УДК 531.36

© 1995 г. **И.И. Косенко**

АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЙ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ЛАГРАНЖЕВОЙ МЕХАНИКИ

Описывается конструкция проекционного метода для построения движений в лагранжевой механике. Никаких предположений о малости тех или иных функций не делается. Схема Галеркина для траектории в конфигурационном пространстве строится при помощи вариационного принципа Гамильтона. Класс допустимых путей, для которых рассматривается принцип, состоит из движений с фиксированными начальными и конечными положениями.

1. Постановка задачи. Задана голономная механическая система с n степенями свободы. Конфигурационным многообразием является область $D \subset \mathbf{R}^n$. Движение механической системы рассматривается на конечном отрезке времени $[t_0, t_1] \subset \mathbf{R}$. Кинетическая энергия $T(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ – достаточно гладкая функция своих аргументов и определена на множестве $\Delta = [t_0, t_1] \times D \times \mathbf{R}^n$. Кроме того, в общем случае предполагается, что

$$T(t,\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T_2(t,\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_1(t,\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + T_0(t,\mathbf{q}) \tag{1.1}$$

$$T_2(t,\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\langle \mathrm{a}(t,\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}\rangle, \quad T_1(t,\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \langle \mathbf{b}(t,\mathbf{q}), \dot{\mathbf{q}}\rangle$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидово скалярное произведение в $\mathbf{R}^n$, а $a(t, \mathbf{q})$ – положительно определенная всюду на $[t_0, t_1] \times D$ симметричная матрица кинетической энергии. Предполагается, что это свойство $a(t, \mathbf{q})$ выполнено даже в некоторой окрестности множества $[t_0, t_1] \times D$.

Предполагается также, что на Δ определена векторная функция обобщенных сил $\mathbf{Q}: \Delta \to \mathbf{R}^n$, достаточно гладкая по $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ для почти всех $t \in [t_0, t_1]$. По переменной t предполагается квадратичная интегрируемость. Все это можно резюмировать одним условием

$$\mathbf{Q} \in L_2([t_0,t_1],\ C^1(D \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n))$$

Дополнительно о функции $\mathbf{Q}$ предположим, что от скоростей она зависит в степени не выше второй, что охватывает большое число приложений. При этом коэффициенты членов второй степени по $\dot{\mathbf{q}}$ должны быть достаточно гладкими по t. Члены первой по $\dot{\mathbf{q}}$ степени могут иметь коэффициенты, от которых требуется лишь квадратичная интегрируемость по t.

Вариационная задача формулируется стандартно: из всех, достаточно гладких путей в конфигурационном пространстве $\mathbf{q}: [t_0, t_1] \to D$, удовлетворяющих краевым условиям

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1$$

найти путь, удовлетворяющий дифференциальным уравнениям Лагранжа второго рода

$$(T_{\dot{\mathbf{q}}})^{\cdot} - T_{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} \tag{1.2}$$

либо, что эквивалентно, вариационному уравнению

$$\int_{t_0}^{t_1} (\langle T_{\dot{\mathbf{q}}}, \delta\dot{\mathbf{q}}\rangle + \langle T_{\mathbf{q}}, \delta\mathbf{q}\rangle + \langle \mathbf{Q}, \delta\mathbf{q}\rangle)dt = 0 \tag{1.3}$$

при произвольных, достаточно гладких функциях $\delta\mathbf{q}$, удовлетворяющих краевым условиям

$$\delta\mathbf{q}(t_0) = \delta\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{0}$$

Везде далее предполагается, что решение указанной задачи существует и единственно. Необходимо построить процедуру равномерной аппроксимации этого решения на отрезке $[t_0, t_1]$ в конфигурационном пространстве. В пространстве скоростей ограничимся среднеквадратичным приближением. Для дальнейшего больше подходит уравнение (1.3) в преобразованном при помощи нитегрирования по частям виде

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle T_{\dot{\mathbf{q}}}(t, \mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)) - \int_{t_0}^{t} (T_{\mathbf{q}}(\tau, \mathbf{q}(\tau), \dot{\mathbf{q}}(\tau)) + \mathbf{Q}(\tau, \mathbf{q}(\tau), \dot{\mathbf{q}}(\tau)))d\tau, \delta\dot{\mathbf{q}}\rangle dt = 0 \tag{1.4}$$

2. Функциональная модель. Используем конструкцию, аналогичную описанной в [1, 2], однако с рядом серьезных корректив. Именно определим сначала исходное гильбертово пространство, в котором будем моделировать уравнение (1.4). Это будет пространство путей $\mathbf{z}$: $[t_0, t_1] \to \mathbf{R}^n$, удовлетворяющих условиям

$$\mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}(t_1) = \mathbf{0} \tag{2.1}$$

В области D между точками $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{q}_1$ построим каким-либо образом кусочно-гладкий путь $\mathbf{q}^0$: $[t_0, t_1] \to D$. Если позволяет структура множества D, это может быть, например, отрезок прямой или векторная функция, обладающая удобными аналитическими свойствами. В общем случае в качестве пути $\mathbf{q}^0(t)$ можно взять ломаную, соединяющую точки $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1 \in D$. Еще один способ построения $\mathbf{q}^0(t)$ в возмущенных задачах состоит в использовании для этой цели траектории невозмущенного движения.

Теперь перейдем к новым обобщенным координатам $\mathbf{q} \to \mathbf{z}$ по формуле

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^0(t) + \mathbf{z} \tag{2.2}$$

Уравнения Лагранжа (1.2) и принцип Гамильтона (1.3) при этом сохранят свой вид. Однако в кинетической энергии и обобщенных силах нужно произвести подстановку в соответствии с (2.2). Теперь решение вариационной задачи

$$\int_{t_0}^{t_1} (\langle T_{\dot{\mathbf{z}}}(t, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t)) - \int_{t_0}^{t} (T_{\mathbf{z}}(\tau, \mathbf{z}(\tau), \dot{\mathbf{z}}(\tau)) + \mathbf{Q}(\tau, \mathbf{z}(\tau), \dot{\mathbf{z}}(\tau)))d\tau, \delta\dot{\mathbf{z}}\rangle dt = 0 \tag{2.3}$$

следует искать среди функций $\mathbf{z}(t)$, удовлетворяющих условию (2.1). Заметим, что после преобразования (2.2) представление кинетической энергии в виде (1.1) изменится. Однако для функций $a(t, \mathbf{z})$, $\mathbf{b}(t, \mathbf{z})$, $T_0(t, \mathbf{z})$ оставим прежние обозначения. Тем более, что матрица $a(t, \mathbf{z})$ в соответствующих по (2.2) точках будет иметь прежние значения.

