

УДК 531.36

© 1995 г. М.В. Дерябин, В.В. Козлов

### К ТЕОРИИ СИСТЕМ С ОДНОСТОРОННИМИ СВЯЗЯМИ

Рассматривается задача о реализации односторонней связи, когда коэффициенты жесткости, вязкости и присоединенные массы одновременно согласованным образом устремляются к бесконечности. Основным результатом состоит в следующем: предельные движения существуют и на границе они совпадают с движениями голономной системы с меньшим числом степеней свободы, однако в отличие от классической модели здесь имеет место эффект запаздывания момента схода со связи.

Формально-аксиоматический метод обоснования динамики систем со связями имеет очевидный недостаток: остаются непроясненными происхождение и физический смысл основных принципов, а также границы применимости теоретических моделей. С этой точки зрения более предпочтительным является конструктивный метод, намеченный Клейном, Прандтлем и Лекорню в связи с анализом парадоксов сухого трения, указанных Панлеве [1]. Голономная связь заменяется полем упругих сил, направленных к соответствующей поверхности. Оказывается, при стремлении коэффициента жесткости к бесконечности движения "свободной" системы стремятся к движениям системы с голономной связью. Точные формулировки даны Курантом, доказательство для потенциального поля сил содержится в [2], а в общем случае в [3].

Рассматривалась [4] задача о реализации голономных связей упругими силами и силами вязкого трения. Изучался [5] вопрос о стабилизации численных методов интегрирования уравнений движения с двусторонними связями с помощью дополнительных потенциальных и диссипативных сил.

Аналогичный подход для односторонних связей развит в [6] (см. также [7]): неудерживающая голономная связь заменяется полем упругих сил, направленных к границе, после чего коэффициент жесткости устремляется к бесконечности. Оказывается, траектории, трансверсально пересекающие границу, стремятся к траекториям предельной системы с ударами. Этот результат оказался эффективным средством исследования устойчивости периодических траекторий и эволюции виброударных систем [6–8]. Случай, когда в начальный момент времени скорость системы касается граничной поверхности, исследовался в [6, 9]. Оказывается, при неограниченном увеличении коэффициента жесткости движение "свободной" системы стремится к движению по границе при учете возможности схода со связи. Рассмотрен случай [6], когда внешние силы потенциальны и дано [9] доказательство теоремы о предельном переходе без предположения о потенциальности обобщенных сил.

Ниже рассматривается более общая ситуация, когда полупространство заменяется средой Кельвина–Фойгта и затем в "свободной" системе коэффициенты жесткости и вязкости согласованным образом устремляются к бесконечности.

**1. Теорема о предельном переходе.** Пусть  $x_1, \dots, x_n$  – обобщенные координаты механической системы,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \dot{x}_i \dot{x}_j \tag{1.1}$$

– кинетическая энергия,  $F_1, \dots, F_n$  – обобщенные силы, зависящие от  $x$  и  $\dot{x}$ . Введем одностороннюю связь, задаваемую неравенством

$$f(x) \geq 0 \tag{1.2}$$

где  $f$  – гладкая функция, удовлетворяющая условию  $df \neq 0$  в точках, где  $f = 0$ . Положим  $\Sigma = \{x: f(x) = 0\}$ . Ясно, что  $\Sigma$  – регулярная гиперповерхность. Будем рассматривать движения этой системы  $x(t)$  со следующими начальными данными:

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v, \quad f(x_0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)v = 0 \quad (1.3)$$

Последнее условие означает, что вектор скорости  $v$  касается  $\Sigma$ . В противном случае имеет место движение с ударами.

При движении по поверхности  $\Sigma$  функция  $x(t)$  удовлетворяет уравнениям Лагранжа с множителем:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x'}\right)' - \frac{\partial T}{\partial x} = F + R, \quad R = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f = 0 \quad (1.4)$$

Сила  $R$  – реакция связи, которая является ковектором, причем ее значения на векторах (1.3), касательных к  $\Sigma$ , равно нулю:  $Rv = 0$ . Сопоставим с ковектором  $R = \{R_i\}$  вектор  $r = \{r^i\}$  с компонентами

$$r^i = \sum_{j=1}^n a^{ij} R_j$$

где  $\|a^{ij}\|$  – матрица, обратная к  $\|a_{ij}\|$ . Ясно, что вектор  $r$  ортогонален  $\Sigma$  во внутренней метрике, задаваемой кинетической энергией (1.1). Пусть  $\mu$  – алгебраическое значение проекции вектора  $r$  на нормаль к  $\Sigma$ ;  $|\mu|$  равно величине силе реакции.

