

УДК 531.391

© 1995 г. В.Г. Вильке

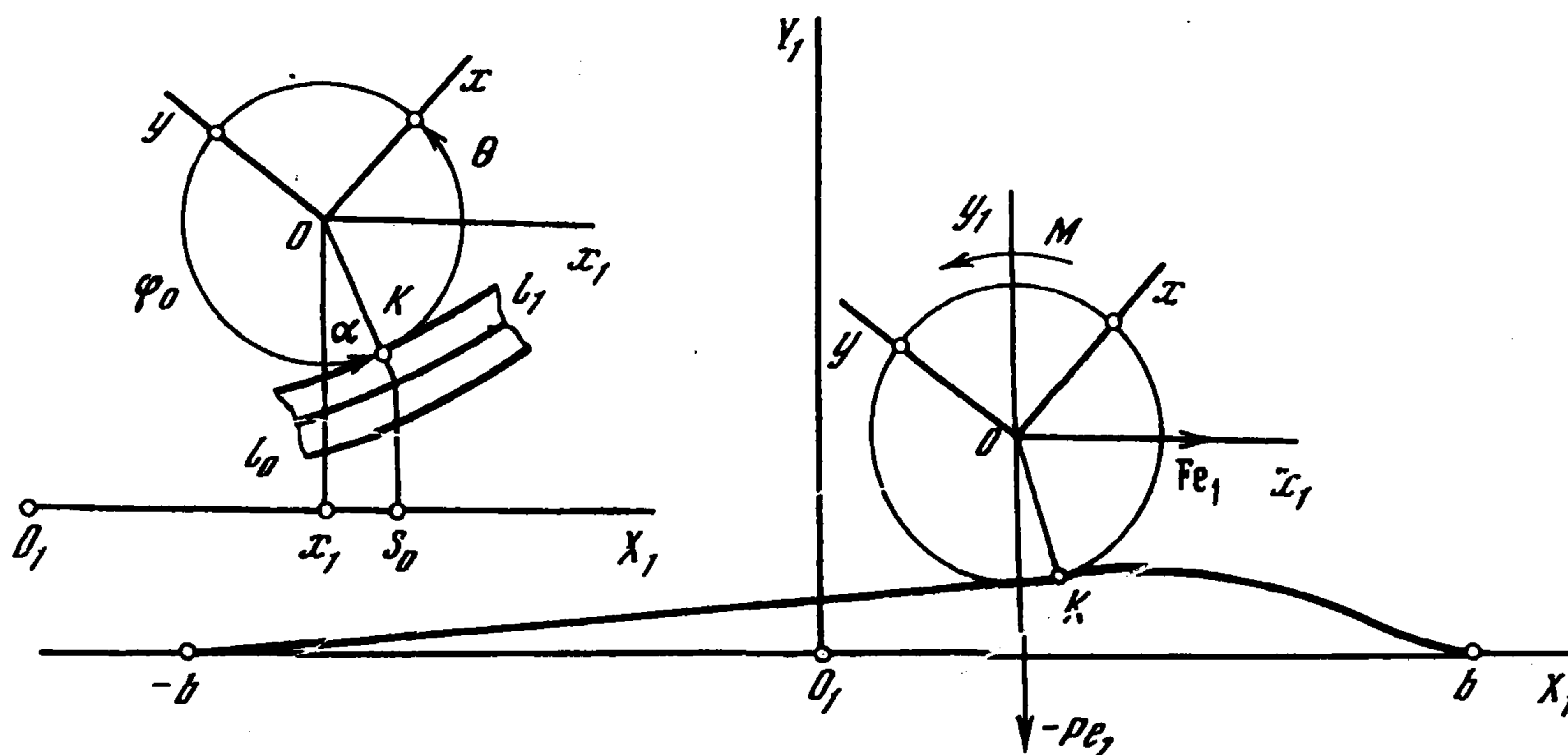
### О КАЧЕНИИ ЖЕСТКОГО КОЛЕСА ПО ДЕФОРМИРУЕМОМУ РЕЛЬСУ

Рассматривается модель жесткого колеса, катящегося без проскальзывания вдоль вязкоупругого рельса (балки), лежащего на вязкоупругом основании. Поскольку контакт рельса и колеса предполагается точечным, то в стационарном режиме (колесо катится с постоянной скоростью в вертикальной плоскости) рассматриваемая задача близка к задаче о колебаниях балки под действием движущейся нагрузки [1]. Задача о качении в различных постановках рассматривалась многими авторами [2-9].