Гильбертово пространство $\overset{\circ}{H}{}^1$ путей $\mathbf{z}(t)$, удовлетворяющих условию (2.1), определим при помощи скалярного произведения

$$(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)^0 = \int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{\mathbf{z}}_1(t),\ \dot{\mathbf{z}}_2(t)\rangle dt \tag{2.4}$$

Равенство (2.4) задает метрику в пространстве

$\overset{\circ}{H}{}^1 = \overset{\circ}{H}{}^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$

функций с интегрируемыми в квадрате производными, удовлетворяющих граничным условиям (2.1). Известно, что норма в $\overset{\circ}{H}{}^1$, определенная в соответствии с (2.4) по формуле

$$\|\mathbf{z}\|^0 = \left(\int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\mathbf{z}}(t)\|^2 \, dt \right)^{1/2} \tag{2.5}$$

эквивалентна норме

$$\|\mathbf{z}\|^1 = \left(\int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{z}(t)\|^2 \, dt + \int_{t_0}^{t_1} \|\dot{\mathbf{z}}(t)\|^2 \, dt \right)^{1/2} \tag{2.6}$$

пространства Соболева $H^1 = H^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$, если $\overset{\circ}{H}{}^1$ рассматривать как подпространство H^1. Это означает, что использование краевых условий (2.1) позволяет от нормы (2.6) перейти к эквивалентной норме (2.5). В частности, можно говорить о вложении $\overset{\circ}{H}{}^1$ в пространство абсолютно непрерывных функций на $[t_0, t_1]$ со значениями в $\mathbf{R}^n$. Отсюда следует, что близость по норме (2.5) обеспечит равномерную близость на отрезке $[t_0, t_1]$.

В дальнейшем в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1$ будем рассматривать не все элементы, а лишь те, для которых путь $\mathbf{q}^0(t) + \mathbf{z}(t)$ принадлежит при всех $t \in [t_0, t_1]$ области D. При этом, как и в [1, 2] можно установить, что множество

$$\Omega = \{\mathbf{z} \in \overset{\circ}{H}{}^1 : \mathbf{q}^0(t) + \mathbf{z}(t) \in D \ \forall t \in [t_0, t_1]\}$$

является областью в $\overset{\circ}{H}{}^1$.

Рассмотрим теперь левую часть уравнения (2.3). Она определяет линейную форму в касательном пространстве $T_{\mathbf{z}}\Omega = \overset{\circ}{H}{}^1$. При $\delta\mathbf{z} \in \overset{\circ}{H}{}^1$ обозначим эту форму символом $l_{\mathbf{z}}(\delta\mathbf{z})$. Оказывается, что при $\mathbf{z} \in \Omega$ линейный функционал $L_{\mathbf{z}}$: $T_{\mathbf{z}}\Omega \to \mathbf{R}$ непрерывен.

В самом деле, для этого достаточно доказать, что существует такой элемент $\mathbf{X}(\mathbf{z}) \in \overset{\circ}{H}{}^1$, что функционал $L_{\mathbf{z}}$ можно представить в виде скалярного произведения в $\overset{\circ}{H}{}^1$

$$L_{\mathbf{z}}(\delta\mathbf{z}) = (\mathbf{X}(\mathbf{z}), \delta\mathbf{z})^0 \tag{2.7}$$

откуда автоматически будет следовать непрерывность $L_{\mathbf{z}}$.

Введем обозначение

$$(\mathbf{l}(\mathbf{z}))(t) = T_{\dot{\mathbf{z}}}(t, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t)) - \int_{t_0}^{t} (T_{\mathbf{z}}(\tau, \mathbf{z}(\tau), \dot{\mathbf{z}}(\tau)) + \mathbf{Q}(\tau, \mathbf{z}(\tau), \dot{\mathbf{z}}(\tau)))d\tau \tag{2.8}$$

и введем также линейные операторы усреднения $\mathbf{A}$: $L_2 \to L_2$, центрирования относительно среднего $\mathbf{C}$: $L_2 \to L_2$ и первообразной $\mathbf{B}$: $L_2 \to H^1$, где $L_2 = L_2([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$, по формулам

$$(\mathbf{Ax})(t) = (t_1 - t_0)^{-1} \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{x}(\tau)d\tau, \quad (\mathbf{Bx})(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{x}(\tau)d\tau, \quad \mathbf{Cx} = \mathbf{x} - \mathbf{Ax}$$

Тогда видно, что при любом $x \in L_2$ справедливо отношение $\mathbf{BCx} \in \overset{\circ}{H}{}^1$, т.е. $(\mathbf{BCx})(t_0) = (\mathbf{BCx})(t_1) = \mathbf{0}$.

С другой стороны, вариационную задачу (2.3) можно заменить эквивалентной

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle (\mathbf{Cl}(\mathbf{z}))(t),\ \delta\dot{\mathbf{z}}(t)\rangle dt = 0 \qquad (2.9)$$

В самом деле, (2.9) отличается от (2.3) на величину

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle (\mathbf{Al}(\mathbf{z}))(t),\ \delta\dot{\mathbf{z}}(t)\rangle dt = \langle (\mathbf{Al}(\mathbf{z}))(t), \delta\mathbf{z}(t)\rangle \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \langle (\mathbf{Al}(\mathbf{z}))^{\cdot}(t),\ \delta\mathbf{z}(t)\rangle dt = 0$$

так как выполнены условия (2.1) и среднее значение не зависит от $t \in [t_0, t_1]$: $(\mathbf{Al}(\mathbf{z}))(t) \equiv \mathbf{const}$.

Так как $(\mathbf{Bx})^{\cdot}(t) \equiv \mathbf{x}(t)$, то функция

$$(\mathbf{X}(\mathbf{z}))(t) = (\mathbf{BCl}(\mathbf{z}))(t) \qquad (2.10)$$

удовлетворяет уравнению (2.7), если $\mathbf{l}(\mathbf{z}) \in L_2$.

В самом деле, $T_{\dot{z}}$ линейно зависит от $\dot{z}$ с достаточно регулярными коэффициентами и свободным членом линейной функции. Поэтому $T_{\dot{z}} \in L_2 \subset L_1$, где $L_1 = L_1([t_0, t_1],\ \mathbf{R}^n)$.

Функция $T_{\mathbf{z}}$ имеет по $\dot{z}$ степень не выше второй. Члены нулевой степени $T_{\mathbf{z}}$ достаточно регулярны. Поэтому $T_{0\mathbf{z}}$ интегрируема по t. Члены, линейные по $\dot{z}$, дают также интегрируемую по t функцию (так же, так и $T_{\dot{\mathbf{z}}}$). Квадратичные члены имеют вид $T_{2\mathbf{z}} = \langle a_{\mathbf{z}}\dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{z}}\rangle / 2$ и могут быть оценены сверху

$$\|\langle a_{\mathbf{z}}\dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{z}}\rangle / 2\| \leq \text{const}\, \|\dot{\mathbf{z}}\|^2$$

Так как $\dot{\mathbf{z}} \in L_2$, то $\langle a_{\mathbf{z}}\dot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{z}}\rangle / 2 \in L_1$. В итоге можно утверждать, что $T_{\mathbf{z}} \in L_1$.

Вектор-функция $\mathbf{Q}$ зависит, по условию, от $\dot{\mathbf{z}}$ также в степени не выше второй, причем коэффициенты в членах второй степени должны быть регулярными. В таком случае $\mathbf{Q}$ будет состоять из слагаемых, в которых стоит произведение регулярной функции и не более двух функций из L_2. Поэтому $\mathbf{Q} \in L_1$.

В итоге доказано, что $T_{\mathbf{z}} + \mathbf{Q} \in L_1$. Поэтому $\mathbf{B}(\mathbf{T_z} + \mathbf{Q}) \in \mathrm{CA} \subset L^2$.

