\mathbf{y}\| \leqslant H = \text{const} > 0, \quad \|\mathbf{z}\| < \infty \tag{1.1}$$

Подобный расчет может оказаться излишне осторожным. Действительно, не используются имеющие место (или допустимые) неравенства $|z_j| \leqslant H$ для некоторых z-компонент или соотношения типа $|f_i(t, \mathbf{x})| \leqslant H$. Такие соотношения могут существенно облегчить исследование y-устойчивости. В известной мере расчет на "наихудший" случай в ЧУ-задаче сравним с концепцией теории игр [22].

2) *Расчет на конкретизацию требований к "неконтролируемым" переменным.* Альтернатива расчету на "наихудший" случай. Смысл подобного расчета различен.

2а) *Рационализация постановки ЧУ-задачи.* Предполагает "навязывание" системе некоторых общих (в том числе – интегральных) оценок для "неконтролируемых" переменных. Это существенно упрощает решение. В качестве примера укажем на исследования [10] по устойчивости движения тел, имеющих полости с жидкостью.

2б) *Собственно возможность облегчения решения ЧУ-задач.* Речь идет об использовании дополнительных соотношений, связывающих компоненты фазового вектора системы (0.1). Выполнимость подобных соотношений должна подтверждаться (тем или иным способом) в процессе решения. На этот подход опирается, например, метод решения ЧУ-задачи путем построения вспомогательных систем [13].

3) *Расчет на знание оценок (сколь угодно грубых) для "неконтролируемых" переменных.* При этом ЧУ-задачу для системы (0.1) можно свести к задаче устойчивости по отношению ко всем переменным для вспомогательной системы дифференциальных уравнений той же размерности [3].

2. Дополнения к основной теореме о частичной устойчивости. Предполагают конкретизацию понятия знакоопределенности по отношению к части переменных для используемой в этой теореме V-функции Ляпунова. При этом расширяется возможный набор переменных, по которым V-функция знакоопределенна (за счет включения в этот набор не только фазовых переменных системы (0.1), но и некоторых их функций), а также уточняются требования к "неконтролируемым" переменным.

Введем предположения [10] о непрерывности правой части системы (0.1), единственности и z-продолжимости решений этой системы. Также введем функции: 1) $a(r)$ – непрерывную, монотонно возрастающую при $r \in [0, H]$; 2) скалярную $V(t, \mathbf{x})$ и векторную $\mathbf{W}(t, \mathbf{x})$, непрерывно дифференцируемые в области (1.1). Считаем, что $a(0) = V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$, $\mathbf{W}(t, \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$. Обозначим $\dot{V}$ производную V в силу системы (0.1).

Теорема 1. Пусть для системы (0.1) найдутся скалярная $V(t, \mathbf{x})$ и векторная $\mathbf{W}(t, \mathbf{x})$ функции, такие, что в области

$$t \geqslant 0, \quad \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{W}(t, \mathbf{x})\| \leqslant H, \quad \|\mathbf{z}\| < \infty \tag{2.1}$$

выполняются условия

$$V(t, \mathbf{x}) \geqslant a\,(\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{W}(t, \mathbf{x})\|) \tag{2.2}$$

$$\dot{V} \leqslant 0 \tag{2.3}$$

Тогда положение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (0.1) y-устойчиво.

Доказательство проводится по схеме [2]. Для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geqslant 0$, $\varepsilon \in (0, H)$ в силу непрерывности функций V, a и условий $a(0) = V(t, \mathbf{0}) \equiv 0$ можно найти число

$\delta(\varepsilon, t_0) > 0$, такое, что из $\| x_0 \| < \delta$ следует $V(t_0, x_0) \leqslant a(\varepsilon)$. Для решения $x = x(t; t_0, x_0)$ с $\| x_0 \| < \delta$ в силу условий (2.2), (2.3) при всех $t \geqslant t_0$ будем иметь

$$a (\| y(t; t_0, x_0) \| + \| W (t, x (t; t_0, x_0)) \|) \leqslant V(t, x (t; t_0, x_0)) \leqslant V(t_0, x_0) \leqslant a(\varepsilon)$$

Учитывая свойства функции $a(r)$, при этом получаем $\| y(t; t_0, x_0) \| + \| W (t, x (t; t_0, x_0)) \| < \varepsilon$, $t \geqslant t_0$. Следовательно, $\| y(t; t_0, x_0) \| < \varepsilon$, $t \geqslant t_0$. Теорема доказана.