**1. Механическая модель системы.** Пусть жесткое колесо и рельс расположены в плоскости  $O_1X_1Y_1$ . Будем считать рельс балкой, испытывающей чистый изгиб и лежащей на вязкоупругом основании. Зададим функционалы кинетической энергии, потенциальной энергии и диссипативных сил в виде

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{m}{2}(x_1^2 + y_1^2) + \frac{J}{2}\theta^2 + \frac{1}{2} \int_{-b}^b \rho w^2 ds \\
 \Pi &= \frac{1}{2} \int_{-b}^b (k_1 w''^2 + k_2 w^2) ds - F(t)x_1 + P(t)y_1 - M(t)\theta \\
 D &= \frac{1}{2} \int_{-b}^b \chi (d_1 w'^2 + d_2 w^2) ds
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

где  $m, J$  – масса и момент инерции колеса относительно его оси,  $x_1, y_1, \theta$  – координаты центра колеса точки  $O$  и угол его поворота,  $w(s, t)$  ( $s \in [-b, b]$ ) – перемещения точек нейтральной линии рельса по оси  $O_1Y_1$ ,  $\rho$  – линейная плотность рельса,  $d_1, d_2$  – характеристики внутреннего трения (материал Кельвина – Фойхта),  $\chi$  – малый параметр,  $k_1, k_2$  – изгибная жесткость рельса и жесткость основания,  $F, -P, M$  – внешние силы и момент приложенные к колесу (фигура), точка означает дифференцирование по времени  $t$ , штрих – по переменной  $s$ .



Будем решать задачу в предположении, что кривизна линии контакта рельса и колеса (линия  $l_1$ ) меньше кривизны колеса. Тогда контакт колеса и рельса осуществляется в одной точке  $K$ , а линия  $l_1$  и внешняя окружность колеса радиуса  $r$  имеют в точке контакта общую касательную. Кроме того, будет считать, что контакт колеса и рельса осуществляется без проскальзывания. В недеформированном состоянии нейтральная линия рельса  $l_0$  совпадает с осью  $O_1X_1$ , а линия контакта  $l_1$  задается уравнением  $Y_1 = h$ . В деформированном состоянии согласно гипотезе плоских сечений точки нейтральной линии определяются вектором  $\mathbf{R}_0 = se_1 + w(s, t)e_2$ , где  $e_1, e_2$  — орты осей  $O_1X_1$  и  $O_1Y_1$  соответственно, а точки линии контакта — вектором  $\mathbf{R}_1 = (s - h \sin \alpha)e_1 + (w(s, t) + h \cos \alpha)e_2$  (фигура).

Пусть система координат  $Oxy$  жестко связана с колесом, а  $\varphi$  — угловая координата точек его обода. Угол  $\varphi_0$  соответствует точке контакта  $K$ . Угол  $\theta + \varphi_0$  близок к  $3\pi/2$ , и, следовательно, угол  $\alpha = \theta + \varphi_0 - 3\pi/2$  мал (фигура). Условия контакта в точке  $K$  имеют вид

$$s_0 = x_1 + (r+h)\sin \alpha, \quad w_0 = y_1 - (r+h)\cos \alpha \quad (w_0 = w(s_0, t)) \quad (1.2)$$

Здесь  $s_0$  — координата точки нейтральной линии, которой соответствует точка  $K$  на линии контакта  $l_1$ . Из условий связей (1.2) получим соотношения, связывающие возможные перемещения. В дальнейшем будем считать угол  $\alpha$  малым. Тогда эти соотношения примут вид

$$\delta x_1 + r_1 \delta \theta = 0, \quad \delta w_0 = \delta y_1 + r_1 \alpha \delta \theta \quad (r_1 = r+h) \quad (1.3)$$

Условия (1.2) фактически означают, что колесо радиуса  $r_1$  катится по нейтральной линии  $l_0$ . Будем также считать, что реакция, возникающая в точке контакта  $K$ , переносится в соответствующую точку нейтральной линии с координатой  $s_0$  без добавления момента пропорционального малой величине  $h/r$ .