Далее, из теоремы Рисса о представлении линейных непрерывных функционалов в гильбертовом пространстве [3], в соответствии с которой элемент $\mathbf{X}(\mathbf{z})$ в скалярном произведении формулы (2.7) определяется единственным образом, следует, что формула (2.10) задает оператор $\mathbf{X}\colon \Omega \to \overset{\circ}{H}{}^1$ единственным образом.

Теперь вариационное уравнение принципа Гамильтона (2.9) свелось к функциональному уравнению в $\Omega \subset \overset{\circ}{H}{}^1$ вида

$$\mathbf{X}(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \qquad (2.11)$$

В дальнейшем будем использовать другое представление этого уравнения

$$\mathbf{z} = \mathbf{Z}(\mathbf{z}) \qquad (2.12)$$

Для преобразования (2.11) к виду (2.12) рассмотрим подробнее структуру оператора $\mathbf{X}$. Из (2.8) следует, что

$$(\mathbf{l}(\mathbf{z}))\,(t) = a(t, \mathbf{z}(t))\, \dot{\mathbf{z}}(t) + (\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{z}))\,(t)$$

$$(\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{z}))(t) = \mathbf{b}(t, \mathbf{z}(t)) - \int_{t_0}^{t} (T_{\mathbf{z}}(\tau, \mathbf{z}(\tau),\ \dot{\mathbf{z}}(\tau)) + \mathbf{Q}(\tau, \mathbf{z}(\tau), \dot{\mathbf{z}}(\tau)))d\tau$$

Отсюда заключаем, что, интегрируя первое слагаемое по частям и применяя оператор $\mathbf{B}$, будем иметь

$$(\mathbf{BCl}(\mathbf{z}))(t) = (\mathbf{Bl}(\mathbf{z}))(t) - (\mathbf{BAl}(\mathbf{z}))(t) = a(t, \mathbf{z}(t))\mathbf{z}(t) + (\mathbf{Y}(\mathbf{z}))(t)$$

$$(\mathbf{Y}(\mathbf{z}))(t) = -\int_{t_0}^{t} \dot{a}(\tau, \mathbf{z}(\tau), \dot{\mathbf{z}}(\tau))\mathbf{z}(\tau)d\tau + \mathbf{B\lambda}(\mathbf{z}))(t) - \tag{2.13}$$

$$-(t - t_0)\,(\mathbf{Al}(\mathbf{z}))(t),\quad \dot{a}(t, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}) = a_t(t, \mathbf{z}) + a_{\mathbf{z}}(t, \mathbf{z})\dot{\mathbf{z}}$$

где при вычислении $\mathbf{Bl}(\mathbf{z})$ также применено интегрирование по частям. Теперь оператор $\mathbf{Z}$: $\Omega \to \overset{\circ}{H}{}^1$ в уравнении (2.12) определим по формуле

$$(\mathbf{Z}(\mathbf{z}))(t) = -a^{-1}(t, \mathbf{z}(t))(\mathbf{Y}(\mathbf{z}))(t) \tag{2.14}$$

В рамках формализма, предложенного в [1, 2], можно в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1$ построить систему исчерпывающих его подпространств $E_m \subset \overset{\circ}{H}{}^1$ (m = 1, 2,...) при помощи ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_j\chi_k\}$ (j = 1, 2,..., n; k = 1, 2,...), где векторы $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^{n}$ составляют ортонормированный базис в $\mathbf{R}^n$, а система $\{\chi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – базис в пространстве скалярных функций, исчезающих на концах отрезка $[t_0, t_1]$. В качестве функций χ_k можно взять, например, систему

$$\chi_k(t) = (2/(t_1 - t_0))^{1/2}(\pi k)^{-1}\sin(k\pi(t_1 - t_0)^{-1}(t - t_0)) \tag{2.15}$$

где (k = 1, 2,...).

Для построения схемы Галеркина определим операторы проектирования на конечномерные подпространства P_m: $\overset{\circ}{H}{}^1 \to E_m$ как проекции, ортогональные в метрике $\overset{\circ}{H}{}^1$.

3. Дифференцируемость. В теореме об аппроксимации решения уравнения (2.12) требуется выполнение ряда свойств оператора $\mathbf{Z}$: $\Omega \to \overset{\circ}{H}{}^1$. В частности, желательно, чтобы оператор $\mathbf{Z}$ был достаточно регулярен. Именно, можно установить, что оператор $\mathbf{Z}$: $\Omega \to \overset{\circ}{H}{}^1$ непрерывно дифференцируем по Фреше.

Для этого используем структуру этого оператора (2.14). Из (2.13) видно, что оператор $\mathbf{Y}$: $\Omega \to \overset{\circ}{H}{}^1$ можно определить по формуле

$$\mathbf{Y}(\mathbf{z}) = \mathbf{BC}(\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{z}) - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z})),\quad \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z}) = \dot{a}(t, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t))\mathbf{z}(t)$$

Здесь использован тот факт, что $\mathbf{A}((a\mathbf{z})^{\cdot}) = \mathbf{0}$.

Однако, чтобы убедиться в гладкости $\mathbf{Z}$, недостаточно проверить это для $\mathbf{Y}$. Необходимо учесть также, что вектор-функцию $(\mathbf{Y}(\mathbf{z}))(t)$ необходимо слева умножить на матрицу $-a^{-1}(t, \mathbf{z}(t))$. Это умножение задает на пространстве $\overset{\circ}{H}{}^1$ линейный оператор. Так как по условию $a(t, \mathbf{z})$ – положительно определенная симметричная матрица, достаточно регулярная по своим аргументам, то такой же будет и матрица $a^{-1}(t, \mathbf{z})$.

Пусть $\mathbf{h} \in \overset{\circ}{H}{}^1$. Оператор, задаваемый формулой

$$\mathbf{h}(t) \to a(t, \mathbf{z}(t))\mathbf{h}(t) \tag{3.1}$$

обозначим $\Gamma(\mathbf{z})$. Ясно, что при $\mathbf{z} \in \overset{\circ}{H}{}^1$ под действием $\Gamma(\mathbf{z})$ мы не выходим за рамки $\overset{\circ}{H}{}^1$, т.е. $\Gamma(\mathbf{z})$: $\overset{\circ}{H}{}^1 \to \overset{\circ}{H}{}^1$. Легко показать, что $\Gamma(\mathbf{z})$ принадлежит алгебре $L(\overset{\circ}{H}{}^1, \overset{\circ}{H}{}^1)$ линейных непрерывных операторов $\overset{\circ}{H}{}^1$ в себя.

Поскольку при $\mathbf{z} \in \Omega$ матрица $a^{-1}(t, \mathbf{z}(t))$ обладает такими же свойствами, что и $a(t, \mathbf{z}(t))$, и, кроме того, является к ней обратной, то существует обратный к $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{z})$ оператор $\mathbf{\Gamma}^{-1}(\mathbf{z}) : \mathring{H}^1 \to \mathring{H}^1$ и он является ограниченным и линейным: $\mathbf{\Gamma}^{-1}(\mathbf{z}) \in \in L(\mathring{H}^1, \mathring{H}^1)$.

Итак, при $\mathbf{z} \in \Omega$ оператор $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{z})$ непрерывно обратим в $\mathring{H}^1$. Его действие на элемент $\mathbf{h} \in \mathring{H}^1$ обозначим символом композиции $(\mathbf{\Gamma}(\mathbf{z})\mathbf{h})$. Тогда результат оператора $\mathbf{Z}(\mathbf{z})$ можно определить как композицию $-\mathbf{\Gamma}^{-1}(\mathbf{z})$ и $\mathbf{Y}(\mathbf{z})$ по формуле $\mathbf{Z}(\mathbf{z}) = (-\mathbf{\Gamma}^{-1}(\mathbf{z}) \circ \mathbf{Y}(\mathbf{z}))$.