Для рассматриваемого движения  $t \rightarrow x(t) \in \Sigma$  множитель Лагранжа  $\lambda$  и проекция  $\mu$  – некоторые гладкие функции времени. Если  $\mu(t) \geq 0$  при  $0 \leq t \leq \tau$ , то с точки зрения классической модели динамики с односторонними связями на интервале  $[0, \tau]$  система будет двигаться по поверхности  $\Sigma$ . Если же  $\mu(t) < 0$  на некотором интервале  $t \in (\tau, \tau + \delta)$ ,  $\delta > 0$ , то при  $t = \tau$  система покидает поверхность  $\Sigma$  и становится свободной.

Следуя [6], заменим одностороннюю связь (1.2) вязкоупругой средой Кельвина–Фойгта, заполняющей полупространство  $f(x) \leq 0$ . Упругие свойства среды задаются потенциальной энергией

$$V_N = \gamma N f^2 / 2 \quad (1.5)$$

а вязкость – диссипативной функцией Релея

$$\Phi_N = \frac{\beta N}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} x' \right)^2 \quad (1.6)$$

Здесь  $\beta, \gamma$  – неотрицательные постоянные. В области  $f(x) \geq 0$  функции  $V_N$  и  $\Phi_N$  полагаются равными нулю. Потенциал (1.5) обычно используется в задаче о реализации голономных связей (см. [2, 3]). Диссипативные силы  $-\partial \Phi_N / \partial x'$ , отвечающие функции Релея (1.6), не совершают работы на движениях системы по поверхностям  $f = \text{const}$ .

При деформации среды ее частицы совершают перемещения в направлении, трансверсальном поверхности  $\Sigma$ . Поэтому при описании динамики системы в полупространстве  $f(x) \leq 0$  следует учитывать эффект присоединенных масс. Этот эффект будем моделировать изменением инерционных свойств рассматриваемой системы: кинетическая энергия (1.1) заменяется энергией

$$T_N = T + \frac{\alpha N}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} x' \right)^2, \quad \alpha = \text{const} > 0 \quad (1.7)$$

Ясно, что при всех значениях  $N \geq 0$  квадратичная форма (1.7) положительна определена. В области  $f \geq 0$  следует, конечно, положить  $T_N \equiv T$ . В дальнейшем параметр  $\alpha$  будет устремлен к нулю. Несмотря на физическую целесообразность, введение присоединенных масс связано с регуляцией предельного перехода  $N \rightarrow \infty$ .

Итак, движения "свободной" системы описываются уравнениями

$$\left(\frac{\partial T_N}{\partial x^*}\right) - \frac{\partial T_N}{\partial x} = F - \frac{\partial V_N}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_N}{\partial x^*} \quad (1.8)$$

В области  $f \geq 0$  уравнения (1.8) совпадают с обычными уравнениями Лагранжа

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x^*}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = F \quad (1.9)$$

*Замечание.* Уравнения (1.8) записаны в предположении, что система "погружается" в среду Кельвина-Фойгта, заполняющую полупространство  $f(x) < 0$ . Можно рассматривать иную модель взаимодействия системы с вязкоупругой преградой: сила реакции преграды  $-\partial V_N/\partial x - \partial \Phi_N/\partial x^*$  может быть направлена лишь в сторону возрастания функции  $f$ . В другие моменты времени она полагается равной нулю. В теории удара эта модель развита в [7]. Пример ее использования в задаче о сходе системы со связи рассмотрен в разд. 6.

Пусть  $x_N(t)$  – решение уравнений (1.8) – (1.9) с начальными условиями  $x_N(0) = x_0$ ,  $x_N^*(0) = v$ , удовлетворяющими соотношениям (1.3). Рассмотрим вспомогательное уравнение второго порядка

$$\alpha z'' + \beta z' + \gamma z = -\mu(t) \quad (1.10)$$

где  $\mu(t)$  – определенное выше алгебраическое значение величины реакции связи при движении системы по поверхности  $\Sigma$  с теми же начальными данными. Пусть  $z(t)$  – решение (1.10), выделяемое условиями  $z(0) = 0$ ,  $z'(0) = 0$ .