**2. Уравнения движения. Стационарный режим.** Уравнения движения системы и условия сопряжения в точке контакта получим из вариационного принципа Гамильтона — Остроградского

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{-b}^b \chi (d_1 w'' \delta w'' + d_2 w' \delta w) ds dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} [\mu(t)(\delta w_0 - \delta y_1 - r_1 \alpha \delta \theta) + \nu(t)(\delta x_1 + r_1 \delta \theta)] dt = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\mu(t), \nu(t)$  — неопределенные множители Лагранжа. Из условия существования функционала потенциальной энергии в (1.1) следует, что функция  $w(s, t)$  и ее первая производная по  $s$  непрерывны на интервале  $[-b, b]$  и, в частности, в точке  $s = s_0$ . Разбивая интервал изменения  $s$  на две части:  $[-b, s_0]$  и  $[s_0, b]$  и выполняя интегрирование по частям, найдем из соотношения (2.1) уравнения движения и условия сопряжения в виде

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_1 &= F + \nu, \quad k_1 [w'']_0 + \chi d_1 [w''']_0 = 0 \\ m \ddot{y}_1 &= -P - \mu, \quad k_1 [w''']_0 + \chi d_1 [w''''']_0 = \mu \\ J \ddot{\theta} &= M - \mu \xi_0 + \nu r_1, \quad [w]_0 = [w']_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\rho w'' + k_1 w'' + \chi d_1 w'' + k_2 w + \chi d_2 w' = 0, \quad s \neq s_0$$

Здесь  $[f(s, t)]_0 = f(s_0 + 0, t) - f(s_0 - 0, t)$  — скачок функции при  $s = s_0$ ,  $\xi_0 = r_1 \alpha$ . Соотношения (2.2) образуют полную систему уравнений, из которых можно определить движение системы, если учесть уравнения связей (1.2), граничные условия  $w(\pm b, t) = w'(\pm b, t) = 0$ , а также условие совпадения касательных к колесу и линии контакта  $l_1$  в точке  $K$  и условие качения без проскальзывания.

Рассмотрим качение колеса без проскальзывания с постоянной скоростью  $c$ , когда  $\dot{x}_1 = c$ ,  $y_1 = \text{const}$ ,  $\dot{\theta} = \text{const}$ ,  $w(s, t) = W(\xi)$ ,  $\xi = s - ct$ ,  $\xi_0 = \text{const}$ . Будем вначале считать, что

диссипативные силы малы и пренебрежем ими, положив  $\chi = 0$ . Кроме того, полагая  $b \gg |x_1|$  на рассматриваемом интервале времени, заменим граничные условия при  $s = \pm b$  на условия  $w(\pm \infty, t) = w'(\pm \infty, t) = 0$ . В стационарном режиме нейтральная линия  $l_0$  не зависит от времени в подвижной системе координат  $Ox_1y_1$ , перемещающейся поступательно со скоростью  $c$  вдоль оси  $O_1X_1$ . В этом случае соотношения (2.2) представим в форме

$$F + v = 0, \quad P = -\mu, \quad M + v r_1 = \mu \xi_0, \quad [W''']_0 = \mu / k_1 \quad (2.3)$$

$$\rho c^2 W'' + k_1 W' + k_2 W = 0, \quad [W]_0 = [W']_0 = [W'']_0 = 0$$

поскольку

$$\frac{\partial w(s, t)}{\partial t} = -c \frac{\partial W(\xi)}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 w(s, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 W(\xi)}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^n w(s, t)}{\partial s^n} = \frac{\partial^n W(\xi)}{\partial \xi^n}$$

Скачки функции  $W(\xi)$  и ее производных в (2.3) вычисляются при  $\xi = \xi_0$ .

Нейтральная линия рельса определяется в виде ( $D_n$  – корни характеристического уравнения)

$$W(\xi) = \sum_{n=1}^4 C_n \exp(D_n \xi), \quad D_n = \pm \left( \frac{-\rho c^2 \pm \Delta}{2k_1} \right)^{1/2}, \quad \Delta = (\rho^2 c^4 - 4k_1 k_2)^{1/2} \quad (2.4)$$

Корни  $D_n$  равны  $\pm \varepsilon \pm i\omega$ , если  $0 \leq c < c^*$ , и  $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ , если  $c > c^*$ , где  $c^* = (4k_1 k_2 / \rho^2)^{1/4}$ . Критическая скорость  $c^*$  разделяет две области качественно различного поведения рельса при качении колеса. Это было отмечено при изучении динамики балки с подвижными нагрузками [1, 10]. В области  $c < c^*$  функции

$$W(\xi) = \begin{cases} C_1 \exp[(\varepsilon + i\omega)\xi] + \bar{C}_1 \exp[(\varepsilon - i\omega)\xi], & \xi < \xi_0 \\ C_2 \exp[(-\varepsilon - i\omega)\xi] + \bar{C}_2 \exp[(-\varepsilon + i\omega)\xi], & \xi > \xi_0 \end{cases} \quad (2.5)$$