Известно [4], что билинейное отображение

$$(\cdot \circ \cdot) \colon L(\mathring{H}^1, \mathring{H}^1) \times \mathring{H}^1 \to \mathring{H}^1$$

непрерывно и имеет норму, равную единице. Известно также [4], что непрерывное билинейное отображение непрерывно дифференцируемо по обоим своим аргументам. Более того, если $\mathbf{u}_1(\mathbf{z})$ и $\mathbf{u}_2(\mathbf{z})$ непрерывно дифференцируемы как функции $\mathbf{u}_1 \colon \Omega \to \to L(\mathring{H}^1, \mathring{H}^1)$, $\mathbf{u}_2 \colon \Omega \to \mathring{H}^1$, то такой же будет и функция $(\mathbf{u}_1(\mathbf{z}) \circ \mathbf{u}_2(\mathbf{z}))$, и при дифференцировании будет справедлива формула Лейбница [4].

Проблема свелась к доказательству непрерывной дифференцируемости отображений $\mathbf{\Gamma} \colon \Omega \to L(\mathring{H}^1, \mathring{H}^1)$, $\mathbf{Y} \colon \Omega \to \mathring{H}^1$. Доказательство для $\mathbf{\Gamma}^{-1}$ такое же, что и для $\mathbf{\Gamma}$.

Поскольку область значений $\mathbf{\Gamma}$ состоит из линейных ограниченных операторов, то область значений производной Фреше $\mathbf{\Gamma}'$ (если она существует) состоит из билинейных непрерывных форм.

Учитывая, что оператор $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{z}) \colon \mathring{H}^1 \to \mathring{H}^1$ определен по формуле (3.1), можно доказать, что его производная определена по формуле

$$((\mathbf{\Gamma}'(\mathbf{z})\mathbf{h})\mathbf{h}_1)(t) = (a_{\mathbf{z}}(t, \mathbf{z}(t))\mathbf{h}(t))\mathbf{h}_1(t) \quad (\mathbf{h}, \mathbf{h}_1 \in \mathring{H}^1) \tag{3.2}$$

где $a_{\mathbf{z}}(t, \mathbf{z}(t))\mathbf{h}(t)$ – линейный оператор в $\mathbf{R}^n$, линейно зависящий от компонент функции $\mathbf{h} \in \mathring{H}^1$. Вследствие достаточной гладкости матрицы кинетической энергии, матрица тензора ее частных производных также будет достаточно гладкой. Поэтому легко проверить, что формула (3.2) определяет непрерывную билинейную форму

$$\mathbf{\Gamma}'(\mathbf{z}) \in L(\mathring{H}^1, L(\mathring{H}^1, \mathring{H}^1))$$

Для доказательства дифференцируемости по Фреше оценивается разность $\omega(\mathbf{h})/\|\mathbf{h}\|^0 = (\mathbf{\Gamma}(\mathbf{z} + \mathbf{h}) - \mathbf{\Gamma}(\mathbf{z}) - \mathbf{\Gamma}'(\mathbf{z})\mathbf{h})/\|\mathbf{h}\|^0$ и доказывается, что $\omega(\mathbf{h})/\|\mathbf{h}\|^0 \to 0$ при $\|\mathbf{h}\|^0 \to 0$. Установив дифференцируемость функции $\mathbf{\Gamma} \colon \Omega \to L(\mathring{H}^1, \mathring{H}^1)$, непрерывность производной $\mathbf{\Gamma}' \colon \Omega \to L(\mathring{H}^1, L(\mathring{H}^1, \mathring{H}^1))$ можно доказать, опять пользуясь гладкостью $a(t, \mathbf{z})$.

Перейдем к анализу оператора $\mathbf{Y} \colon \Omega \to \mathring{H}^1$. Он является композицией трех операторов и определяется при помощи коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\mathbf{Y}} & \mathring{H}^1 \\ \downarrow{\scriptstyle \mathbf{F}} & & \uparrow{\scriptstyle \mathbf{B}} \\ L_2 & \xrightarrow{\mathbf{C}} & L_2 \end{array}$$

где оператор $\mathbf{F} \colon \Omega \to L_2$ задается формулой $\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \lambda_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) - \alpha_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$.

Видно, что линейный оператор $\mathbf{B}: L_2 \to \overset{\circ}{H}{}^1$ ограничен, и на подпространстве L_2 функций с нулевым средним даже изометричен. Поэтому **B** непрерывно дифференцируем на $\mathbf{C}(L_2)$. Оператор $\mathbf{C}: L_2 \to L_2$ также линеен и ограничен, так как имеет вид $\mathbf{C} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$, где оператор взятия среднего **A** является ограниченным. В итоге получаем, что линейный оператор $\mathbf{BC}: L_2 \to \overset{\circ}{H}{}^1$ ограничен и, значит, непрерывно дифференцируем.

Проверка дифференцируемости оператора $\mathbf{F}: \Omega \to L_2$ проводится стандартно. **F** вычисляется по формуле

$$(\mathbf{F}(\mathbf{z}))(t) = \mathbf{b}(t, \mathbf{z}(t)) - a_t(t, \mathbf{z}(t))\,\mathbf{z}(t) - (a_{\mathbf{z}}(t, \mathbf{z}(t))\,\dot{\mathbf{z}}(t))\,\mathbf{z}(t) -$$
$$- \int_{t_0}^{t} (T_{\mathbf{z}}(\tau, \mathbf{z}(\tau), \dot{\mathbf{z}}(\tau)) + \mathbf{Q}(\tau, \mathbf{z}(\tau), \dot{\mathbf{z}}(\tau)))\,d\tau$$

Далее доказывается, что производная Фреше $\mathbf{F}'(\mathbf{z})$ имеет вид

$$(\mathbf{F}'(\mathbf{z})\mathbf{h})(t) = \mathbf{b}_{\mathbf{z}}(t,\mathbf{z}(t))\mathbf{h}(t) - (a_{t\mathbf{z}}(t,\mathbf{z}(t))\mathbf{h}(t))\mathbf{z}(t) - a_t(t,\mathbf{z}(t))\mathbf{h}(t) -$$
$$((a_{\mathbf{zz}}(t,\mathbf{z}(t))\mathbf{h}(t))\dot{\mathbf{z}}(t))\mathbf{z}(t) - (a_{\mathbf{z}}(t,\mathbf{z}(t))\dot{\mathbf{h}}(t))\mathbf{z}(t) - (a_{\mathbf{z}}(t,\mathbf{z}(t))\dot{\mathbf{z}}(t))\mathbf{h}(t) -$$
$$-\int_{t_0}^{t} (\mathbf{S}_{\mathbf{z}}(\tau,\mathbf{z}(\tau),\dot{\mathbf{z}}(\tau))\mathbf{h}(\tau) + \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{z}}}(\tau,\mathbf{z}(\tau),\dot{\mathbf{z}}(\tau))\dot{\mathbf{h}}(\tau))d\tau \qquad (3.3)$$

Напомним, что функция $\mathbf{S}(t,\mathbf{z},\dot{\mathbf{z}}) = T_{\mathbf{z}}(t,\mathbf{z},\dot{\mathbf{z}}) + \mathbf{Q}(t,\mathbf{z},\dot{\mathbf{z}})$ имеет не более, чем вторую степень по обобщенным скоростям, причем в членах второй степени коэффициенты предполагаются регулярными по t, $\mathbf{z}$, а нерегулярность по t допускается только в коэффициентах, членов, линейных по $\dot{\mathbf{z}}$.

