УДК 539.3

© 1995 г. Н.К. Ахмедов, М.Ф. Мехтиев

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛИТЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Исследуется асимптотическое поведение осесимметричного напряженно-деформированного состояния неоднородной плиты, толщина которой $h = \varepsilon r$, где r – расстояние от центра плиты, ε – малый параметр.

Исследовалась [1] задача теории упругости для неоднородного полого конуса и был отмечен особый случай, когда угол раствора срединной поверхности конуса равен $\pi/2$, что соответствует плите переменной толщины. Здесь изучается частный вид конической оболочки при вырождении ее срединной поверхности в плоскость. Поскольку этот случай вырождения особый, все приведенные ранее рассуждения [1] приходится проводить заново.

1. Рассмотрим упругое тело в сферической системе координат со следующими областями изменения параметров:

$$r_1 \leqslant r \leqslant r_2, \quad \pi/2 - \varepsilon \leqslant \theta \leqslant \pi/2 + \varepsilon, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

В осесимметричном случае уравнения равновесия имеют вид

$$(L_{10} + \varepsilon\partial_1 L_{11} + \varepsilon^2\partial_1^2 L_{12})\mathbf{u} = 0 \tag{1.1}$$

$$\partial[G(\partial u_\varphi + \varepsilon u_\varphi \operatorname{tg}\varepsilon\eta)] - 2G\varepsilon(\partial u_\varphi + \varepsilon u_\varphi \operatorname{tg}\varepsilon\eta)\operatorname{tg}\varepsilon\eta + \varepsilon^2 G\Delta_0 u_\varphi = 0 \tag{1.2}$$

где $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta)^T$; u_r, u_θ, u_φ – компоненты вектора перемещения, L_{1k} – матричные дифференциальные операторы вида

$$L_{10} = \begin{Vmatrix} \partial G\partial - \varepsilon G \operatorname{tg}\varepsilon\eta\partial - 2\kappa\varepsilon^2 & (G+\kappa)\varepsilon^2 \operatorname{tg}\varepsilon\eta - \varepsilon(\partial G + \kappa\partial) \\ \varepsilon\partial(\kappa+\lambda) + 2\varepsilon G\partial & \partial\kappa\partial - (2G\partial + \partial\lambda)\varepsilon \operatorname{tg}\varepsilon\eta - \kappa\varepsilon^2 \sec^2 \varepsilon\eta \end{Vmatrix}$$

$$L_{11} = \begin{Vmatrix} 2\varepsilon\kappa & \lambda\partial + \partial G - \varepsilon(G+\lambda)\operatorname{tg}\varepsilon\eta \\ G\partial + \partial\lambda & 2\varepsilon G \end{Vmatrix}, \quad L_{12} = \begin{Vmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & G \end{Vmatrix}$$

$$\Delta_0 = \partial_1^2 + 2\partial_1 - 2, \quad \partial = \frac{\partial}{\partial\eta}, \quad \partial_1^k = \rho^k \frac{\partial^k}{\partial\rho^k}, \quad \kappa = 2G + \lambda$$

$\eta = (\theta - \pi/2)/\varepsilon$, $\rho = r/r_0$ – новые безразмерные переменные, $\varepsilon = (\theta_2 - \theta_1)/2$ – малый параметр, характеризующий толщину плиты; $r_0 = (r_1 r_2)^{1/2}$, $\eta \in [-1, 1]$.

Полагаем, что упругие параметры Ламе $G = G(\eta)$, $\lambda = \lambda(\eta)$ – произвольные положительные кусочно-непрерывные функции переменной η.