Обсуждение теоремы 1. 1°. При $W = 0$ получаем теорему В.В. Румянцева [2] об устойчивости по части переменных. Неравенства (1.1), принимаемые в расчете на "наихудший" случай изменения "неконтролируемых" z-переменных, заменяются на более ограничительные неравенства (2.1).

2°. Неравенство (2.2) означает знакоопределенность V-функции по отношению к y и компонентам W-функции – (y, W)-знакоопределенность в смысле [2]. При этом выбор подходящей W-функции заранее не ясен, и она определяется в процессе решения. В этом смысле W-функция играет роль второй (векторной) функции Ляпунова (наряду с первой, скалярной V-функцией).

3°. Известно [10], что знакоопределенная по всем переменным V-функция не является, вообще говоря, знакоопределенной по отношению к их части. Это обстоятельство предопределяет тот факт, что уже в случае $\dim(y) = \dim(z) = 1$ функция $V(y_1, z_1)$, удовлетворяющая условиям (2.2), (2.3), может не быть знакоопределенной ни по Ляпунову, ни по отношению к y_1 (в смысле [2]). Такова, например, функция [14]

$$V = y_1^2(1+z_1^2)(1+y_1^4 z_1^4)^{-1} \tag{2.4}$$

Действительно, хотя при $W = y_1 z_1$ и достаточно малом H в области (2.1) справедливо условие (2.2), но $\lim V = 0$ при любом фиксированном y_1 и $z_1 \to \infty$. В результате не выполняется не только условие знакоопределенности по Ляпунову ($V = 0$ при $y_1 = 0$ и любом z_1), но и условие $V(t, x) \geqslant a (\| y \|)$ в области (1.1) – условие y-знакоопределенности [2]. Поэтому выбор V-функций в задаче y-устойчивости положения $x = 0$ системы (0.1) целесообразен не только среди знакоопределенных по отношению к y (или по отношению к большему числу фазовых переменных) функций. Целесообразно также рассматривать V-функции, знакоопределенные как по отношению к y, так и (одновременно) по отношению к некоторым функциям $W = W (t, x)$. Свойства таких V-функций уже при $\dim(y) = \dim(z) = 1$ могут быть "промежуточными" к свойствам знакоопределенности по отношению к y [2] и по Ляпунову.

Отметим, что при каждом $0 < c < {}^1/_2$ кривые, определяющие поверхности $V = c$ уровня V-функции (2.4), разбиваются на два непересекающихся класса. Первый класс образуют разомкнутые, охватывающие ось $y_1 = 0$ кривые, характерные для классических y_1-знакоопределенных (в смысле [2]) V-функций. Особенность в наличии второго, дополнительного класса кривых. Его образуют также разомкнутые кривые, удаляющиеся от положения $y_1 = z_1 = 0$ при уменьшении числа c и асимптотически приближающиеся к осям $y_1 = 0$ и $z_1 = 0$ соответственно при $z_1 \to \infty$ и $y_1 \to \infty$.

4°. Если V зависит (явно) от t, то уже в случае $\dim(y) = \dim(z) = 1$ "промежуточные" свойства возможны не только при $z_1 \to \infty$. Рассмотрим, например, не знакоопределенную по Ляпунову функцию

$$V = y_1^2(1+e^{2t} z_1^2)(1+e^{4t} y_1^4 z_1^4)^{-1} \tag{2.5}$$

При $W = e^t y_1 z_1$ и достаточно малом H в области (2.1) выполняется условие (2.2). Между тем V-функция (2.5) не y_1-знакоопределенна в смысле [2], ибо $V \to 0$ при $z_1 \to \infty$ (или $t \to \infty$) и любых фиксированных t, y_1 (соответственно y_1, z_1).

5°. В случае

$$V(t, x) \equiv V^*(t, y, W(t, x)) \tag{2.6}$$

проверка условия (2.2) сводится к проверке знакоопределенности V^* по Ляпунову. Если, в частности, V^* – квадратичная форма переменных y, W, то для проверки можно использовать обобщенный критерий Рауса–Гурвица. Отметим, что структура (2.6) V-функций позволяет существенно расширить возможности решения поставленной в [10] задачи исследования y-устойчивости положения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (0.1) при помощи квадратичных форм. В отличие от [10] посредством структуры (2.6) к решению этой задачи привлекаются "существенно нелинейные" V-функции.