При доказательстве того, что $\mathbf{F}'(\mathbf{z}) \in L(\overset{\circ}{H}{}^1, L_2)$, в $\mathbf{F}'(\mathbf{z})$ рассматривается каждое слагаемое по отдельности. При этом можно проверить, что оператор $\mathbf{F}'(\mathbf{z})$: $\overset{\circ}{H}{}^1 \to L_2$ ограничен.

В том, что этот оператор является производной Фреше оператора $\mathbf{F}: \Omega \to L_2$, можно убедиться, оценив норму разности $\omega(\mathbf{h}) = \mathbf{F}(\mathbf{z} + \mathbf{h}) - \mathbf{F}(\mathbf{z}) - \mathbf{F}'(\mathbf{z})\mathbf{h}$ в пространстве L_2.

Для проверки непрерывности $\mathbf{F}'$ при $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \Omega$ положим $\|\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2\|^0 \to 0$ и рассмотрим операторную норму

$$\|\mathbf{F}'(\mathbf{z}_1) - \mathbf{F}'(\mathbf{z}_2)\| = \sup_{\|\mathbf{h}_1\|^0 = 1} \|(\mathbf{F}'(\mathbf{z}_1) - \mathbf{F}'(\mathbf{z}_2))\mathbf{h}\|_2$$

С использованием формулы (3.3) в этой норме проводится почленная проверка непрерывности слагаемых.

4. Непрерывная обратимость. Убедившись в том, что оператор $\mathbf{Z}: \Omega \to \overset{\circ}{H}{}^1$, а значит, и оператор $\mathbf{I} - \mathbf{Z}: \Omega \to \overset{\circ}{H}{}^1$ непрерывно дифференцируемы всюду в Ω, займемся вопросом непрерывной обратимости производной

$$\mathbf{I} - \mathbf{Z}'(\mathbf{z}): \overset{\circ}{H}{}^1 \to \overset{\circ}{H}{}^1 \qquad (4.1)$$

в касательном к Ω в точке $\mathbf{z}$ пространстве. Достаточно убедиться, что обратимость имеет место лишь в точке решения уравнения (2.12). Обозначим это решение символом $\mathbf{y} \in \Omega$.

В разд. 3 получено выражение для производной оператора **Z**. Полное выражение можно записать в виде

$$\mathbf{Z}'(\mathbf{z})\mathbf{h} = -((\Gamma^{-1})'(\mathbf{z})\mathbf{h} \circ \mathbf{Y}(\mathbf{z})) - (\Gamma^{-1}(\mathbf{z}) \circ \mathbf{Y}'(\mathbf{z})\mathbf{h})$$

Чтобы доказать обратимость оператора (4.1), необходимо решить уравнение

$$(\mathbf{I}-\mathbf{Z}'(\mathbf{z}))\mathbf{h}=\mathbf{g}$$

относительно функции $\mathbf{h}\in\overset{\circ}{H}{}^1$ при произвольной функции $\mathbf{g}\in\overset{\circ}{H}{}^1$. Выпишем это уравнение в развернутом виде при $\mathbf{z}=\mathbf{y}$

$$\mathbf{h}+((\boldsymbol{\Gamma}^{-1})'(\mathbf{y})\mathbf{h}\circ\mathbf{Y}(\mathbf{y}))+(\boldsymbol{\Gamma}^{-1}(\mathbf{y})\circ\mathbf{Y}'(\mathbf{y})\mathbf{h})=\mathbf{g} \qquad (4.2)$$

Уравнения Лагранжа второго рода относительно вектор-функции конфигурации $\mathbf{z}(t)$ можно записать в следующем общем виде:

$$\ddot{\mathbf{z}}=\mathbf{f}(t,\mathbf{z},\dot{\mathbf{z}}) \qquad (4.3)$$

где $\mathbf{f}(t,\mathbf{z},\dot{\mathbf{z}})=\mathbf{f}_2(t,\mathbf{z},\dot{\mathbf{z}})+\mathbf{f}_1(t,\mathbf{z},\dot{\mathbf{z}})+\mathbf{f}_0(t,\mathbf{z},\dot{\mathbf{z}})$, а $\mathbf{f}_i$ – однородные формы степени i относительно скоростей (i = 0, 1, 2). Если предположить, что решение $\mathbf{z}\in\overset{\circ}{H}{}^1$, то $\dot{\mathbf{z}}\in L_2$. Из анализа в разд. 2 функции кинетической энергии $T(t,\mathbf{z},\dot{\mathbf{z}})$ и векторной функции обобщенных сил $\mathbf{Q}(t,\mathbf{z},\dot{\mathbf{z}})$ видно, что правая часть (4.3) при подстановке в нее $\mathbf{z}\in\overset{\circ}{H}{}^1$ станет функцией $\mathbf{f}(\cdot,\mathbf{z},\dot{\mathbf{z}})\in L_1$. Система (4.3) удовлетворяет известным условиям Каратеодори [5] для уравнений с разрывной (в общем случае) правой частью. Поэтому решение задачи Коши для (4.3) существует и единственно.

Пусть $\mathbf{y}(t)$ – решение краевой задачи (2.1) для (4.3). Поскольку $\ddot{\mathbf{y}}\in L_1$, то $\dot{\mathbf{y}}\in\text{CA}$. Следовательно, существует $\lim\dot{\mathbf{y}}(t)=\dot{\mathbf{y}}(t_0)$ при $t\to t_0$ и $\mathbf{y}(t)$ совпадает с решением задачи Коши для (4.3) с начальными условиями

$$\mathbf{z}(t_0)=\mathbf{0},\quad \dot{\mathbf{z}}(t_0)=\dot{\mathbf{y}}_0$$

Вводя для упрощения дальнейших преобразований обозначения

$$a(t,\mathbf{y}(t))=a_1(t),\quad (a_{\mathbf{z}}(t,\mathbf{y}(t))\mathbf{h}(t))\ddot{\mathbf{y}}(t)=a_2(t)\mathbf{h}(t)$$

$$\mathbf{S}_{\mathbf{z}}(t,\mathbf{y}(t),\dot{\mathbf{y}}(t))=a_4(t),\quad \mathbf{S}_{\dot{\mathbf{z}}}(t,\mathbf{y}(t),\dot{\mathbf{y}}(t))=a_3(t)$$

и учитывая, что функция $\mathbf{y}(t)$ удовлетворяет уравнению (2.12), а его правая часть имеет вид (2.14), после умножения (4.2) на $a_1(t)$ слева и дифференцирования по t получим

$$(\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{h}))(t)-\mathbf{b}_1(\mathbf{h})=(a_1(t)\mathbf{g}(t))^{\cdot}$$

$$(\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{h}))(t)=a_1(t)\dot{\mathbf{h}}(t)+a_2(t)\mathbf{h}(t)-\int\limits_{t_0}^{t}(a_3(\tau)\dot{\mathbf{h}}(\tau)+a_4(\tau)\mathbf{h}(\tau))d\tau \qquad (4.4)$$

$$\mathbf{b}_1(\mathbf{h})\equiv\textbf{const}\equiv(\mathbf{AF}'(\mathbf{y})\mathbf{h})(t)$$

Уравнение (4.4) является линейным неоднородным при заданном $\mathbf{g}\in\overset{\circ}{H}{}^1$ относительно $\mathbf{h}\in\overset{\circ}{H}{}^1$. Можно показать, что если решение уравнения (4.4) существует, то оно единственно.