и  $W(\pm \infty) = W'(\pm \infty) = 0$ . Здесь  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные, а черта означает комплексное сопряжение. В области  $c > c^*$  невозможно удовлетворить условиям на бесконечности и исследование задачи следует вести с учетом диссипативных сил ( $\chi \neq 0$ ). Для практики важен случай докритических скоростей, так как критическая скорость имеет порядок 1500 км/час. Отметим только, что при качении колеса со скоростями, превышающими критическую, появляется волновое сопротивление.

Условия сопряжения в (2.3) при учете (2.5) имеют вид

$$\sum_{k=1}^4 D_k^n Z_k = -\frac{\mu}{k_1} \delta_{3n}, \quad n = 0, 1, 2, 3$$

$$Z_1 = \bar{Z}_2 = C_1 \exp(D_1 \xi_0), \quad Z_3 = \bar{Z}_4 = -C_2 \exp(D_3 \xi_0) \quad (2.6)$$

$$D_1 = \bar{D}_2 = \varepsilon + i\omega, \quad D_3 = \bar{D}_4 = -\varepsilon - i\omega$$

Из системы линейных уравнений (2.6) относительно  $Z_k$  получим

$$Z_1 + Z_2 = \mu / \zeta, \quad \zeta = 4k_1 \varepsilon (\varepsilon^2 + \omega^2), \quad D_1 Z_1 + D_2 Z_2 = 0$$

Приближенное уравнение окружности радиуса  $r_1$  с центром в точке  $O$  в окрестности точки ее пересечения с отрицательной частью оси  $Oy_1$  имеет вид

$$Y_1 = y_1 - r_1 + \xi^2 / (2r_1)$$

Эта окружность касается нейтральной линии при  $\xi = \xi_0$ , и, следовательно,

$$y_1 - r_1 + \xi_0^2 / (2r_1) = Z_1 + Z_2 = \mu / \zeta, \quad \xi_0 / r_1 = D_1 Z_1 + D_2 Z_2 = 0$$

Учитывая соотношения (2.3), найдем

$$\xi_0 = 0, \quad y_1 - r_1 = -P / \zeta, \quad M - r_1 F = 0$$

Стационарное движение со скоростью  $c$  возможно, если  $M = r_1 F$ ,  $P = \text{const}$ . Нейтральная линия рельса определяется уравнением

$$W(\xi) = -\frac{P}{\zeta} \times \begin{cases} \exp(\varepsilon\xi)(\omega \cos \omega\xi - \varepsilon \sin \omega\xi), & \xi < 0 \\ \exp(-\varepsilon\xi)(\omega \cos \omega\xi + \varepsilon \sin \omega\xi), & \xi > 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

При движении со скоростью, большей  $c^*$ , учтем малые диссипативные силы. Характеристическое уравнение примет вид

$$c\chi d_1 D^5 - k_1 D^4 - \rho c^2 D^2 + c\chi d_2 D - k_2 = 0$$

и при малых  $\chi$  имеет корень

$$D_5 = \frac{k_1}{c\chi d_1} + \frac{\rho c^3 d_1}{8k_1^2} \chi + o(\chi)$$

а корни  $\pm i\omega_1$ ,  $\pm i\omega_2$  получают поправки

$$\Delta_i = \frac{\chi c (d_1 \omega_i^4 + d_2)}{2\rho c^2 - 4k_1 \omega_i^2} + o(\chi), \quad i=1,2$$

Далее

$$\omega_i^2 = (\rho c^2 \mp \Delta) / (2k_1), \quad \omega_1 < \omega_2$$

$$\Delta_i = \pm \chi c (d_1 \omega_i^4 + d_2) / (2\Delta), \quad i=1,2; \quad \Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 < 0$$

Следовательно, нейтральная линия деформированного рельса представляется в форме

$$W(\xi) = \begin{cases} C_1 \exp[(\Delta_1 + i\omega_1)\xi] + \bar{C}_1 \exp[(\Delta_1 - i\omega_1)\xi] + C_3 \exp(D_5 \xi), & \xi < \xi_0 \\ C_2 \exp[(\Delta_2 + i\omega_2)\xi] + \bar{C}_2 \exp[(\Delta_2 - i\omega_2)\xi], & \xi > \xi_0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Коэффициенты  $C_k$  в (2.8) определяются из условий сопряжения (2.2)

$$[W^{(n)}]_0 = 0, \quad n=0,1,2,3; \quad [W^{(4)}]_0 = -\mu / (c\chi d_1) \quad (2.9)$$

