УДК 539.375

© 1995 г. Н.А. Иваньшин, Е.А. Широкова

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С ДВОЯКОСИММЕТРИЧНЫМ ВЫРЕЗОМ, ИМЕЮЩИМ ДВА НУЛЕВЫХ УГЛА

Решаются первая основная и смешанная задачи теории упругости для плоскости с двоякосимметричным вырезом, имеющим два нулевых угла на границе. Путем изменения параметра этот вырез можно деформировать, сближая или разъединяя берега. Для семейства вырезов рассматриваемого типа изучались [1–3] случаи свободных берегов и контактных смещений в малой окрестности вершины угла. Первая основная задача теории упругости с ненулевыми граничными напряжениями сводится к решению двух задач Гильберта для внешности единичного круга. Изучается также смешанная задача, которую можно рассматривать как контактную задачу, когда нормальные напряжения, действующие на границе отверстия, обеспечивают заданные смещения вдоль вертикальной оси. Такая смешанная задача сводится к сингулярному интегральному уравнению Гильберта, и после его решения – к первой основной задаче теории упругости, решенной ранее.

1. Схема решения первой основной задачи теории упругости. Известно, [4], что первая основная задача теории упругости для односвязной области D, содержащей бесконечно удаленную точку, сводится к нахождению двух аналитических в D функций

$$F(z)=\Gamma+\frac{a}{z^2}+\ldots,\quad G(z)=\Gamma'+\frac{a'}{z^2}+\ldots \tag{1.1}$$

где Γ и Γ' заданы ($\operatorname{Im}\Gamma=0$). Краевое условие имеет вид

$$F(z)+\overline{F(z)}+\exp(-2i\arg z'(t))[z\overline{F'(z)}+\overline{G(z)}]=T_n(t)-iT_s(t) \tag{1.2}$$

где $z=z(t)$, $t\in[t_1,t_2]$ – уравнение границы ∂D области D, $T_n(t)$ и $T_s(t)$ – нормальная и касательная компоненты внешнего напряжения, $\arg z'(t)$ – угол между касательной к контуру и положительным направлением вещественной оси.

Перейдем к функции $z(\zeta)$, конформно отображающей область $E^-=\{\zeta=\xi+i\eta \mid |\zeta|>1\}$ на D с соответствием $z(\infty)=\infty$. Задача свелась к краевой задаче в области E^- с краевым условием

$$\{2\operatorname{Re}\Phi(\zeta)-\exp(2i\arg[\zeta z'(\zeta)])\chi(\zeta)\}\big|_{\zeta=e^{i\theta}}=T_n(t(\theta))+iT_s(t(\theta)) \tag{1.3}$$

Здесь

$$\chi(\zeta)=\overline{z(\zeta)}\frac{\Phi'(\zeta)}{z'(\zeta)}+\Psi(\zeta),\quad \Phi(\zeta)=F(z(\zeta))$$

$$\Psi(\zeta)=G(z(\zeta)),\quad z(t(\theta))=z(e^{i\theta}),\quad \theta\in[-\pi,\pi]$$

$$\Phi(\zeta)=\Gamma+\frac{b}{\zeta^2}+\ldots,\quad \Psi(\zeta)=\Gamma'+\frac{b'}{\zeta^2}+\ldots,\quad \zeta\in E^- \tag{1.4}$$

Комплексное соотношение (1.3) может быть записано как два вещественных:

$$\operatorname{Re}\Phi(e^{i\theta})=\frac{1}{2}|z'(e^{i\theta})|^{-2}\operatorname{Re}\{\zeta^2 z'^2(\zeta)\chi(\zeta)\}\Big|_{\zeta=e^{i\theta}}+\frac{1}{2}T_n(t(\theta)) \tag{1.5}$$

$$\operatorname{Im}\{\zeta^2 z'^2(\zeta)\chi(\zeta)\}\Big|_{\zeta=e^{i\theta}}=-|z'(e^{i\theta})|^2 T_s(t(\theta)) \tag{1.6}$$