6°. Теорема 1 может быть обобщена в различных направлениях. Так, если в области (2.1), помимо (2.2), (2.3) выполняется также условие $V(t, \mathbf{0}, \mathbf{z}) \equiv 0$, то положение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (0.1) y-устойчиво при большом $\mathbf{z}_0$ (в смысле [13]).

Введем $b(r)$, $U(t, \mathbf{x})$ – функции того же типа, что и a, V.

Теорема 2. Пусть для системы (0.1) найдутся две скалярные $V(t, \mathbf{x})$, $U(t, \mathbf{x})$ и векторная $\mathbf{W}(t, \mathbf{x})$ функции, такие, что в области (2.1), помимо (2.3) также выполняются условия

$$V(t, \mathbf{x}) \geqslant a\,(\,\|\mathbf{y}\|) \tag{2.7}$$

$$U\,(t, \mathbf{x}) \geqslant b\,(\,\|\mathbf{W}\,(t, \mathbf{x})\,\|), \quad \dot{U} \leqslant 0 \tag{2.8}$$

Тогда положение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (0.1) y-устойчиво.

Доказательство. При выполнении в области (2.1) условий (2.3), (2.7) для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geqslant 0$, $\varepsilon \in (0, H)$ можно найти число $\delta_1(\varepsilon, t_0) > 0$, такое, что для решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ с $\|\mathbf{x}_0\| < \delta_1$, удовлетворяющего при всех $t \geqslant t_0$ неравенству $\|\mathbf{y}\,(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| + \|\mathbf{W}(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0))\| \leqslant H$, будем иметь $\|\mathbf{y}\,(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$, $t \geqslant t_0$.

С другой стороны, при выполнении в области (2.1) условий (2.8) для любого $t_0 \geqslant 0$ найдется число $\delta_2(t_0, \varepsilon) > 0$, такое, что из $\|\mathbf{x}_0\| < \delta_2$ следует $\|\mathbf{W}\,(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0))\| \leqslant$ $\leqslant H-\varepsilon$, $t \geqslant t_0$.

Полагая $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, заключаем, что в результате для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geqslant 0$, $\varepsilon \in (0, H)$ для каждого решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}\,(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ с $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ справедливо неравенство $\|\mathbf{y}\,(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$, $t \geqslant t_0$. Теорема доказана.

Обсуждение теоремы 2. 1°. V-функция, удовлетворяющая в области (2.1) неравенству (2.2), удовлетворяет и неравенству (2.7). Следовательно, она y-знакоопределенна в области (2.1) (но не в области (1.1), как в [2]). Однако выполняющиеся в области (2.1) условия (2.3), (2.7) не гарантируют неравенства $\|\mathbf{y}\,(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| + \|\mathbf{W}\,(t, \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0))\| \leqslant H$, $t \geqslant t_0$ вдоль всех решений системы (0.1) с достаточно малым значением $\|\mathbf{x}_0\|$. (Не гарантируется подтверждение принимаемых ограничений (2.1) на "неконтролируемые" переменные.) Поэтому V-функция, удовлетворяющая в области (2.1) условиям (2.3), (2.7), не гарантирует y-устойчивость положения $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (0.1). В то же время $(\mathbf{y}, \mathbf{W})$-знакоопределенная V-функция при выполнении условия (2.3) обеспечивает y-устойчивость. При этом подтверждаются принимаемые ограничения на "неконтролируемые" переменные.

2°. V-функция, y-знакоопределенная в (2.1), обеспечит y-устойчивость, если доказать, что неравенство $\|\mathbf{W}(t, \mathbf{x})\| \leqslant H$, $t \geqslant t_0$ выполняется вдоль соответствующих решений системы (0.1). Например, это можно сделать посредством еще одной функции Ляпунова. Этот подход (условия (2.8)) реализован в теореме 2.

3. Конкретизация понятия y-знакоопределенности V-функции. Появление у V-функций указанных "промежуточных" свойств можно предотвратить. Для этого проверять y-знакоопределенность V следует не в области (1.1), а на множестве $M = \{\mathbf{x}\colon \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\}$ решений системы (0.1) с достаточно малым значением $\|\mathbf{x}_0\|$. Такой проверки (когда она возможна) достаточно для установления y-устойчивости.