Пусть на конических границах заданы следующие граничные условия:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}|_{\eta=\pm1} = M\bar{\mathbf{u}}|_{\eta=\pm1} = \bar{\mathbf{m}}^\pm(\rho) \tag{1.3}$$

$$\sigma_{\theta\varphi}|_{\eta=\pm1} = G(\varepsilon\rho)^{-1}(\partial u_\varphi + \varepsilon \operatorname{tg}\varepsilon\eta u_\varphi)|_{\eta=\pm1} = q^\pm(\rho) \tag{1.4}$$

Здесь

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = (\sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta\theta}), \quad \bar{\mathbf{m}}^\pm = (h^\pm(\rho), f^\pm(\rho))$$

$$M=(\varepsilon\rho)^{-1}(M_0+\varepsilon\partial_1 M_1)$$

$$M_0=\begin{Vmatrix} G\partial & -\varepsilon G \\ (\kappa+\lambda)\varepsilon & \kappa\partial-\varepsilon\lambda\operatorname{tg}\varepsilon\eta \end{Vmatrix},\quad M_1=\begin{Vmatrix} 0 & G \\ \lambda & 0 \end{Vmatrix}$$

Будем считать, что нагрузки $h^{\pm}(\rho), f^{\pm}(\rho), q^{\pm}(\rho)$ – достаточно гладкие функции.

Соотношения (1.2), (1.4) описывают задачу кручения плиты. Она будет рассмотрена позже.

2. Для построения неоднородных решений уравнения равновесия (1.1), удовлетворяющих на конических поверхностях плиты неоднородным граничным условиям, можно применить приемы, предложенные для однородной плиты [2, 3]. Однако, это не единственный прием для снятия нагрузки с конических поверхностей. Для построения неоднородных решений используем первый итерационный процесс асимптотического метода [4].

Решение задачи (1.1), (1.3) отыскиваем в виде

$$u_r=\varepsilon^{-2}(u_{r0}+\varepsilon u_{r1}+\ldots),\quad u_\theta=\varepsilon^{-3}(u_{\theta0}+\varepsilon u_{\theta1}+\ldots) \tag{2.1}$$

Подстановка (2.1) в (1.1), (1.3) приводит к системе, последовательное интегрирование которой по η дает соотношения для коэффициентов разложения u_r, u_θ:

$$\begin{aligned} &u_{\theta0}=\varphi_1(\rho),\quad u_{r0}=\eta[\varphi_1(\rho)-\rho\varphi_1'(\rho)]+\varphi_2(\rho) \\ &u_{\theta1}=\varphi_3(\rho),\quad u_{r1}=\eta[\varphi_3(\rho)-\rho\varphi_3'(\rho)]+\varphi_4(\rho) \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\overline{\mathbf{y}}_1=(\varphi_1,\varphi_2)$ и $\overline{\mathbf{y}}_2=(\varphi_3,\varphi_4)$ – решения соответственно первого и второго из следующих уравнений:

$$B\overline{\mathbf{y}}_1=\overline{\mathbf{I}}_1,\quad B\overline{\mathbf{y}}_2=\overline{\mathbf{I}}_2 \tag{2.3}$$

Здесь

$$B=\partial_1^4 B_4+\partial_1^3 B_3+\partial_1^2 B_2+\partial_1 B_1+B_0$$

$$B_4=\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ g_2-g_1 & 0 \end{Vmatrix},\quad B_3=\begin{Vmatrix} g_1 & 0 \\ 8(g_2-g_1) & g_0-g_1 \end{Vmatrix}$$

$$B_2=\begin{Vmatrix} 3g_1 & -g_0 \\ 2(G_1-G_2)+12(g_2-g_1)-t_1+2t_2 & 6(g_0-g_1) \end{Vmatrix}$$

$$B_1=\begin{Vmatrix} t_1-2G_1 & -2g_0 \\ 6(G_1-G_2)+3(t_2-t_1)+g_2 & 6(g_0-g_1)+2(G_1-G_0)-t_1 \end{Vmatrix}$$

$$B_0=\begin{Vmatrix} 0 & 2G_0 \\ 0 & 4(G_1-G_0)-g_1 \end{Vmatrix}$$

$$\overline{\mathbf{I}}_1=(0;\rho f(\rho)),\quad \overline{\mathbf{I}}_2=(\rho h(\rho);4\rho h^-(\rho)+2\rho(\rho h^-(\rho))'),\quad f(\rho)=f^+(\rho)-f^-(\rho),$$

$$h(\rho)=h^+(\rho)-h^-(\rho),\quad g_k=\int_{-1}^{1}4G\kappa^{-1}(G+\lambda)\eta^k d\eta,\quad G_k=\int_{-1}^{1}G\eta^k d\eta,\quad t_k=\int_{-1}^{1}2G\lambda\kappa^{-1}\eta^k d\eta$$

Отметим, что (2.3) – системы уравнений типа Эйлера.