*Теорема 1.* Предположим, что решение  $x(t)$ ,  $x(0) = x_0$ ,  $x'(0) = v$  уравнений (1.4) существует в интервале  $0 \leq t \leq \tau + \delta$ ,  $\delta > 0$  и  $z(t) < 0$  при  $0 < t < \tau$ . Тогда для  $0 \leq t \leq \tau$  существует предел

$$x^\wedge(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} x_N(t) \quad (1.11)$$

причем функция  $x^\wedge(t)$  удовлетворяет уравнению (1.4). Если, кроме того,  $\tau$  – первый простой нуль функции  $z(t)$  и  $\mu(\tau) < 0$ , то предел (1.11) существует в некотором большем интервале  $0 \leq t \leq \tau + \delta_1$ ,  $\delta_1 > 0$  причем  $x^\wedge(t)$  при  $\tau < t \leq \tau + \delta_1$  удовлетворяет системе (1.9) и  $f(x^\wedge(t)) > 0$ .

Подчеркнем, что здесь не исключается случай  $\tau = 0$ . Функции  $t \rightarrow x^\wedge(t)$  можно считать движениями механической системы с кинетической энергией  $T$  и односторонней связью, на которую действуют заданные обобщенные силы  $F$ , в предельной модели движения. Так как эта модель зависит от параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , то ее можно назвать  $(\alpha, \beta, \gamma)$  – моделью. С точки зрения всех этих моделей движение системы по поверхности  $\Sigma$  происходит по одному и тому же закону. Они разнятся только условиями схода со связи. Если умножить параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  на любое положительное число, то получим, очевидно, ту же самую модель.

**2. Доказательство основной теоремы.** Введем в окрестности  $\Sigma$  полугеодезические координаты  $x_1, \dots, x_n$  в которых  $f \equiv x_n$  и метрика (1.1) имеет вид

$$T = T^* + \frac{1}{2} a_{nn} x_n^2, \quad T^* = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(x) x_i x_j$$

Известно (см., например, [7, 10]), что такие координаты всегда существуют. Запишем в этих переменных уравнения (1.4)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T^*}{\partial x_i}\right)' - \frac{\partial T^*}{\partial x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{nn}}{\partial x_i} x_n^2 &= F_i, \quad i < n \\ (a_{nn} x_n)' - \frac{\partial T^*}{\partial x_n} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{nn}}{\partial x_n} x_n^2 &= F_n + R, \quad x_n = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Пусть при  $0 \leq t \leq \tau$  система движется по поверхности  $\Sigma$ . Тогда из последнего уравнения системы (2.1) получаем

$$R = - \left( F_n + \frac{\partial T^*}{\partial x_n} \right)_0 \quad (2.2)$$

Нулевой индекс означает, что в это выражение надо подставить  $x_n = 0, x_n^* = 0$ .

Ясно, что выражение (2.2) равно как раз  $\mu$ . При этом первое уравнение (2.1) принимает вид обычных уравнений Лагранжа для системы с  $n - 1$  степенями свободы

$$\left(\frac{\partial T_0^*}{\partial x_i}\right)' - \frac{\partial T_0^*}{\partial x_i} = (F_i)_0, \quad i < n \quad (2.3)$$

Запишем уравнения (1.8), учитывая, что теперь  $f = x_n$ . Первая группа уравнений (2.1) не изменится, а второе уравнение (2.1) слегка усложнится:

$$[(\alpha N + a_{nn}) x_n]' - \frac{\partial T^*}{\partial x_n} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{nn}}{\partial x_n} x_n^2 = F_n - \beta N x_n - \gamma N x_n \quad (2.4)$$

Следует иметь в виду, что это уравнение справедливо только при  $x_n < 0$ . Положим  $\varepsilon = 1/N$  и разделим обе части (2.4) на  $N$ :

$$\alpha x_n'' + \beta x_n' + \gamma x_n = \varepsilon \left[ F_n + \frac{\partial T}{\partial x_n} + \frac{1}{2} \frac{\partial a_{nn}}{\partial x_n} x_n^2 - (a_{nn} x_n)' \right] \quad (2.5)$$

Будем решать совместно первую группу уравнений (2.1) и (2.5). При  $t = 0$  имеем:  $x_i(0) = x_i^0, x_i^*(0) = v_i$  ( $i < n$ )  $x_n(0) = 0, x_n^*(0) = 0$ . Так как правые части рассматриваемой системы аналитичны по  $\varepsilon$ , то для ее решения можно воспользоваться методом малого параметра:

$$\begin{aligned} x_i(t, \varepsilon) &= x_i^0(t) + \varepsilon x_i^1(t) + \dots, \quad i < n \\ x_n(t, \varepsilon) &= \varepsilon x_n^1(t) + \dots \end{aligned} \quad (2.6)$$