Теорема 3. Пусть для системы (0.1) найдется функция $V\,(t, \mathbf{x})$, такая, что помимо (2.3), на множестве M выполняется условие

$$V\,(t, \mathbf{x}\,(t; t_0, \mathbf{x}_0)) \geqslant a\,(\|\mathbf{y}\,(t; t_0, \mathbf{x}_0)\|) \tag{3.1}$$

Тогда положение $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ системы (0.1) y-устойчиво.

Обсуждение теоремы 3. 1°. Условия теоремы 3 отличаются от приведенных в [2] тем, что **y**-знакоопределенность V-функции проверяется не в области (1.1), а на множестве M. Близкий результат (не в связи с обсуждаемыми вопросами) получен в [6].

2°. При выполнении условия (2.3) V-функции (2.4), (2.5) будут y_1-определенно положительными в смысле (3.1). Действительно, в силу (2.3) на множестве M справедливо неравенство $|W(t;\mathbf{x}(t;t_0,\mathbf{x}_0))|\leqslant H$. Значит, исключаются случаи, приводящие к "промежуточным" свойствам.

3°. Функция [10]

$$V=(y_1^2+z_1^2)(1+z_1^4)^{-1} \tag{3.2}$$

знакоопределенна по Ляпунову, но не по отношению к y_1 (в смысле [2]). Между тем при $\dot V\leqslant 0$ функция (3.2) y_1-знакоопределенна в смысле (3.1).

Отметим, что при каждом $0<c<{}^1/_2$ кривые, определяющие поверхности $V=c$ уровня V-функции (3.2), разбиваются на два непересекающихся класса. Первый класс образуют замкнутые, охватывающие положение $y_1=z_1=0$ кривые, характерные для классических V-функций Ляпунова. Особенность в наличии второго, дополнительного класса кривых. Его образуют разомкнутые кривые, удаляющиеся от положения $y_1=z_1=0$ при уменьшении числа c.

4. Пример. Рассмотрим движение точки единичной массы в постоянном поле тяготения. Пусть движение происходит по поверхности

$$x_3=f(x_1,\ x_2),\quad f=x_1^2(1+x_2^2)(1+x_1^4x_2^4)^{-1} \tag{4.1}$$

заданной в трехмерном пространстве $x_1x_2x_3$ с осью x_3, направленной вертикально вверх.

Кинетическая и потенциальная энергии определяются следующим образом:

$$T=\frac{1}{2}\left\{\dot x_1^2+\dot x_2^2+\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)\dot x_1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)\dot x_2\right]^2\right\}$$

$$\Pi=gf(x_1,\ x_2),\quad g=\mathrm{const}>0$$

Положим $\mathbf{y}=(x_1,\ \dot x_1,\ \dot x_2)$, $z=x_2$ и введем вспомогательные функции $V=T+\Pi$, $W=x_1x_2$. Справедливы соотношения

$$V\geqslant\frac{1}{2}\left(\dot x_1^2+\dot x_2^2\right)+g\left(x_1^2+W^2\right)\left(1+W^4\right)^{-1},\quad \dot V\equiv 0 \tag{4.2}$$

Следовательно, в области (2.1) (при достаточно малом H) имеют место условия (2.2), (2.3). В результате положение равновесия точки

$$x_i=\dot x_i=0\quad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{4.3}$$

y-устойчиво на основании теоремы 1.

В то же время V-функция не знакоопределенна ни по отношению к **y** в смысле [2] ($V\to 0$ при $\dot x_1=\dot x_2=0$, $|x_2|\to\infty$ и любом фиксированном x_1), ни по Ляпунову ($V=0$ при $x_1=\dot x_1=\dot x_2=0$ и любом x_2).

В силу (4.2), положение (4.3) также и W-устойчиво. Имея в виду (4.1), заключаем, что в итоге положение (4.3) устойчиво по x_1, x_3, $\dot x_1$, $\dot x_2$ (в том числе и при большом x_{20} в смысле [13]).

Кроме того, отметим, что функция $V=T+\Pi$ является **y**-знакоопределенной в смысле (3.1), и удовлетворяет условиям теоремы 3.

5. Особенности функционирования ЧУ-систем. Сформулируем некоторые положения, позволяющие глубже понять законы функционирования ЧУ-систем.