3. Построим однородные решения. Положим в (1.3) $\overline{\mathbf{m}}^{\pm}=\mathbf{0}$. Отыскивая решения задачи (1.1), (1.3) в виде

$$\overline{\mathbf{u}}(\rho,\eta)=\rho^{z-1/2}\overline{\mathbf{w}}(\eta),\quad \overline{\mathbf{w}}(\eta)=(a,b)$$

получаем следующую несамосопряженную спектральную задачу:

$$\begin{aligned} &(L_{10}+\varepsilon(z-1/2)(L_{11}-\varepsilon L_{12})+\varepsilon^2(z-1/2)^2L_{12})\mathbf{w}=\mathbf{0} \\ &(M_0+\varepsilon(z-1/2)M_1)\mathbf{w}=\mathbf{0}\quad \text{при}\quad \eta=\pm1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Однородные решения, соответствующие первому итерационному процессу, можно получить из соотношений (2.1)–(2.3), если в них положить $\overline{\mathbf{m}}^{\pm}=\mathbf{0}$. Имеем:

$$u_r^{(0)}=\varepsilon C\rho^{-1}(2\eta+(2G_0)^{-1}(g_1-4G_1)+O(\varepsilon^2)) \tag{3.2}$$

$$u_\theta^{(0)} = C\rho^{-1}\left[1+\varepsilon^2\left(\int_0^\eta \lambda\kappa^{-1}xdx+(2G_0)^{-1}(4G_1-g_1)\eta-\eta^2\right)+O(\varepsilon^3)\right]$$

$$u_r^{(1)} = \varepsilon B(\eta-\varepsilon^2\eta^3/6+O(\varepsilon^3)),\quad u_\theta^{(1)} = B(1-\varepsilon^2\eta^2/2+O(\varepsilon^3)) \tag{3.3}$$

$$u_r^{(2)} = \rho^{-1/2}\sum_{k=1}^{4} A_k u_{rk}^{(2)},\quad u_\theta^{(2)} = \varepsilon^{-1}\rho^{-1/2}\sum_{k=1}^{4} A_k u_{\theta k}^{(2)} \tag{3.4}$$

Здесь

$$u_{rk}^{(2)} = \{\eta(z_{k0}-3/2)[2G_1+(z_{k0}+1/2)t_1+(z_{k0}+3/2)(2(G_0-G_1)+(z_{k0}^2-1/4)(g_1-g_0))]-$$
$$-(z_{k0}+3/2)[(z_{k0}-1/2)(2G_1-2G_2-t_1+t_2)-(z_{k0}^2-1/4)(z_{k0}-3/2)(g_1-g_2)]-$$
$$-2(z_{k0}-1/2)G_2-(z_{k0}-1/2)^2 t_2+O(\varepsilon^2)\}\exp(z_{k0}\ln\rho)$$

$$u_{\theta k}^{(2)} = \{(z_{k0}+3/2)[(z_{k0}^2-1/4)(g_0-g_1)+2(G_1-G_0)]-(z_{k0}+1/2)t_1-2G_1+O(\varepsilon^2)\}\exp(z_{k0}\ln\rho)$$

z_{k0} удовлетворяет биквадратному уравнению

$$16mz_{k0}^4+8(2n-m)z_{k0}^2+(16q+m-4n)=0$$

$$m=g_1^2-g_0g_2,\quad n=2G_0g_2+6g_0G_2-8g_1G_1$$

$$q=16G_1^2-12G_0G_2-4G_1g_1$$

C, B, A_k – неизвестные постоянные.

Решения (3.2), (3.3) соответствуют собственным значениям $z_0^{(0)}=-1/2$ и $z_0^{(1)}=1/2$.

Обратимся к построению следующего итерационного процесса.