Если после подстановки ζ^{-1} вместо $\bar{\zeta}$ в выражение для $\overline{z(\zeta)}$ получим функцию $q(\zeta)$, мероморфную в E^- то функция

$$K(\zeta)=\zeta^2 z'^2(\zeta)\left[q(\zeta)\frac{\Phi'(\zeta)}{z'(\zeta)}+\Psi(\zeta)\right],\quad \zeta\in E^- \tag{1.7}$$

также будет мероморфной в E^-, причем

$$K(e^{i\theta})=\{\zeta^2 z'^2(\zeta)\chi(\zeta)\}\Big|_{\zeta=e^{i\theta}} \tag{1.8}$$

Согласно соотношению (1.6) функция $K(\zeta)$ может быть восстановлена по граничному значению ее мнимой части. Выражение $K(\zeta)$ будет содержать неизвестные постоянные, количество которых определяется количеством и порядком полюсов функции $K(\zeta)$ ([5], с. 270). Далее $\Phi(\zeta)$ восстанавливается в соответствии с (1.5) по граничному значению ее вещественной части. Для определения неизвестных постоянных используются равенство $\Phi(\infty)=\Gamma$, условие $\operatorname{Res}_\infty\Phi(\zeta)=0$ и условие аналитичности $\Psi(\zeta)$ в E^-. Здесь $T_n(t(\theta))$ и $T_s(t(\theta))$ предполагаются гельдеровыми.

2. Решение задачи. Рассмотрим функцию

$$z(\zeta)=\frac{i(b^2\zeta^2+1)}{\zeta(b^2-1)}+\frac{\zeta(b^2-1)}{i(b^2\zeta^2+1)},\quad b>1,\ \zeta\in E^- \tag{2.1}$$

отображающую при меняющемся b область E^- на области D_b – внешности симметричных относительно осей координат областей с нулевыми углами в точках $z_{1,2}=\pm 2$. При $b\to\infty$ получим плоскость с разрезом по отрезку $[-2, 2]$. При $1<b<\infty$ берега разреза расходятся (наибольшее расстояние – $8b^2(b^4-1)^{-1}$), смыкаясь в точках ± 2 под нулевыми углами.

Функция $K(\zeta)$ из (1.7) согласно соотношениям (1.6), (1.8) и разложению (1.4) имеет вид

$$K(\zeta)=A-\frac{\Gamma' b^4}{(b^2-1)^2}\zeta^2-\frac{\overline{\Gamma'}b^4}{(b^2-1)^2}\zeta^{-2}+C\zeta+\bar{C}\zeta^{-1}+D\frac{1+ib\zeta}{\zeta-ib}+\bar{D}\frac{\zeta-ib}{1+ib\zeta}+E\frac{1-ib\zeta}{\zeta+ib}+$$

$$+\bar{E}\frac{\zeta+ib}{1-ib\zeta}+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}R(\tau)\cos^2\tau\operatorname{ctg}\frac{\tau-\theta}{2}d\tau \tag{2.2}$$

$$\operatorname{Im}A=0,\quad R(\tau)=\frac{|1-b^2e^{2i\tau}|^2|b^4e^{2i\tau}+1|^2}{|b^2e^{2i\tau}+1|^2}T_s(t(\tau))$$

Функция $\Phi(\zeta)$, восстановленная в соответствии с условием (1.5), будет содержать те же неизвестные постоянные. Однако две из них (A и $\operatorname{Im} C$) удается исключить, использовав, как в [4], (с. 440), требование, чтобы функция $F(z)$ имела в вершинах выреза особенности порядка, меньшего единицы.

Таким образом:

$$\Phi(\zeta)=\frac{\alpha+i\beta}{\zeta-i}+\frac{\gamma+i\delta}{\zeta+i}+\Phi_0(\zeta)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Q(\theta)\frac{\zeta+e^{i\theta}}{\zeta-e^{i\theta}}d\theta \tag{2.3}$$