Вторая производная функции  $W(\xi)$  в точке контакта  $K$  непрерывна, так как из условия существования диссипативного функционала (1.1) следует, что функция  $W(\xi)$  принадлежит пространству Соболева  $W_2^3([-b, b])$ . Из условий (2.9) с учетом (2.8) получим систему пяти линейных уравнений относительно величин  $U_k$ ,  $k=1, \dots, 5$

$$\sum_{k=1}^5 D_k^n U_k = \frac{\mu}{c\chi d_1} \delta_{4n}, \quad n=0, \dots, 4$$

$$U_1 = \bar{U}_2 = C_1 \exp[(\Delta_1 + i\omega_1)\xi_0], \quad U_3 = \bar{U}_4 = -C_2 \exp[(\Delta_2 + i\omega_2)\xi_0]$$

$$U_5 = C_3 \exp(D_5 \xi_0), \quad D_1 = \bar{D}_2 = \Delta_1 + i\omega_1, \quad D_3 = \bar{D}_4 = \Delta_2 + i\omega_2$$

Далее аналогично докритическому случаю найдем

$$W(\xi_0) = y_1 - r_1 + \frac{\xi_0^2}{2r_1} = -U_3 - U_4 = \frac{2\mu\chi c (d_1 \omega_1^2 \omega_2^2 + d_2)}{k_1^2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)^3} + o(\chi)$$

$$W'(\xi) = \frac{\xi_0}{r_1} = -D_3 U_3 - D_4 U_4 = -\frac{\mu}{k_1 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} + O(\chi)$$

Поскольку  $\mu = -P$  и  $\omega_2^2 > \omega_1^2$ , то  $W(\xi_0) < 0$ , а  $W'(\xi_0) > 0$ . Согласно (2.3)

$$M - r_1 F = -P\xi_0 = -\frac{r_1 P^2}{k_1 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} + o(\chi)$$

Если положить  $F = 0$ , то для движения колеса со скоростью  $c > c^*$  необходимо приложить момент

$$M = -\frac{r_1 P^2}{2(k_1 k_2)^{1/2} (u^4 - 1)^{1/2}} + o(\chi), \quad u = c/c^* > 1 \quad (2.10)$$

Величина прогиба рельса в точке контакта

$$W(\xi_0) = -\frac{2\chi P(d_1 k_2 + d_2 k_1)u}{(4k_1 k_2)^{5/4} \rho^{1/2} (u^4 - 1)^{3/2}} + o(\chi)$$

отрицательна и стремится к нулю как  $u^{-5}$  при  $u \rightarrow \infty$ , а при  $\chi = 0$  она равна нулю. При  $\chi \rightarrow 0$  соотношения (2.8) представляются в виде

$$W(\xi) = \frac{P}{k_1 \omega_1 \omega_2 (\omega_2^2 - \omega_1^2)} \times \begin{cases} \omega_2 \sin \omega_1 (\xi - \xi_0), & \xi < \xi_0 \\ \omega_1 \sin \omega_2 (\xi - \xi_0), & \xi \geq \xi_0 \end{cases}$$

Момент (2.10) определяет волновое сопротивление движению и необходим для поддержания равномерного движения колеса со скоростью большей критической. Он не равен нулю в случае, когда нет диссипативных сил. Заметим, что в случае движения со скоростями, меньшими критической, не требовалось прикладывать никаких сил.

**3. Диссипация энергии и сопротивление движению.** Рассмотрим случай докритических скоростей ( $c < c^*$ ). Запишем теорему об изменении полной механической энергии в стационарном случае

$$d(T + \Pi) / dt = -2D[W'] \quad (3.1)$$

Левая часть равенства (3.1) согласно (1.1) равна  $Mc/r_1 - Fc$ , а правая часть равна  $-2c^2 D[W']$ . Пусть, как и выше, движение происходит под действием только момента ( $F = 0$ ). Тогда из (3.1) получим

$$M = -cr_1 \chi \int_{-\infty}^{+\infty} (d_1 W'''^2 + d_2 W'^2) d\xi \quad (3.2)$$

Форма деформированного рельса должна быть найдена из решения краевой задачи (2.2). Однако, учитывая малость коэффициента диссипации  $\chi$ , эту задачу можно заменить задачей (2.3), когда форма деформированного рельса определяется без учета малых диссипативных сил. Очевидно, что добавление этих сил внесет искажение формы порядка  $\chi$ , а при вычислении интеграла в (3.2) момент сил  $M$  будет найден с точностью до членов порядка  $\chi^2$ .