Решение задачи (3.1) ищем в виде

$$a^{(3)}(\eta)=\varepsilon(a_{30}+\varepsilon a_{31}+\ldots),\quad b^{(3)}(\eta)=\varepsilon(b_{30}+\varepsilon b_{31}+\ldots) \tag{3.5}$$
$$z_k=\varepsilon^{-1}(\beta_{k0}+\varepsilon^2\beta_{k2}+\ldots)$$

Подставляя (3.5) в (3.1), после преобразований получим

$$u_r^{(3)}=\rho^{-1/2}\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}F_k u_{rk}^{(3)},\quad u_\theta^{(3)}=\rho^{-1/2}\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}F_k u_{\theta k}^{(3)}$$

$$u_{rk}^{(3)}=[p_0\beta_{k0}^{-2}\psi_k''-p_2\psi_k+O(\varepsilon)]\exp(\varepsilon^{-1}\beta_{k0}\ln\rho) \tag{3.6}$$
$$u_{\theta k}^{(3)}=[-\beta_{k0}^{-3}(p_0\psi_k'')'-2\beta_{k0}^{-1}\psi_k'+\beta_{k0}^{-1}(p_2\psi_k)'+O(\varepsilon)]\exp(\varepsilon^{-1}\beta_{k0}\ln\rho)$$

$$p_0=\kappa(4G(G+\lambda))^{-1},\quad p_1=(2G)^{-1},\quad p_2=\lambda(4G(G+\lambda))^{-1}$$

Здесь $\psi_k(\eta)$ – решения обобщенной спектральной задачи Папковича для неоднородного случая [5, 6].

Остановимся на анализе напряженно-деформированного состояния, соответствующего различным группам решений.

Напряженное состояние, определяемое решением (3.2), эквивалентно главному вектору усилий P, направленному вдоль оси симметрии. При этом постоянная C связана с P соотношением

$$P=2\pi r_0^2\varepsilon^3 C[6G_2+2G_1G_0^{-1}(g_1-4G_1)+O(\varepsilon)] \tag{3.7}$$

Главный вектор напряжений в сечении r = const для остальных однородных решений равен нулю.

Напряженное состояние, определяемое решением (3.3), соответствует перемещению плиты как твердого тела.

Напряженное состояние, определяемое формулами (3.4), эквивалентно усилиям T_r, T_φ и изгибающим моментам M_r, M_φ, отнесенным к срединной плоскости плиты.

Из (3.6) видно, что первые члены асимптотических разложений, напряжений и перемещений совпадают с решениями типа пограничного слоя для неоднородной плиты постоянной толщины [5, 6].

4. Рассмотрим вопрос о снятии напряжений с боковой поверхности плиты. Пусть при $\rho = \rho_s$ ($s = 1, 2$) заданы напряжения

$$\sigma_{rr} = \sigma_s(\eta), \quad \sigma_{r\theta} = \tau_s(\eta) \tag{4.1}$$

Функции $\sigma_s(\eta)$, $\tau_s(\eta)$ – достаточно гладкие и удовлетворяют условиям равновесия.

Как было отмечено выше, несамоуравновешенную часть напряжений можно снять при помощи проникающего решения (3.2), причем связь постоянной C с главным вектором усилий P дается равенством (3.7). Поэтому ниже будем полагать, что $P = 0$. Тогда на основании вариационного принципа Лагранжа получаем следующую бесконечную алгебраическую систему уравнений:

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_{jk} C_k = N_j \quad (j = 1,2,\ldots) \tag{4.2}$$

$$m_{jk} = \sum_{s=1}^{2} \exp(z_j + z_k) \ln \rho_s \int_{-1}^{1} (Q_{rk} u_{rj} + T_k u_{\theta j}) \cos \varepsilon\eta \, d\eta$$

$$N_j = \sum_{s=1}^{2} \exp(z_j + 3/2) \ln \rho_s \int_{-1}^{1} (\sigma_s u_{rj} + \tau_s u_{\theta j}) \cos \varepsilon\eta \, d\eta$$

(Обозначения те же, что в [1].)

Используя малость параметра, характеризующего толщину плиты ε, можно построить асимптотические решения системы (4.2). Матрицы таких систем известны из теории неоднородных плит постоянной толщины [5, 6] и поэтому здесь не приводятся. На их основе проводились численные реализации различных задач. Условия разрешимости этой системы рассмотрены в [7].