1°. *Требование предсказуемости структурных изменений – условие нормального функционирования ЧУ-систем*. Вызвано бóльшей (в сравнении с задачей устойчивости по отношению ко всем переменным) чувствительностью ЧУ-свойства к изменению структуры системы. Указанное требование означает, что концепция "робастности" в ЧУ-теории не может быть столь же общей, как в теории устойчивости по всем переменным. Это естественно, ибо ЧУ-теория имеет дело с более "тонкими" случаями. В этих случаях "более лучшая устойчивость" просто невозможна. Кроме того, часто именно ЧУ-свойства не только желательны, но и необходимы [14].

Сделанный вывод переносит принятие решения по использованию результатов. ЧУ-теории на проектировщика системы в каждом конкретном случае.

Если же ЧУ-задача рассматривается как вспомогательная при анализе устойчивости по отношению ко всем переменным, то ситуация меняется. Здесь ЧУ-анализ допустим в рамках, определяемых робастностью свойства устойчивости по всем переменным.

Укажем, например, на вспомогательную функцию задачи частичной стабилизации (развитие задачи частичной устойчивости на управляемые системы) при построении робастных законов управления угловым движением твердого тела (космического аппарата) [13, 14]. В работах [23, 24] этот подход распространен на игровые задачи управления при помехах.

Лучшему пониманию проблемы способствует также выяснение характера взаимоотношений между понятиями, определяющими сохранение ЧУ-свойств. В их числе ЧУ-свойства при постоянно действующих возмущениях (ПДВ) и параметрических возмущениях.

2°. *ЧУ-задача при ПДВ не эквивалентна, вообще говоря, ЧУ-задаче сохранения устойчивости даже при малых параметрических возмущениях*. Это имеет место уже в случае линейных автономных систем. Данные системы, будучи частично устойчивыми при ПДВ, могут терять устойчивость даже при малом "шевелении" некоторых коэффициентов. Такого нет в задаче устойчивости по отношению ко всем переменным.

В противовес "хрупкости" ЧУ-свойств укажем следующее.

3°. *Теряющая ЧУ-свойство система тем не менее часто является "грубой" в смысле Андронова–Понтрягина.* В "грубой" системе ее фазовый портрет при малом "шевелении" параметров принципиально не изменяется. Поэтому потеря ЧУ-свойств в этом случае означает лишь некоторый "поворот" фазового портрета в соответствующей фазовой плоскости.

4°. *Возможность инвариантности ЧУ-свойства по отношению к сколь угодно большим ПДВ* в некоторых каналах системы (0.1) [13]. Этот вопрос связан с общей проблемой инвариантности [25].

6. Примеры. 1°. Рассмотрим систему

$$A_1\dot{x}_1 = (A_2 - A_3)x_2x_3 + u_1 \quad (1\ 2\ 3) \tag{6.1}$$

описывающую угловое движение твердого тела под действием управляющих моментов u_i (i = 1, 2, 3). (Записано одно из трех уравнений, остальные уравнения системы (6.1) получаются циклической перестановкой индексов $1 \to 2 \to 3$.) В случае $u_i = \alpha_i x_i$ ($\alpha_i = \mathrm{const} < 0$, $i = 1, 2$), $u_3 \equiv 0$ положение равновесия тела $x_i = 0$ (i = 1, 2, 3) асимптотически (x_1, x_2)-устойчиво (свойство K) при любых допустимых значениях A_i. При этом, если A_3 – наибольшее или наименьшее значение A_i, то свойство K выполняется при любом x_{30} (свойство K_1). Если, кроме того, $A_1(A_2)$ – среднее значение A_i, то положение равновесия также асимптотически $x_1(x_2)$-устойчиво при большом $x_{20}(x_{10})$ в смысле [13].

Свойство K_1 можно установить с помощью не зависящей от x_3 функции Ляпунова $V = A_1(A_1 - A_3)x_1^2 + A_2(A_2 - A_3)x_2^2$. Следовательно, это свойство сохраняется и при ПДВ $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{R}(t, \mathbf{0}) \neq 0$ вида $\mathbf{R} = (0, 0, R_3)$, т.е. при ПДВ в одном из каналов системы (6.1).(Здесь $R_3(t, \mathbf{x})$ – любая функция, такая, что для "возмущенной" системы (6.1) в области $t \geqslant 0$, $|x_i| \leqslant H$ (i = 1, 2), $|x_3| < \infty$ выполняются условия существования, единственности и x_3-продолжимости решений.) Таким образом, имеет место инвариантность свойства K_1 при ПДВ указанного вида.