Функции  $x_i^0(t), i < n$  удовлетворяет системе (2.3) с начальными данными  $x_i(0) = x_i^0, x_i^*(0) = v_i$ , а остальные функции  $x_i^1, x_i^2, \dots$  обращаются при  $t = 0$  в нуль вместе со своими производными. Заметим, что ввиду (2.2) выражение в квадратных скобках в правой части (2.5) при  $\varepsilon = 0$  совпадает с  $-R(t)$ . Следовательно, функция  $x_n^1(t)$  – решения уравнения (1.10) с нулевыми начальными условиями. Согласно предположению, при  $0 < t < \tau$  функция  $x_n^1(t) < 0$ . Следовательно, при малых  $\varepsilon > 0$  координата  $x_n$  отрицательна, если  $0 < t < \tau$ . Таким образом, на этом интервале времени разложения (2.6), действи-

тельно, справедливы. Переходя к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем первую часть теоремы 1.

Если  $\tau$  – первый простой нуль функции  $z(t)$  ( $z'(\tau) > 0$ ), то функция  $x_n(t, \varepsilon)$  при малых  $\varepsilon$  имеет нуль  $\tau_\varepsilon = \tau + O(\varepsilon)$ . Так как по предположению  $\mu(\tau) < 0$ , то ввиду непрерывности функция  $\mu$  отрицательна в некоторой малой окрестности точки  $\tau$ . Итак, в точке  $t = \tau_\varepsilon$

$$x_n = 0, x_n' = O(\varepsilon)$$

Кроме того,  $\mu(\tau_\varepsilon) < 0$ . Следовательно, при малых  $\varepsilon > 0$  и  $t > \tau_\varepsilon$  система будет двигаться в полупространстве  $x_n > 0$ . Устремляя  $\varepsilon$  к нулю и используя непрерывную зависимость решений по начальным данным, получаем требуемое.

**3. Запаздывание момента схода со связи.** Если  $\alpha = \beta = 0$ , то, как установлено в [9], предельная функция  $x^\wedge(t)$  существует и является движением рассматриваемой системы с классической точки зрения. В частности, первый нуль  $\tau$  функции  $\mu(t)$ , когда  $\mu'(\tau) < 0$ , является моментом схода со связи. Согласно теореме 1, в  $(\alpha, \beta, \gamma)$  – модели система заведомо движется по поверхности  $\Sigma$  до тех пор, пока решение уравнения (1.10) с нулевыми начальными условиями отрицательно.

*Предложение 1.* Если  $\beta^2 \geq 4\alpha\gamma$  и  $\mu(t) > 0$  при  $0 < t < \tau$ , то  $z(t) < 0$  при всех  $0 < t < \tau + \kappa$ , где  $\kappa > 0$ .

*Доказательство.* Если  $\beta^2 \geq 4\alpha\gamma$ , то корни характеристического уравнения  $\alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0$  вещественны. Обозначим их  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Пусть  $\lambda_1 > \lambda_2$  (случай  $\lambda_1 = \lambda_2$  рассматривается аналогично). Тогда решение уравнения (1.10) с нулевыми начальными данными имеет вид

$$z(t) = -\frac{e^{\lambda_1 t}}{\alpha(\lambda_1 - \lambda_2)} \int_0^t e^{-\lambda_1 s} \mu(s) ds + \frac{e^{\lambda_2 t}}{\alpha(\lambda_1 - \lambda_2)} \int_0^t e^{-\lambda_2 s} \mu(s) ds$$

При малых  $t > 0$ , очевидно,  $z(t) < 0$ . Пусть  $t = \xi$  – первый положительный нуль функции  $z(t)$ . Тогда

$$\int_0^\xi e^{-\lambda_1 s} \mu(s) ds \left[ \int_0^\xi e^{-\lambda_2 s} \mu(s) ds \right]^{-1} = \frac{e^{-\lambda_1 \xi}}{e^{-\lambda_2 \xi}}$$

Пусть  $\xi \leq \tau$ . Тогда, по предположению,  $\mu > 0$  и, следовательно, по теореме Коши о среднем, в интервале  $(0, \xi)$  найдется точка  $\eta$ , такая, что  $e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\eta} = e^{(\lambda_1 - \lambda_2)\xi}$ . Так как  $\lambda_1 > \lambda_2$  и  $\eta < \xi$ , то это равенство противоречиво.