Пусть $\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2\in\overset{\circ}{H}{}^1$ – решения уравнения (4.4) при заданном $\mathbf{g}$. Тогда разность этих функций $\Delta\mathbf{h}=\mathbf{h}_1-\mathbf{h}_2$ удовлетворяет соответствующему однородному уравнению, дифференцируя которое по t (дифференцирование законно, так как только $a_2(t)$ содержит $\ddot{\mathbf{y}}(t)$, лежащее в CA, и поэтому $\dot{a}_2(t)\in L_1$, но этого для выполнимости условий Каратеодори вполне достаточно) получим систему уравнений в вариациях для исходной лагранжевой системы

$$(a_1\dot{\mathbf{h}}+a_2\mathbf{h})^{\cdot}-a_3\dot{\mathbf{h}}-a_4\mathbf{h}=0 \qquad (4.5)$$

Известно, что для системы (4.5) существует резольвента $R(t, t_0)$, так что общее решение системы (4.5) может быть представлено в виде

$$\begin{pmatrix} \mathbf{h}(t) \\ \dot{\mathbf{h}}(t) \end{pmatrix} = R(t, t_0) \begin{pmatrix} \mathbf{h}_0 \\ \dot{\mathbf{h}}_0 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

Если считать, что $\mathbf{h} \in \overset{\circ}{H}{}^1$, то $\mathbf{h}_0 = \mathbf{h}(t_0) = \mathbf{0}$. Поэтому

$$\mathbf{h}(t) = B(t, t_0)\dot{\mathbf{h}}_0 \tag{4.7}$$

где $B(t, t_0)$ – правый верхний блок матрицы $R(t, t_0)$.

При принятых здесь условиях (это видно из уравнения (4.5)) решение таково, что $\ddot{\mathbf{h}} \in L_1$, откуда следует, что функция $\dot{\mathbf{h}}$ непрерывна, и, значит, определен предел $\lim \dot{\mathbf{h}}(t) = \dot{\mathbf{h}}_0$ при $t \to t_0$. Поэтому уравнение (4.7) имеет смысл. Положим, в частности, $t = t_1$. Получим уравнение относительно $\dot{\mathbf{h}}_0$

$$B(t_1, t_0)\dot{\mathbf{h}}_0 = \mathbf{h}(t_1) = \mathbf{0} \tag{4.8}$$

Введем еще одно существенное предположение, а именно, что

$$\det B(t_1, t_0) \neq 0 \tag{4.9}$$

Это означает, что при отображении вдоль траектории правый верхний минор определителя

$$\partial(\mathbf{h}, \dot{\mathbf{h}}) / \partial(\mathbf{h}_0, \dot{\mathbf{h}}_0)|_{t=t_1}$$

не равен нулю.

Заметим, что $B(t_0, t_0) = 0$. Если с помощью преобразования Лежандра перейти к каноническим импульсам: $\dot{\mathbf{z}} \to \mathbf{p}$, то условие (4.9), будет эквивалентно условию

$$\partial\delta \mathrm{z}(t_1)/\partial\delta\mathbf{p}(t_0) \neq 0$$

Каноническое преобразование (КП) с таким свойством называется свободным. Известно, однако, что не всякое КП является свободным. Например, таковым не является точечное преобразование. Однако колебательное движение, описываемое гамильтоновой системой, порождает свободное КП. В этом можно убедиться на примере нормальных координат для малых колебаний консервативной системы около положения равновесия. Тогда уравнения в вариациях задают повороты в плоскостях пар (координата, скорость), которые и порождают свободное КП. Сказанное позволяет утверждать, что это условие достаточно типично в приложениях.

В силу (4.9) система уравнений (4.8) имеет единственное решение $\dot{\mathbf{h}}_0 = \mathbf{0}$. Поэтому единственным решением системы (4.6), удовлетворяющим краевым условиям (2.1) (или $\mathbf{h} \in$ $\in \overset{\circ}{H}{}^1$), является $\mathbf{h}(t) \equiv \mathbf{0}$, откуда $\Delta\mathbf{h}(t) \equiv 0$, или $\mathbf{h}_1(t) \equiv \mathbf{h}_2(t)$. Это означает, что уравнение (4.4) имеет всегда единственное решение.

В попытке разрешить уравнение (4.4) представим его предполагаемое решение в виде

$$\mathbf{h}(t) = B(t, t_0)\mathbf{b} + I(t) \tag{4.10}$$

$$I(t) = \int_{t_0}^{t} (A(t,\tau) + B(t,\tau)C_2(\tau))(\mathbf{G}(\mathbf{g}))(\tau)d\tau$$

где $A(t, \tau)$ – левый верхний блок матрицы $R(t, t_0)$.

Как будет ясно из дальнейшего, (4.10) – решение уравнения вида

$$\dot{\mathbf{h}}(t) = \int_{t_0}^{t} (C_1(\tau)\mathbf{h}(\tau) + C_2(\tau)\dot{\mathbf{h}}(\tau))d\tau + (\mathbf{G}(\mathbf{g}))(t) + \mathbf{b}(\mathbf{g}) \tag{4.11}$$

Здесь

$$C_1(t) = a_1^{-1}(t)a_4(t) + (a_1^{-1}(t))^{\cdot} a_2(t) - (a_1^{-1}(t)a_2(t))^{\cdot}$$

$$C_2(t) = a_1^{-1}(t)a_3(t) + (a_1^{-1}(t))^{\cdot} a_1(t) - a_1^{-1}(t)a_2(t) \tag{4.12}$$

$$(\mathbf{G}(\mathbf{g}))(t) = a_1^{-1}(t)(a_1(t)\mathbf{g}(t))^{\cdot} - \int\limits_{t_0}^{t} (a_1^{-1}(\tau))^{\cdot}(a_1(\tau)\mathbf{g}(\tau))^{\cdot} d\tau$$

$$\mathbf{в}(\mathbf{g}) = B^{-1}(t_1, t_0)I(t_1) \equiv \mathrm{const}$$

Из формулы (4.10) видно, что так как $B(t_0, t_0) = 0$, то $\mathbf{h}(t_0) = \mathbf{0}$. Последнее из группы соотношений (4.12) показывает также, что $\mathbf{h}(t_1) = \mathbf{0}$, т.е. $\mathbf{h} \in \overset{\circ}{H}{}^1$. Из свойств уравнения в вариациях можно убедиться, что после дифференцирования по t равенство (4.10) примет вид

$$\dot{\mathbf{h}}(t) = D(t, t_0)\mathbf{b}(\mathbf{g}) + (\mathbf{G}(\mathbf{g}))(t) + \int\limits_{t_0}^{t} (G(t,\tau) + D(t,\tau)C_2(\tau))(\mathbf{G}(\mathbf{g}))(\tau)d\tau \tag{4.13}$$

где $C(t, \tau)$, $D(t, \tau)$ – нижние блоки матрицы $R(t, t_0)$.