Теоретически возможны также случаи, когда ЧУ-свойство не только сохраняет, но и даже приобретает асимптотический характер при появлении ПДВ (см. примеры в [13]). Однако в этих случаях на ПДВ накладываются дополнительные ограничения.

2°. Положение $y_1 = z_1 = 0$ системы

$$y_1^{\cdot} = -y_1 + \varepsilon z_1, \quad z_1^{\cdot} = z_1 \quad (\varepsilon = \mathrm{const}) \tag{6.2}$$

асимптотически y_1-устойчиво лишь при $\varepsilon = 0$. В то же время при любом ε система (6.2) является системой "общего положения" [26] с фазовым портретом типа "седло". В ней при переходе ε через значение $\varepsilon = 0$ наблюдается лишь "поворот" фазового портрета. Поворот сколь угодно мал в случае достаточно малого ε. При $\varepsilon = 0$ сепаратрисы "седла" занимают положение координатных осей фазовой плоскости системы (6.2).

7. О механизмах возникновения ЧУ-свойств. "Степень грубости" ЧУ-системы зависит от механизма возникновения ЧУ-свойств. Выделим один аспект этой проблемы.

Различные механизмы возникновения ЧУ-свойств имеют место уже для линейных систем. Так, рассмотрим механизм возникновения асимптотической $\mathbf{y}$-устойчивости в неустойчивой по Ляпунову линейной автономной системе

$$\mathbf{y}^{\cdot} = A\mathbf{y} + B\mathbf{z}, \quad \mathbf{z}^{\cdot} = C\mathbf{y} + D\mathbf{z} \tag{7.1}$$

$$\mathbf{y} \in R^m, \ \mathbf{z} \in R^p, \ m \geqslant 1, \ p \geqslant 2$$

В этом случае в линейных комбинациях $B\mathbf{z}$ "неконтролируемых" $\mathbf{z}$-переменных сокращаются слагаемые $\mathbf{z}(t)$-решений с неотрицательными характеристическими числами. Это жесткий механизм. Его "срабатывание" зависит от набора чисел в матрицах B, D. Вот почему условия асимптотической $\mathbf{y}$-устойчивости в неустойчивой системе (7.1) содержат, вообще говоря, не только неравенства, но и равенства, связывающие коэффициенты этой системы.

Однако при переходе уже к линейным неавтономным, а тем более к нелинейным системам, механизм возникновения ЧУ-свойств "смягчается". При этом уже в случае линейных неавтономных систем обычны ЧУ-критерии, не содержащие равенств, связывающих их коэффициенты.

В частности [13], один из механизмов основан на "компенсации" в $B(t)\mathbf{z}$ нежелательной тенденции $\|\mathbf{z}\| \to \infty$ функциями, входящими в $B(t)$. Возможны и другие механизмы возникновения ЧУ-свойств в линейных системах. Они более глубоко связаны с процессом интегрирования этих систем.

8. Соотношения требований y-устойчивости и z-продолжимости решений системы (0.1). Предположение о $\mathbf{z}$-продолжимости решений системы (0.1) не является следствием факта $\mathbf{y}$-устойчивости. Поэтому $\mathbf{z}$-продолжимость решений изучается, вообще говоря, отдельно от $\mathbf{y}$-устойчивости. Сами же по себе условия $\mathbf{y}$-устойчивости могут "пропустить" в качестве допустимых системы с $\mathbf{z}$-непродолжимыми решениями.

Рассмотрим, например, систему

$$y_1^{\cdot} = -y_1 + y_1^2 z_1, \quad z_1^{\cdot} = z_1 - 2y_1 z_1^2 \tag{8.1}$$

Функция Ляпунова $V = y_1^2 + (-y_1 + y_1^2 z_1)^2 \geqslant y_1^2$, $V^{\cdot} = \leqslant 0$ удовлетворяет условиям теоремы [2] об y_1-устойчивости положения $y_1 = z_1 = 0$. Выполняются и условия [13] теоремы об асимптотической y_1-устойчивости, ибо система (8.1) допускает построение вспомогательной μ-системы [13] $y_1^{\cdot}=-y_1+\mu_1,\ \mu_1^{\cdot}=-\mu_1$.