*Следствие.* Если  $\beta > 0$  и  $\alpha$  мало, то имеет место явление затягивания схода со связи.

*Предложение 2.* Пусть  $\beta^2 < 4\alpha\gamma$  и  $\omega^2 = 4\alpha\gamma - \beta^2$ ,  $\omega > 0$ . Если  $\mu(t) > 0$  при  $0 < t < \tau \leq \pi/\omega$ , то  $z(t) < 0$  при всех  $0 < t < \tau + \kappa$ ,  $\kappa > 0$ .

Это утверждение доказывается тем же способом, что и предположение 1.

Не следует думать, что всегда нуль функции  $z(t)$  лежит правее первого нуля функции  $\mu(t)$ . Вот простой контрпример:  $z'' + z = -\mu(t)$ , где  $\mu(t) = 1$ ,  $0 \leq t \leq 3\pi/2$ ,  $\mu(t) = 1/2$ ,  $t > 3\pi/2$ .

Решение этого уравнения с нулевыми начальными данными при  $t > 3\pi/2$  имеет вид  $z(t) = (-1 + \sin t)/2 + \cos t$ , т.е.  $z(2\pi) = 1/2$ .

**4. Реализация связи упругими силами.** Рассмотрим важный частный случай, когда  $\beta = 0$ ,  $\alpha = v^2$ ,  $\gamma \rightarrow 0$ . Без ущерба для общности можно положить  $\gamma = 1$ . В предельном случае  $\alpha = 0$  было показано [9], что функция  $x^\wedge(t)$  описывает движение системы с односторонней связью в классической модели.

При малых  $v$  предложение 2 не дает содержательного вывода о свойствах решения уравнения

$$v^2 z'' + z = -\mu(t) \tag{4.1}$$

с нулевыми начальными данными. Это решение имеет вид

$$z(t, \nu) = -\sin \frac{t}{\nu} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{\nu} \cos \frac{\tau}{\nu} d\tau + \cos \frac{t}{\nu} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{\nu} \sin \frac{\tau}{\nu} d\tau$$

Интегрированием по частям можно получить следующее асимптотическое представление:

$$z(t, \nu) = \mu(0) \cos \frac{t}{\nu} - \mu(t) + O(\nu) \quad (4.2)$$

Если  $\mu(0) \neq 0$ , то эта функция вообще не имеет предела при  $\nu \rightarrow 0$  из-за быстрых осцилляций. Однако

$$\lim_{t_1, t_2 \rightarrow t} \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} z(\tau, \nu) d\tau = -\mu(t) \quad (4.3)$$

Таким образом, после усреднения в пределе получаем  $-\mu(t)$ . Это же значение получается из (4.1) после формальной подстановки  $\nu = 0$ .

Вернемся к задаче Куранта о реализации двусторонней связи  $f(x) = 0$ , считая, что кроме упругих сил с потенциальной энергией  $Nf^2/2$  имеются присоединенные массы, которые увеличивают кинетическую энергию на  $\nu^2 N(f')^2/2$ , где  $\nu$  мало. В уравнении (2.4) надо положить  $\gamma = 1$ ,  $\beta = 0$ ,  $\alpha = \nu^2$ . В правой части будем иметь дополнительное слагаемое  $-Nx_n$ . При  $N \rightarrow \infty$  получается неопределенность вида « $\infty \cdot 0$ ». Из результатов разд. 2 вытекает, что это слагаемое стремится к функции  $z(t, \nu)$ , когда  $N \rightarrow \infty$ . При  $\nu \rightarrow 0$  после регуляризации (4.3) получаем, что слагаемое  $-Nx_n$  стремится к реакции голономной связи  $f = x_n = 0$ . Этот результат другим способом получен в [3].

Если  $\mu(0) > 0$ , то при малых  $t > 0$  справедливо неравенство  $f(x_N(t)) < 0$ : система находится в "запрещенной" области и на нее действуют большие упругие силы, стремящиеся вытолкнуть систему в полупространство  $f \geq 0$ . Спрашивается, как долго система может находиться в области  $f(x) < 0$ ? Асимптотическая формула (4.2) дает некоторые нетривиальные оценки: если  $\mu(t) > \mu(0)$ , то при малых  $\varepsilon = 1/N$  и  $\nu$  траектория  $t \rightarrow x_N(t)$  системы находится в области  $f(x) < 0$ . Действительно, согласно (2.6),  $x_n(t) = \varepsilon z(t, \nu) + o(\varepsilon)$ . Остается заметить, что если  $\mu(t) > \mu(0)$ , то для малых значений  $\nu$  функция  $z(t, \nu)$  отрицательна.