Можно проверить, что, раскрывая (4.13), в левой части (4.11) получим тождество. Так же, как и для (4.4), проверяется, что уравнение (4.11) имеет единственное решение $\mathbf{h} \in \overset{\circ}{H}{}^1$.

Оказывается, что именно эта функция $\mathbf{h}(t)$ является также решением уравнения (4.4).

Докажем это. В уравнении (4.4) величина $\mathbf{b}_1(\mathbf{h})$ по построению при $\mathbf{h} \in \overset{\circ}{H}{}^1$ является средним от функции $(\mathbf{\Lambda}(\mathbf{h}))(t)$, так как предполагается, что функция $\mathbf{g} \in \overset{\circ}{H}{}^1$, и следовательно, функция $(a_1\mathbf{g})^{\cdot}$ имеет нулевое среднее.

Попытаемся теперь преобразовать уравнение (4.11) к виду (4.4). Преобразуем постоянный вектор следующим образом:

$$-\mathbf{b} = -a_1^{-1}(t)\mathbf{b}_2 + \int\limits_{t_0}^{t} (a_1^{-1}(\tau))^{\cdot}\mathbf{b}_2 d\tau \quad (\mathbf{b}_2 = a_1(t_0)\mathbf{b}) \tag{4.14}$$

Используя представление функций $C_1(t)$, $C_2(t)$ в виде (4.12) и группируя соответствующим образом слагаемые, уравнение (4.11) можно после умножения слева на $a_1(t)$ (поскольку положительно определенная симметричная матрица кинетической энергии $a_1(t)$ на аппроксимируемом решении всегда невырождена) представить в виде уравнения Фредгольма

$$\mathbf{v}(t) - (\mathbf{K}\mathbf{v})(t) = \mathbf{0} \tag{4.15}$$

$$(\mathbf{K}\mathbf{v})(t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \kappa(t,\tau)\mathbf{v}(\tau)d\tau, \quad \kappa(t,\tau) = \begin{cases} a_1(t)(a_1^{-1}(\tau))^{\cdot} & (\tau < t) \\ 0 & (\tau \geqslant t) \end{cases}$$

относительно функции

$$\mathbf{v}(t) = (\mathbf{\Lambda}(\mathbf{h}))(t) - \mathbf{b}_2 - (a_1(t)\mathbf{g}(t))^{\cdot} \tag{4.16}$$

Для обеспечения возможности дальнейшего исследования потребуем, чтобы интегральный оператор $\mathbf{I} - \mathbf{K}$: $L_2 \to L_2$, был обратимым. Это оператор типа Вольтерры с достаточно регулярным всюду (кроме прямой $t = \tau$) ядром.

Для обратимости оператора $\mathbf{I} - \mathbf{K}$ достаточно, как известно, потребовать, чтобы норма $\mathbf{K}$ была меньше единицы. Тогда обратный оператор существует, непрерывен и может быть представлен в виде ряда $(\mathbf{I} - \mathbf{K})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{K} + \mathbf{K}^2 + \ldots$

Если матрица кинетической энергии слабо меняется вдоль решения, то производная $(a_1^{-1}(t))^{\cdot}$ достаточно мала, и условие обратимости будет выполняться. В самом простом случае можно рассмотреть ситуацию, когда $a_1(t) \equiv \text{const}$. Тогда $\mathbf{K} = \mathbf{0}$ и обратимость тождественного оператора станет очевидной.

Итак, пусть оператор $\mathbf{I} - \mathbf{K}$ обратим. Тогда единственным решением уравнения (4.15) в пространстве L_2 будет функция $\mathbf{v}(t) \equiv \mathbf{0}$ почти всюду на $[t_0, t_1]$. А это означает, что при заданных: $\mathbf{g} \in \overset{\circ}{H}{}^1$, вычисленной по формуле (4.10) функции $\mathbf{h} \in \overset{\circ}{H}{}^1$ и найденном по формуле (4.14) векторе $\mathbf{b}_2$ уравнение (4.4) выполняется.

Остается убедиться, что вектор $\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1(\mathbf{h}) = \mathbf{AF}'(\mathbf{y})\mathbf{h}$. В самом деле, по определению вектор $\mathbf{b}_1$ является средним от $(\Lambda(\mathbf{h}))(t)$ на отрезке $[t_0, t_1]$. С другой стороны, задавая $\mathbf{g} \in \overset{\circ}{H}{}^1$, получим, что нулевое среднее будет иметь функция $(a_1(t)\mathbf{g}(t))^{\cdot}$. Поэтому ввиду того, что нулевое среднее будет также у функции $\mathbf{v}(t) \equiv \mathbf{0}$, вектор $\mathbf{b}_2$ также будет средним от той же функции $(\Lambda(\mathbf{h}))(t)$, где $\mathbf{h}$ – решение уравнения (4.4), имеющее выражение (4.10). Поэтому $\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_1$.

Итак, наконец установлено, что оператор (4.1) обратим. Докажем непрерывность обратного оператора используя формулу (4.10). Поскольку норма в $\overset{\circ}{H}{}^1$ есть L_2 – норма для производной, то на самом деле нужна формула (4.11). Оценивая норму для каждого слагаемого в $(\mathbf{I} - \mathbf{Z}'(\mathbf{y}))^{-1}\mathbf{g}$, получим условие непрерывности в виде $\|(\mathbf{I} - \mathbf{Z}'(\mathbf{y}))^{-1}\mathbf{g}\|^0 \leq \text{const}\,\|\mathbf{g}\|^0$.

Лемма. Пусть вдоль аппроксимируемого решения $\mathbf{y}(t)$ при $t = t_1$ выполнено условие невырожденности

$$\frac{\partial \delta \mathbf{z}}{\partial \delta \dot{\mathbf{z}}_0}(t_1) \neq 0 \tag{4.17}$$

где $(\delta \mathbf{z}_0, \delta \dot{\mathbf{z}}_0)^{\mathrm{T}} \to (\delta \mathbf{z}(t), \delta \dot{\mathbf{z}}(t))^{\mathrm{T}}$ – касательное отображение вдоль траектории. Пусть также однозначно разрешимо относительно $\mathbf{v} \in L_2$ линейное интегральное уравнение

$$\mathbf{v}(t) - \int_{t_0}^{t} a(t, \mathbf{y}(t))(a^{-1}(\tau, \mathbf{y}(\tau)))^{\cdot}\, \mathbf{v}(\tau)d\tau = \mathbf{0} \tag{4.18}$$

Тогда оператор производной Фреше $\mathbf{I} - \mathbf{Z}'(\mathbf{y})$: $\overset{\circ}{H}{}^1 \to \overset{\circ}{H}{}^1$ на решении $\mathbf{y}(t)$ непрерывно обратим.

5. Условия аппроксимации. Установим, что на решении уравнения (2.12) выполнены условия аппроксимации

$$\|\mathbf{y} - P_m\mathbf{y}\|^0 \to 0, \quad \|P_m\mathbf{Z}(P_m\mathbf{y}) - \mathbf{Z}(\mathbf{y})\|^0 \to 0, \quad \|P_m\mathbf{Z}'(P_m\mathbf{y}) - \mathbf{Z}'(\mathbf{y})\| \to 0$$

при $m \to \infty$.