5. Перейдем к изучению задачи кручения. Решение задачи (1.2), (1.4) будем отыскивать в виде

$$u_\varphi = \varepsilon^{-1}(u_{\varphi 0} + \varepsilon u_{\varphi 1} + \varepsilon^2 u_{\varphi 2} + \ldots) \tag{5.1}$$

После подстановки (5.1) в (1.2), (1.4) получаем соотношения для коэффициентов разложения u_φ:

$$u_{\varphi 0} = g_0(\rho), \quad u_{\varphi 1} = g_1(\rho) \tag{5.2}$$

$$u_{\varphi 2} = -\frac{1}{2}\eta^2 g_0(\rho) + \frac{\rho q(\rho)}{G_0}\int_0^{\eta} G^{-1} \int_{-1}^{y} G\,dx\,dy + \rho q^-(\rho)\int_0^{\eta} G^{-1} dx + g_2(\rho)$$

$$\Delta_0 g_0 = -\frac{\rho q(\rho)}{G_0}, \quad \Delta_0 g_1 = 0, \quad \Delta_0 g_2 = \frac{(2G_0 - 3G_2)}{2G_0^2}\rho q(\rho) -$$

$$-\frac{\Delta_0(\rho q(\rho))}{G_0^2}\int_{-1}^{1} G\int_0^{\eta} G^{-1}\int_{-1}^{y} G\,dx\,dy\,d\eta - \frac{\Delta_0(\rho q^-(\rho))}{G_0}\int_{-1}^{1} G\int_0^{\eta} G^{-1} dx\,d\eta$$

$$q(\rho) = q^+(\rho) - q^-(\rho)$$

Теперь займемся вопросом о построении однородных решений. Положим в (1.4) $q^{\pm}(\rho) = 0$. После разделения переменных с помощью представления решения в виде

$$u_\varphi(\rho, \eta) = \rho^{z - 1/2} \upsilon(\eta)$$

относительно функции $\upsilon(\eta)$ получается самосопряженная спектральная задача

$$L\upsilon = (9/4 - z^2)\upsilon \tag{5.3}$$

$$L\upsilon = \{\varepsilon^{-2} G^{-1} \partial[G(\partial\upsilon + \varepsilon\upsilon \operatorname{tg}\varepsilon\eta)] - 2\varepsilon^{-1}(\partial\upsilon + \varepsilon\upsilon\operatorname{tg}\varepsilon\eta)\operatorname{tg}\varepsilon\eta; \quad G(\partial\upsilon + \varepsilon\upsilon\operatorname{tg}\varepsilon\eta)|_{\eta=\pm 1} = 0\}$$

Можно доказать, что оператор L – самосопряженный в гильбертовом пространстве $L_2(-1, 1)$ с весом $G(\eta)\cos\varepsilon\eta$.

Подставляя в (5.1), (5.2) $q^{\pm}(\rho) = 0$, получаем однородные решения, соответствующие первому итерационному процессу

$$u_\varphi^{(0)} = D\rho^{-2}\cos\varepsilon\eta \tag{5.4}$$

где D – неизвестная постоянная.

Этому решению соответствует собственное значение $z_0 = -3/2$.

Согласно следующему итерационному процессу решение задачи (5.3) отыскиваем в виде:

$$\upsilon_k = \upsilon_{k0} + \varepsilon^2\upsilon_{k2} + \ldots, \quad z_k = \varepsilon^{-1}(\delta_{k0} + \varepsilon^2\delta_{k2} + \ldots) \tag{5.5}$$

После подстановки (5.5) в (5.3) получаем

$$\upsilon_{k2} = \sum_{p=0}^{\infty} \alpha_{kp}\upsilon_{p0}, \quad \alpha_{kp} = \frac{1}{(\delta_{k0}^2 - \delta_{p0}^2)}\int_{-1}^{1} [2G\upsilon_{k0}' - (G\upsilon_{k0})']\upsilon_{p0}\eta d\eta, \quad \alpha_{kk} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} G\eta^2\upsilon_{k0}^2 d\eta$$

$$\delta_{k2} = \frac{2}{2\delta_{k0}}\left(\frac{5}{4} + \int_{-1}^{1} [2G\upsilon_{k0}' - (G\upsilon_{k0})']\upsilon_{k0}\eta d\eta\right)$$