**5. Реализация связи анизотропным трением.** Рассмотрим еще один важный частный случай, когда  $\gamma = 0$ ,  $\alpha \rightarrow 0$ . Без ущерба для общности можно положить  $\beta = 1$ . При этих предположениях решение уравнения (1.10) с нулевыми начальными данными находится из соотношения

$$z' = -\frac{e^{-t/\alpha}}{\alpha} \int_0^t \mu(s) e^{s/\alpha} ds \quad (5.1)$$

Изучим поведение функции  $z(t, \alpha)$  при  $\alpha \rightarrow 0$ .

**Предложение 3.** Если  $\mu$  – гладкая функция (например, класса  $C^2$ ), то при  $t \in (0, \tau]$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} z'(t, \alpha) = -\mu(t) \quad (5.2)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} z(t, \alpha) = -\int_0^t \mu(s) ds \quad (5.3)$$

Действительно, интегрируя дважды по частям (5.1), получим формулу

$$z' = -\mu(t) + e^{-t/\alpha} \mu(0) + \alpha \left[ e^{-t/\alpha} \mu(s) e^{s/\alpha} \Big|_0^t - e^{-t/\alpha} \int_0^t \mu(s) e^{s/\alpha} ds \right] \quad (5.4)$$

Для оценки интеграла в этой формуле воспользуемся теоремой Бонне о среднем:

$$\int_0^t f'' e^{s/\alpha} ds = \int_0^{\xi} f'' ds + e^{t/\alpha} \int_{\xi}^t f'' ds, \quad \xi \in [0, t]$$

Так как  $\mu \in C^2$ , то функция

$$e^{-t/\alpha} \int_0^t \mu'' e^{s/\alpha} ds$$

ограничена на каждом конечном интервале времени. Остается перейти к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$  в формуле (5.4).

Если  $\mu(0) \neq 0$ , то сходимость в формуле неравномерная:  $z' \rightarrow 0$  при  $t = 0$ . Поэтому в общем случае из (5.2) может не вытекать справедливость (5.3). Однако

$$\int_0^t e^{-s/\alpha} ds = \alpha(1 - e^{-t/\alpha})$$

и выражение в квадратных скобках в (5.4) равномерно ограничено. Поэтому интеграл от правой части (5.4) при  $\alpha \rightarrow 0$  стремится к интегралу от функции  $-\mu$ , что и требовалось доказать.

Предположим, что  $\mu(t) > 0$  при малых  $t > 0$ . Тогда, очевидно,  $f(x_N(t)) < 0$ . Так как  $x_n(t, \varepsilon) = \varepsilon z(t) + o(\varepsilon)$ , то для малых значений  $\varepsilon$  координата  $x_n < 0$  если  $z(t) < 0$ . Пусть  $\tau$  – первый нуль функции (5.3). Ясно, что  $\mu(\tau) \leq 0$ . В типичной ситуации  $\mu(\tau) < 0$ . Тогда  $\tau$  – простой нуль функции  $z(t)$ . Следовательно, в пределе, когда  $\varepsilon = 1/N \rightarrow 0$ , координата  $x_n$  первый раз становится равной нулю, причем  $\mu(\tau) < 0$ . Поэтому при  $t > \tau$  система покидает поверхность  $\Sigma$  и ее динамика описывается уравнениями (1.9).

В итоге приходим к следующей модели движения: если  $\mu(0) > 0$ , то система начинает двигаться по поверхности  $\Sigma$  до момента времени, когда среднее значение реакции связи первый раз обращается в нуль. Если в этот момент реакция отрицательна (это типичный случай), система становится свободной. В случае, если траектория "свободной" системы затем трансверсально пересечет поверхность  $\Sigma$ , будет иметь место абсолютно неупругий удар: нормальная составляющая скорости обратится в нуль [6].