Эти условия проверяются методом, аналогичным описанному в [1, 2]. Отличается лишь методика доказательства полной непрерывности оператора $\mathbf{Z}'(\mathbf{z})$: $\overset{\circ}{H}{}^1 \to \overset{\circ}{H}{}^1$ на решении $\mathbf{z} = \mathbf{y}$.

Рассмотрим бесконечную систему функций $\{\mathbf{h}_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $\overset{\circ}{H}{}^1$, ограниченную в совокупности: $\|\mathbf{h}_k\|^0 \leq c$. Можно убедиться, что в равномерной метрике пространства $C = C([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ эти функции равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. По теореме Арцела можно выделить сходящую в метрике C подпоследовательность $\{\mathbf{h}_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Как показано в разд. 3, оператор $\mathbf{I}-\mathbf{Z}'(\mathbf{y})$: $\mathbf{h}\to\mathbf{g}$ задается при помощи связывающего функции $\mathbf{h}, \mathbf{g}\in \overset{\circ}{H}{}^1$ уравнения (4.4). Если обозначить $\mathbf{f}=\mathbf{h}-\mathbf{g}\in \overset{\circ}{H}{}^1$, то для $\mathbf{f}$ можно записать интегро-дифференциальное уравнение

$$\mathbf{f}=\mathbf{h}-(\mathbf{I}-\mathbf{Z}'(\mathbf{y}))\mathbf{h}=\mathbf{Z}'(\mathbf{y})\mathbf{h} \tag{5.1}$$

Равностепенная непрерывность для всех $\mathbf{h}_k$ уже проверена. Аналогично можно убедиться в этом свойстве для функций $\mathbf{g}_k$. Для этого достаточно рассмотреть различные типы слагаемых, входящих в правую часть (5.1), и проверить для них равностепенную непрерывность. Используя (5.1) можно также убедиться в непрерывности функции $\dot{\mathbf{f}}(t)$.

Итак, в последовательности непрерывных функций $\dot{\mathbf{f}}_k(t)$ по теореме Арцела есть сходящаяся подпоследовательность $\dot{\mathbf{f}}_{m_k}(t)$. Отсюда можно заключить о сходимости элементов $\mathbf{Z}'(\mathbf{y})\mathbf{h}_{m_k}\in \overset{\circ}{H}{}^1$, так как

$$\left\|\mathbf{Z}'(\mathbf{y})\mathbf{h}_{m_k}-\mathbf{Z}'(\mathbf{y})\mathbf{h}_{m_l}\right\|^0=\left(\int_{t_0}^{t_1}\left(\|\dot{\mathbf{f}}_{m_k}(t)-\dot{\mathbf{f}}_{m_l}(t)\|^0\right)^2 dt\right)^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant (t_1-t_0)^{1/2}\sup_t\|\dot{\mathbf{f}}_{m_k}(t)-\dot{\mathbf{f}}_{m_l}(t)\|$$

Тем самым доказано, что оператор $\mathbf{Z}'(\mathbf{z})$: $\overset{\circ}{H}{}^1\to\overset{\circ}{H}{}^1$ компактен. Однако, в отличие от результатов [1, 2] здесь $\mathbf{y}$ – не любая точка области $\Omega\subset\overset{\circ}{H}{}^1$, а аппроксимируемое решение уравнения (2.12).

В итоге доказана следующая

Теорема. Пусть на отрезке $[t_0, t_1]$ существует и единственно решение $\mathbf{q}(t)$ краевой задачи для уравнения (1.3). Пусть функция кинетической энергии $T(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ и векторная функция обобщенных сил $\mathbf{Q}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ удовлетворяют сформулированным в разд. 1 условиям. Тогда, если $\mathbf{q}^0(t)$ – путь в конфигурационном пространстве, соединяющий за время t_1-t_0 точки $\mathbf{q}_0$ и $\mathbf{q}_1$, то уравнение (1.3) относительно функции $\mathbf{q}(t)$ эквивалентно уравнению (2.12) относительно функции $\mathbf{z}(t)=\mathbf{q}(t)-\mathbf{q}^0(t)$, удовлетворяющей условию (2.1).

Кроме того, если на аппроксимируемом решении $\mathbf{z}(t)$ выполнено условие невырожденности (4.17), и интегральное уравнение (4.18) однозначно разрешимо, то существует $\varepsilon>0$ и целое N, такие, что при любом $m>N$ уравнение

$$\mathbf{z}_m=P_m\mathbf{Z}(z_m)\quad(\mathbf{z}_m\in E_m) \tag{5.2}$$

имеет в шаре $\|\mathbf{z}'-\mathbf{z}\|^0\leqslant\varepsilon$ единственное решение $\mathbf{z}_m$ и справедлива оценка

$$\|\mathbf{z}_m-\mathbf{z}\|^0\leqslant\|\mathbf{z}-P_m\mathbf{z}\|^0+\|\mathbf{z}_m-P_m\mathbf{z}\|^0\to 0\quad(m\to\infty)$$

причем при некоторых $c_1, c_2>0$ справедливы неравенства

$$c_1\Delta_m\leqslant\|\mathbf{z}_m-P_m\mathbf{z}\|^0\leqslant c_2\Delta_m\quad(\Delta_m=\|P_m\mathbf{Z}(P_m\mathbf{y})-\mathbf{Z}(\mathbf{y})\|^0)$$

Здесь снова, как и в [1, 2], использован соответствующий результат из [6].

6. Обсуждение результатов. В заключение заметим, что доказанная теорема может найти применение во многих задачах динамики. Из условий теоремы видно, что аппроксимации могут быть построены и в случае движений, допускающих ударные взаимодействия. При этом, как известно, обобщенные скорости как функции времени могут быть разрывными, что охватывается метрикой среднеквадратичного приближения (в касательном пространстве).

Рассмотрим теперь технологию вычисления движения, удовлетворяющего краевым условиям в конфигурационном пространстве. Основная проблема при точном учете уравнений движения – определение начальных скоростей, обеспечивающих попадание в заданную конечную точку. Стандартным при этом является так называемый метод стрельб. Точное решение определяется при помощи итерационного процесса в конечномерном пространстве. Однако каждый шаг требует вычисления целой траектории при $t \in [t_0, t_1]$.

Данная работа относится к другому классу методов. Приближенное решение получается в рамках пространства путей, всегда удовлетворяющих краевым условиям. Тогда главной проблемой является уменьшение невязки, возникающей при $t \in [t_0, t_1]$, в условиях экстремальности принципа Гамильтона. Этими условиями, как известно, являются уравнения Лагранжа. Здесь, однако, используется принцип Гамильтона для получения такой формулировки упомянутых условий, которая позволила бы эффективно применить метод Галеркина в подходящем функциональном пространстве путей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Косенко И.И.* О применении многочленов Чебышева для построения траектории возмущенного движения в нелинейной механике // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 1. С. 32–38.
2. *Косенко И.И.* О методе Галеркина в нелинейной механике // ДАН. 1994. Т. 335. № 5. С. 586–588.
3. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980. 496 с.
4. *Шварц Л.* Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972. 824 с.
5. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
6. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 456 с.

Сергиев Посад

Поступила в редакцию
21.XI.1994