где:

$$\alpha=\Big[2b^4\operatorname{Im}\Gamma'+(b^2-1)^2\operatorname{Re}C+(1-b^2)[(b+1)^2\operatorname{Re}D+(b-1)^2\operatorname{Re}E]+$$

$$
+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R(\tau)\cos\tau\,\mathrm{ctg}\frac{\tau-\frac{\pi}{2}}{2}d\tau\Bigg](1+b^2)^{-4}2^{-2}
$$

$$
\gamma=\Bigg[-2b^4\,\mathrm{Im}\,\Gamma'+(b^2-1)^2\,\mathrm{Re}\,C+(1-b^2)[(b-1)^2\,\mathrm{Re}\,D+(1+b)^2\,\mathrm{Re}\,E]+
$$

$$
+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R(\tau)\cos\tau\,\mathrm{ctg}\frac{\tau+\frac{\pi}{2}}{2}d\tau\Bigg](1+b^2)^{-4}2^{-2} \tag{2.4}
$$

$$
\Phi_0(\zeta)=\frac{\beta}{2}-\frac{\delta}{2}-\frac{ib^4\,\mathrm{Im}\,\Gamma'}{(1+b^2)^3(1+b^6)}\left[\frac{1+b^4}{1-\zeta^2b^2}-\frac{1+b^2+b^4}{1+\zeta^2b^4}\right]+\frac{\zeta b^2(b^2-1)^2\,\mathrm{Re}\,C}{(1+b^2)^2(1+b^6)(1-b^8)}\times
$$

$$
\times\left[\frac{2(1+b^4)^2}{1-\zeta^2b^2}+\frac{(1-b^6)b^2}{1+\zeta^2b^4}\right]-\frac{b^4\,\mathrm{Re}\,\Gamma'}{2(1+b^2)(b^6+1)(1-b^8)}\times
$$

$$
\times\left[-1-b^2-4b^4-b^6-b^8+\frac{4(1+b^4)^2}{1-\zeta^2b^2}-\frac{2(b^2-1)(b^6-1)}{1+\zeta^2b^4}\right]+\frac{(1-b^2)b^2}{(1+b^2)^2}\times
$$

$$
\times\left\{\left[\frac{b^6(1-b^2)(b^4-1)}{(1+b^2\zeta^2)(1+b^6)}+\frac{(1-b^4)(1+b^2)}{(1+b^6)(1-b^2\zeta^2)}-\frac{b^4(1+b^2)^2}{(1+b^4)(1+b^4\zeta^2)}\right]\zeta(\mathrm{Re}\,D+\mathrm{Re}\,E)+\right.
$$

$$
\left.+\left[\frac{b^5(1-b^2)(b^4-1)}{(1+b^2\zeta^2)(1+b^6)}-\frac{(1-b^2)(1-b^4)}{(1+b^6)(1-b^2\zeta^2)b}-\frac{(1+b^2)b}{1+ib^4\zeta^2}\right]i(\mathrm{Re}\,D-\mathrm{Re}\,E)\right\}+\frac{b(b^2-1)^2}{2}\times
$$

$$
\times\left\{\left[\frac{1+b^2+b^4}{(b^8-1)(b^6+1)}+\frac{2}{(1+b^6)(1-b^4)(1-\zeta^2b^2)}-\frac{2b^2}{(1+b^6)(b^8-1)(1+\zeta^2b^4)}\right](\mathrm{Im}\,E-\mathrm{Im}\,D)+\right.
$$

$$
\left.+\left[\frac{1}{(1+b^2)^2(1-\zeta^2b^2)}-\frac{2}{(1+b^2)(b^4-1)(1+\zeta^2b^4)}\right]\frac{(\mathrm{Im}\,D+\mathrm{Im}\,E)bi\zeta}{1+b^6}\right\} \tag{2.5}
$$

$$
Q(\theta)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} R(\tau)\Big\{|b^2e^{2i\theta}+1|^2(1+b^2)^4 ctg\frac{\tau-\theta}{2}-4(\sin\tau+\sin\theta)b^2\cos\theta\times
$$

$$
\times[(1+b^2)^4+(1+b^8+2b^4\cos 2\theta)-b^2(1+b^2)^2]\Big\}d\tau|1-b^2e^{2i\theta}|^{-2}|b^2+1|^{-4}+\frac{1}{2}T_n(t(\theta)) \tag{2.6}
$$