**6. Теорема о предельном переходе в случае анизотропного трения.** Рассмотрим случай, когда  $\alpha = 0$  и  $\gamma = 0$  (в уравнениях (1.8) присутствуют лишь дополнительные силы вязкого трения). Оказывается, при  $N \rightarrow \infty$  решения уравнений (1.8) стремятся к движению системы, которое было описано в разд. 5. Пусть  $x_N(t)$  – решение уравнений (1.8)–(1.9) с начальными условиями  $x_N(0), x_N'(0)$ , удовлетворяющими (1.3) и пусть  $\tau$  – первый простой нуль функции (5.3).

*Теорема 2.* Найдется такое  $\delta > 0$ , что в интервале  $0 \leq t \leq \tau + \delta$  существует предел

$$x_*(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} x_N(t) \tag{6.1}$$

причем при  $0 \leq t \leq \tau$  функция  $x_*(t)$  удовлетворяет системе уравнений (1.4), а при  $t > \tau + \delta$  – системе (1.9) и неравенству  $f(x_*(t)) > 0$ .

*Доказательство.* Введем в окрестности  $\Sigma$  полугеодезические координаты  $x_1, \dots, x_n$  (как в разд. 2). Рассмотрим сначала более простую задачу о реализации двусторонней связи  $f(x) = 0$  силами вязкого трения. Пусть  $x_N(t)$  – решение уравнений (1.8) (в которых  $\alpha = \gamma = 0, \beta = 1$ ) с начальными данными (1.3).

На промежутке времени решения  $x_N(t)$  сингулярных уравнений (1.8) имеют [11, 12] предел  $x^\wedge(t)$ , причем предельная функция – решение системы (1.4). Так как начальные

данные удовлетворяют (1.3), имеют место следующие асимптотические формулы (см., например, [13]):

$$\begin{aligned} (x_N(t))_k &= x_k^\wedge(t) + O(\varepsilon) \quad (k < n) \\ (x_N(t))_n &= \varepsilon x_n^1(t) + o(\varepsilon), \quad \varepsilon = 1/N \end{aligned} \quad (6.2)$$

Подставив выражение (6.2) для  $x_n$  в (2.5), получим

$$\varepsilon (x_n^1)' = \varepsilon (F_n + \partial T / \partial x_n) x^\wedge(t) + o(\varepsilon)$$

Поэтому

$$x_n^1 = - \int_0^t \mu(s) ds \quad (6.3)$$

Согласно предположению, при  $0 < t < \tau_\varepsilon$  ( $\tau_\varepsilon = \tau + O(\varepsilon)$ ) и малых  $\varepsilon$  координата  $x_n$  отрицательна и обращается в нуль в момент времени  $\tau_\varepsilon$ . Следовательно, в интервале  $[0, \tau_\varepsilon]$  функция  $x_N(t)$  удовлетворяет системе (1.8) и неравенству  $f(x) \leq 0$ . Поэтому при  $0 \leq t \leq \tau$  функции  $x_*(t)$  (из (6.1)) и  $x^\wedge(t)$  совпадают.

Предположим, что  $\mu(\tau) < 0$ . По непрерывности функция  $\mu(t)$  отрицательна в некоторой окрестности  $\tau$ . Тогда  $x_n^*(\tau_\varepsilon) > 0$  при малых  $\varepsilon > 0$  и найдется такое  $\delta > 0$ , что при  $\tau_\varepsilon < t \leq \tau_\varepsilon + \delta$  движение системы происходит в полупространстве  $x_n > 0$ . Устремляя  $\varepsilon$  к нулю, получаем требуемое. Теорема доказана.

Рассмотрим простой пример. Пусть точка единичной массы движется в плоскости  $x, y$  причем, в левой полуплоскости (где  $x \leq 0$ ) на точку действует сила с компонентами  $0, -g$  ( $g = \text{const} > 0$ ), а в правой (где  $x > 0$ )  $0, g$ . Рассмотрим движение со связью  $y \geq 0$  и начальными условиями

$$x(0) = -1, \quad y(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (6.4)$$

В соответствии с классическими уравнениями движения точка покидает связь в момент времени  $t = 1$  (когда  $x = 0$ ). Функция  $\mu(t)$  имеет вид

$$\mu(t) = g, \quad t \leq 1; \quad \mu(t) = -g, \quad t > 1$$

Первый простой нуль  $\tau$  интеграл от  $\mu(t)$  равен 2. Таким образом, в  $(0, 1, 0)$  – модели точка должна сойти со связи в момент времени  $t = 2$ .