Однако решения системы (8.1) имеют вид (для простоты $t_0=0$)

$$y_1=y_{10}(1+y_{10}z_{10}t)\exp(-t),\quad z_1=z_{10}(1+y_{10}z_{10}t)^{-1}$$

Следовательно, они не z_1-продолжимы. В сколь угодно малой окрестности положения $y_1=z_1=0$ найдутся фиксированные значения y_{10}, z_{10},$(y_{10}z_{10}<0)$, такие, что $z_1=\infty$ при $t=-(y_{10}z_{10})^{-1}>0$.

Значит, как метод функций Ляпунова, так и метод μ-систем [13] в ЧУ-задачах могут "пропустить" в качестве допустимых системы с z-непродолжимыми решениями.

Автор благодарит В.В. Румянцева за обсуждение статьи.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Российской федерации (95–01–00506а), и Международного научного фонда (JJ 5100).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А.М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Собр. соч. Т. 2. М.: Изд-во АНСССР, 1956. С. 272–331.
2. *Румянцев В.В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестн. МГУ. Сер. математики, механики, физики, астрономии, химии. 1957. № 4. С. 9–16.
3. *Зубов В.И.* Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Судпромгиз, 1959. 324 с.
4. *Corduneanu C.* Sur la stabilité partielle // Rev. Roum. Math. pure et. Appl. 1964. V. 9. N 3. P. 229–236.
5. *Матросов В.М.* Развитие метода функций Ляпунова в теории устойчивости движения // Тр. 2-го Всесоюз. съезда по теоретической и прикл. механике. Т. 1. М.: Наука, 1965. С. 112–125.
6. *Halanay A.* Differential Equations: Stability, Oscillations, Time Lags. N.Y; L.: Acad. Press, 1966. 528 c.
7. *Peiffer K., Rouche N.* Liapounov's second method applied to partial stability // J. Méc. 1969. V. 8. № 2. P. 323–334.
8. *Risito C.* Sulla stabilita asintotica parzialle // Ann. Math. Pura ed Appl. 1970. V. 84. P. 279–292.
9. *Fergola P., Moauro V.* On partial stability // Ric. Mat. 1970. V. 19. N2. P. 185–207.
10. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
11. *Hatvani L.* On the stability of the solutions of ordinary differential equations with mechanical applications // Alkalm. Mat. Lap. 1990/1991. V. 15. N1/2. P. 1–90.
12. *Андреев А.С.* Об исследовании частичной асимптотической устойчивости // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 539–547.
13. *Воротников В.И.* Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991. 287 с.
14. *Воротников В.И.* Задачи и методы исследования устойчивости и стабилизации движения по отношению к части переменных: направления исследований, результаты, особенности // Автоматика и телемеханика. 1993. № 3. С. 3–62.
15. *Козлов В.В.* Устойчивость периодических траекторий и многочлены Чебышева // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1991. № 5. С. 7–13.
16. *Вуйичич В.А., Козлов В.В.* К задаче Ляпунова об устойчивости по отношению к заданным функциям состояния // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С. 555–559.
17. *Мовчан А.А.* Устойчивость процессов по двум метрикам // ПММ. 1960. Т. 24. Вып. 6. С. 988–1001.

18. *Lakshmikantham V., Salvadori L.* On Massera type converse theorem in term of two different measures // Boll. Unione mat. Ital. Ser. A. 1976. V. 13. N 2. P. 293–301.
19. *Сиразетдинов Т.К.* Устойчивость систем с распределенными параметрами. Новосибирск: Наука, 1987. 231 с.
20. *Аминов А.Б., Сиразетдинов Т.К.* Метод функции Ляпунова в задачах о полиустойчивости движения // ПММ. 1987. Т. 51. Вып. 5. С. 709–716.
21. *Мартынюк А.А.* Одна теорема о полиустойчивости // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 4. С. 808–811.
22. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата. М.: Наука, 1985. 518 с.
23. *Воротников В.И.* Об управлении угловым движением твердого тела. Игровой подход // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 3. С. 82–103.
24. *Воротников В.И.* К задаче нелинейного синтеза субоптимальных по быстродействию ограниченных управлений при помехах // Известия РАН. Техн. кибернетика. 1994. № 6. С. 88–116.
25. *Кухтенко А.И.* Основные этапы формирования теории инвариантности. I. II // Автоматика. 1984. № 2. С. 3–13; 1985. № 2. С. 3–14.
26. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 127 с.

Нижний Тагил

Поступила в редакцию
23.VI.1994