Для определения постоянных α, β, γ, δ, $\mathrm{Re}\,C$, $\mathrm{Re}\,D$, $\mathrm{Im}\,D$, $\mathrm{Re}\,E$, $\mathrm{Im}\,E$, помимо соотношений (2.4), используем условия $\Phi(\infty)=\Gamma$, $\mathrm{Res}_\infty\Phi(\zeta)=0$, $\mathrm{Res}_{\pm ib}\Psi(\zeta)=0$, что даст следующие уравнения:

$$
(\mathrm{Im}\,E-\mathrm{Im}\,D)\frac{b(b^6-1)}{2(b^2+1)(b^4+1)(b^6+1)}=\Gamma+\frac{\mathrm{Re}\,\Gamma' b^4(1+b^2+4b^4+b^6+b^8)}{2(b^6+1)(b^2+1)(b^8-1)}-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Q(\theta)d\theta
$$

$$
\alpha+i\beta+\gamma+i\delta+\frac{\mathrm{Re}\,C(b^2-1)^2[(1-b^6)-2(1+b^4)^2]}{(1+b^2)^2(1+b^6)(1-b^8)}+\frac{b^2(1-b^2)}{(1+b^2)^2}\times
$$

$$
\times\left[\frac{b^4(1-b^2)(b^4-1)}{1+b^6}+\frac{(b^4-1)(1+b^2)}{b^2(1+b^6)}-\frac{(1+b^2)^2}{1+b^4}\right](\mathrm{Re}\,D+\mathrm{Re}\,E)-
$$

$$
-\frac{ib^2(b^2-1)^2(\mathrm{Im}\,D+\mathrm{Im}\,E)}{(1+b^2)(1+b^6)(b^4-1)}=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Q(\theta)e^{i\theta}d\theta
$$

$$D+\frac{(b^6-1)(b^4+1)}{2(b^4-1)^2}\left[\frac{\alpha+i\beta}{(b-1)^2}+\frac{\gamma+i\delta}{(b+1)^2}+\Phi_0'(ib)\right]=\frac{(b^6-1)(b^4+1)}{(b^4-1)^2 2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Q(\theta)\frac{e^{i\theta}d\theta}{(ib-e^{i\theta})^2} \tag{2.7}$$

$$E+\frac{(b^6-1)(b^4+1)}{2(b^4-1)^2}\left[\frac{\alpha+i\beta}{(b+1)^2}+\frac{\gamma+i\delta}{(b-1)^2}+\Phi_0'(-ib)\right]=\frac{(b^6-1)(b^4+1)}{(b^4-1)^2 2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}Q(\theta)\frac{e^{i\theta}d\theta}{(ib-e^{i\theta})^2}$$

где $\Phi_0(\zeta)$ из (2.5). Таким образом, имеем девять вещественных линейных уравнений, связывающих девять неизвестных постоянных. После определения этих постоянных $\Phi(\zeta)$ восстанавливается по формулам (2.3), (2.5), (2.6), $\Psi(\zeta)$ – по формулам (1.7) и (2.2).

3. Смешанная задача. Обозначим через $f(z)$ и $g(z)$ аналитические в D_b функции с полюсом в бесконечности, такие, что $f'(z)=F(z)$, $g'(z)=G(z)$.

Пусть $T_s(t)\equiv 0$, $z(t)\in\partial D_b$. Кроме того, задана вертикальная компонента граничного смещения:

$$\mathrm{Im}[kf(z)-z\overline{F(z)}-\overline{g(z)}]\Big|_{z=z(t)}=2\mu\upsilon(t),\quad k>1 \tag{3.1}$$

Перейдем, как и выше, к области E^-. Функция $\Phi(\zeta)=F(z(\zeta))$ имеет вид (2.3), где $T_n(t(\theta))$ – неизвестная функция, $T_s(t(\theta))\equiv 0$. Считая, что $\upsilon(t)\equiv\upsilon(t(\theta))$ имеет гельдерову производную по θ, и продифференцировав обе части (3.1) по θ, получим

$$\mathrm{Im}\{ie^{i\theta}z'(e^{i\theta})[(k+1)\Phi(e^{i\theta})-T_n(t(\theta))]\}=2\mu\frac{d\upsilon(t(\theta))}{d\theta}$$