Последний результат можно получить непосредственно. Заменим действие связи силой вязкого трения с компонентами  $0, -Ny'$  (в области  $y \leq 0$ ). Тогда решение с начальными данными (6.4) задается формулами

$$\begin{aligned} x(t) &= t - 1; \quad y(t) = \frac{g}{N^2} e^{-Nt} - \frac{g}{N} t + \frac{g}{N^2}, \quad t \leq 1 \\ y(t) &= \frac{g}{N^2} (2e^N - 1)e^{-Nt} + \frac{g}{N} t - \frac{2g}{N} \left(1 + \frac{1}{2N}\right), \quad t \geq 1 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Эти формулы справедливы, пока  $y \leq 0$ , т.е.  $t \leq \tau = 2 + O(1/N)$ . При  $t > \tau$  точка будет двигаться по параболе в верхней полуплоскости. Устремляя  $N$  к бесконечности, получим указанный выше результат о моменте схода со связи.

Рассмотрим теперь другую модель взаимодействия точки с преградой: сила трения отлична от нуля лишь в случае, когда  $y < 0$  и  $y' < 0$ . Тогда формулы (6.5) справедливы для  $t \leq 1 + O(1/N)$ . При больших  $t$  точка будет двигаться по параболе в полуплоскости  $y > 0$ . В пределе, когда  $N \rightarrow \infty$ , точка сходит со связи в момент времени  $t = 1$  (как в классической модели).

Последнее наблюдение можно обобщить. Будем считать, что реакция преграды  $-\partial\Phi_N/\partial x \neq 0$  лишь когда  $f < 0$  и  $f' < 0$ . В другие моменты времени она полагается равной нулю. Иными словами, преграда не может "удерживать" систему. Пусть  $\mu(0) > 0$  и  $\tau$  – первый простой нуль функции  $\mu(t)$ . Можно показать, что если  $x_N(t)$  – движение системы с начальными условиями (1.3) под действием указанной выше силы вязкого трения, то при  $N \rightarrow \infty$  функция  $x_N(t)$  стремится к классическому движению системы с односторонней связью  $f \geq 0$ . В частности,  $t = \tau$  – момент схода системы со связи. Действительно, согласно (6.2) и (6.3) сила трения обратится в нуль, когда

$$(x_N)_n^* = -\epsilon\mu(t) + o(\epsilon) \quad (6.6)$$

Так как  $\tau$  – первый простой нуль функции  $\mu$ , то по теореме о неявных функциях, первый положительный нуль уравнения (6.6) равен  $\tau_\epsilon = \tau + O(\epsilon)$ , причем в момент времени  $\tau_\epsilon$  координата  $x_n$  и скорость  $x_n^*$  будут  $O(\epsilon)$ . Устремляя  $\epsilon$  к нулю, получим требуемое. Этот результат может оказаться полезным при численном решении дифференциальных уравнений с односторонними связями: введение вязкости является стабилизирующим эффектом численных методов интегрирования (ср. с [5]).

Авторы благодарят В.В. Румянцеву за обсуждение затронутых в статье вопросов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16244) и Международного научного фонда (МСУ 000).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пенлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954. 316 с.
2. Rubin H., Ungar P. Motion under a strong constraining force // *Communs. Pure and Appl. Math.* 1957. V. 10. N 1. P. 65–87.
3. Козлов В.В., Нейштадт А.И. О реализации голономных связей // *ПММ.* 1990. Т. 54. Вып. 5. С. 858–861.
4. Новожилов И.В. Фракционный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1991. 189 с.
5. Baumgarte J. Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems // *Computer methods in appl. Mech. and Engng.* 1972. V. 1. N1. P. 1–16.
6. Козлов В.В. Конструктивный метод обоснования теории систем с неударивающими связями // *ПММ.* 1988. Т. 52. Вып. 6. С. 833–894.
7. Козлов В.В., Трещев Д.В. Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991. 166 с.
8. Козлов В.В. Об ударе с трением // *Изв. АН СССР. МТТ.* 1989. № 6. С. 54–60.
9. Дерябин М.В. О реализации неударивающих связей // *ПММ.* 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 136–140.
10. Раишевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.
11. Карапетян А.В. О реализации неголономных связей силами вязкого трения и устойчивости кельтских камней // *ПММ.* 1981. Т. 45. Вып. 1. С. 42–51.
12. Бренделев В.Н. О реализации связей в неголономной механике // *ПММ.* 1981. Т. 45. Вып. 3. С. 481–487.
13. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272 с.