Здесь υ_{k0} – решения вихревой задачи для неоднородной плиты постоянной толщины [5, 6]

$$-G^{-1}(G\upsilon_{k0}')' = \delta_{k0}^2\upsilon_{k0}, \quad G\upsilon_{k0}'\big|_{\pm 1} = 0 \tag{5.6}$$

Решение (5.4) определяет внутреннее напряженно-деформированное состояние плиты. Постоянная D пропорциональна крутящим моментам напряжений, действующим в сечении $r = \mathrm{const}$:

$$M_t = -6\pi\varepsilon r_0^3 D \int_{-1}^{1} G\cos^3\varepsilon\eta d\eta$$

Напряженное состояние, соответствующее второй группе решений, имеет характер пограничного слоя.

Пусть на боковой поверхности плиты заданы напряжения

$$\sigma_{r\varphi} = Gf_s(\eta) \quad \text{при} \quad \rho = \rho_s \quad (s = 1, 2) \tag{5.7}$$

Несамоуравновешенную часть напряжений можно снять при помощи проникающего решения (5.4). Будем полагать, что $M_t = 0$. В силу принятого предположения $D = 0$.

Перемещения представим в виде

$$u_\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} (D_k\rho^{-(z_k+1/2)} + E_k\rho^{z_k-1/2})\upsilon_k(\eta)\sqrt{G\cos\varepsilon\eta} \tag{5.8}$$

На основе (5.8) получаем

$$\sigma_{r\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} G[E_k(z_k - 3/2)\rho^{z_k-3/2} - D_k(z_k + 3/2)\rho^{-(z_k+3/2)}]\upsilon_k(\eta)\sqrt{G\cos\varepsilon\eta} \tag{5.9}$$

Для удовлетворения граничным условиям (5.7) заданные функции $f_s(\eta)$ $(s = 1, 2)$ разложим в ряд по собственным функциям спектральной задачи (5.3):

$$f_s(\eta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{sk}\upsilon_k(\eta)\sqrt{G\cos\varepsilon\eta} \tag{5.10}$$

$$a_{sk} = (f_s, \upsilon_k) = \int_{-1}^{1} Gf_s(\eta)\upsilon_k(\eta)\cos\varepsilon\eta d\eta$$

$$(\upsilon_k, \upsilon_n) = \delta_{kn}, \quad \|\upsilon_k\|^2 = 1 = \int_{-1}^{1} G\upsilon_k^2(\eta)\cos\varepsilon\eta d\eta$$

После подстановки (5.9) и (5.10) в (5.7) определяем выражение, которой позволяет найти постоянные E_k, D_k

$$[(z_k - 3/2)\rho^{z_k - 3/2} E_k - (z_k + 3/2)\rho^{-(z_k + 3/2)} D_k]|_{\rho=\rho_s} = a_{sk}$$

В случае G = const, λ = const все решения, полученные выше, полностью совпадают с решениями для однородной плиты [2, 3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахмедов Н.К., Мехтиев М.Ф.* Анализ трехмерной задачи теории упругости для неоднородного усеченного полого конуса // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 113–119.
2. *Мехтиев М.Ф.* Построение уточненных прикладных теорий для плиты переменной толщины // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-тех. и мат. наук. 1979. № 3. С. 47–52.
3. *Мехтиев М.Ф., Устинов Ю.А.* Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для плиты переменной толщины // Тр. 8-й Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. Ростов-на-Дону, 1971. М.: Наука, 1973. С. 58–61.
4. *Гольденвейзер А.Л.* Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 593–608.
5. *Ворович И.И., Кадолицев И.Г., Устинов Ю.А.* К теории неоднородных по толщине плит // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. № 3. С. 119–129.
6. *Устинов Ю.А.* Некоторые свойства однородных решений неоднородных плит // Докл. АН СССР. 1974. Т. 216. № 4. С. 755–758.
7. *Устинов Ю.А., Юдович В.И.* О полноте системы элементарных решений бигармонического уравнения в полуполосе // ПММ. 1973. Т. 37. Вып. 4. С. 706–714.

Баку

Поступила в редакцию
14.1.1944