Следовательно, для определения $T_n(t(\theta))$ имеем уравнение Гильберта ([5], с. 292):

$$\mathrm{Re}\left\{e^{i\theta}z'(e^{i\theta})\left[(k-1)T_n(t(\theta))+\frac{i(k+1)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}T_n(t(\sigma))\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\theta}{2}d\sigma\right]\right\}=2r(\theta) \tag{3.2}$$

где

$$r(\theta)=2\mu\frac{d\upsilon(t(\theta))}{d\theta}-(k+1)\mathrm{Re}\left\{e^{i\theta}z'(e^{i\theta})\left[\frac{\alpha+i\beta}{\zeta-i}+\frac{\gamma+i\delta}{\zeta+i}+\Phi_0(e^{i\theta})\right]\right\}$$

$z(\zeta)$ из (2.1), α, β, γ, δ и $\Phi_0(\zeta)$ из (2.3) и (2.5).

Найдем регуляризирующий множитель – вещественнозначную функцию, после умножения на которую обеих частей уравнения (18) получим задачу восстановления аналитической функции по граничным значениям ее вещественной части ([5], с. 275, 292):

$$p(\theta)=\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}A(\tau)\mathrm{ctg}\frac{\tau-\theta}{2}d\tau\right\}[(k-1)^2\,\mathrm{Re}^2\,\varphi(e^{i\theta})+(k+1)^2\,\mathrm{Im}^2\,\varphi(e^{i\theta})]^{1/2}$$

$$A(\tau)=arctg\left[\frac{(k+1)\mathrm{Im}\,\varphi(e^{i\tau})}{(k-1)\mathrm{Re}\,\varphi(e^{i\tau})}\right]$$

$$\mathrm{Re}\,\varphi(e^{i\theta})=-(b^2+1)b^2[b^2\sin4\theta+(3b^4-4b^2+3)\sin2\theta]/(b^2-1)\Delta$$

$$\mathrm{Im}\,\varphi(e^{i\theta})=[b^4\cos4\theta+b^2(1+b^2)^2\cos2\theta+1+b^2-b^4+b^6+b^8]/\Delta$$

$$\Delta=(1+b^4+2b^2\cos2\theta)^2$$

Восстановив соответствующую функцию, получим

$$T_n(t(\theta))=\mathrm{Re}\frac{2N\sin\theta+iL+s(\theta)+\dfrac{i}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}s(\sigma)\mathrm{ctg}\frac{\sigma-\theta}{2}d\sigma}{2q(e^{i\theta})\cos\theta} \tag{3.3}$$

$$q(\zeta)=\exp\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}A(\theta)\frac{\zeta+e^{i\theta}}{\zeta-e^{i\theta}}d\theta\right\},\quad s(\theta)=r(\theta)\cdot p(\theta)$$

Здесь N и L – произвольные вещественные постоянные.

Правая часть равенства (3.3) линейно зависит как от постоянных N и L так и благодаря функции $s(\theta)$ от постоянных α, β, γ, δ, $\operatorname{Re} C$, $\operatorname{Re} D$, $\operatorname{Im} D$, $\operatorname{Re} E$, $\operatorname{Im} E$. Подставляя $T_n(t(\theta))$ из (3.3) в правую часть системы (2.4), (2.7) вместо $2Q(\theta)$ и добавляя комплексное уравнение

$$\int_{-\pi}^{\pi} T_n(t(\tau))z'(e^{i\tau})e^{i\tau}d\tau = 0$$

с $T_n(t(\tau))$ из (3.3), получим линейную систему из 11 вещественных уравнений с 11 неизвестными. Решив ее, найдем $\Phi(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$ так же, как и в предыдущей задаче.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wu C.H.* Unconventional Internal Cracks. Pt 1. Symmetric Variation of a Straight Crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1982. V. 49. № 1. P. 62–68.
2. *Wu C.H.* The Contact of a Cuspidal Crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1982. V. 49. № 3. P. 525–530.
3. *Wu C.H.* Unconventional Internal Cracks. Pt 2. Method of Generating Simple Cracks // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1982. V. 49. № 2. P. 383–388.
4. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1996. 707 с.
5. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука,1977. 640 с.

Казань

Поступила в редакцию
31.I.1994