Вычислим интеграл в правой части (3.2) воспользовавшись формулами (2.7). Вычисления удобно проводить в комплексной форме

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (d_1 W'''^2 + d_2 W'^2) d\xi = \frac{P^2}{8k_1^2 \varepsilon^2 \omega^2 (\varepsilon^2 + \omega^2)^2} \int_{-\infty}^0 (d_1 f'''^2 + d_2 f'^2) d\xi$$

$$f(\xi) = \frac{1}{2} \{ (\omega + i\varepsilon) \exp[(\varepsilon + i\omega)\xi] + (\omega - i\varepsilon) \exp[(\varepsilon - i\omega)\xi] \} \quad (3.3)$$

Согласно (2.4) получим соотношения

$$\varepsilon = [\frac{1}{2}\gamma(1-u^2)]^{1/2}, \quad \omega = [\frac{1}{2}\gamma(1+u^2)]^{1/2}, \quad \varepsilon^2 + \omega^2 = \gamma, \quad \gamma = (k_2/k_1)^{1/2}$$

Безразмерная скорость колеса  $u$  изменяется в докритическом случае в диапазоне  $[0, 1)$ . Далее, вычисляя интеграл в (3.3), согласно (3.2) получим

$$M = -\frac{\chi r_1 P^2 (d_1 k_2 (3 - 2u^2) + d_2 k_1) u}{8\rho^{1/2} k_1^{3/2} k_2 (1 - u^2)^{3/2}}, \quad 0 \leq u < 1 \quad (3.4)$$

Момент сопротивления качению колеса по определению равен моменту активных сил, приложенных к колесу, с обратным знаком, а сила сопротивления равна моменту сопротивления деленная на  $r_1$ . Момент активных сил определяется формулами (2.10) и (3.4),

которые перестают быть справедливыми в области резонанса, так как при приближении к критической скорости  $c^*$  величина  $W'(\xi_0) = \xi_0/r_1$  становится большой и нарушаются гипотезы, заложенные в модель.

Следует отметить, что сопротивление качению колеса в области малых скоростей ( $u < 1$ ) пропорционально диссипативным силам и исчезает, если последние равны нулю. При качении колеса со скоростями, превышающими критическую, сопротивление качению имеет волновой характер, а его зависимость от диссипативных сил не проявляется в первом приближении (нет членов порядка  $\chi$ ).

Представляет также интерес зависимость перемещения центра колеса от параметров стационарного движения

$$y_1 - r_1 = \begin{cases} -\frac{P\sqrt{2}}{4k_1^{1/4}k_2^{3/4}(1-u^2)^{1/2}} + O(\chi), & 0 \leq u < 1 \\ -\frac{r_1 P^2}{4k_1 k_2 (u^2 - 1)} + O(\chi), & u > 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

Очевидно, что формулы (3.5) не могут быть использованы при скоростях, близких к резонансу ( $u \approx 1$ ), а также в случае больших нагрузок, когда кривизна рельса в точке контакта больше  $r_1^{-1}$ , что противоречит гипотезам, заложенным в модель.

В заключение отметим, что точки рельса при качении по нему колеса совершают колебательные движения с частотами  $c\omega$  в докритическом случае ( $c < c^*$ ) и  $c\omega_1, c\omega_2$  при движении со скоростями, большими критической ( $c > c^*$ ), так как  $w(s, t) = W(s - ct)$ . Это приводит к колебаниям воздуха с указанными частотами, которые следует трактовать как регулярный шум при качении колеса по деформируемому рельсу.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
2. Ишлинский А.Ю. Трение качения / ПММ. 1938. Т. 2. Вып. 2. С. 245–260.
3. Келдыш М.В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси // Тр. ЦАГИ. 1945. № 564. 32 с.
4. Чудаков Е.А. Качение автомобильного колеса. М.: Машгиз, 1947. 72 с.
5. Smily R.F. Correlation, evaluation and extension of linearized theories for motion wheel shimmy // National Advisory Committee for Aeronautics. 1957. № 1299. 48 p.
6. Левин М.А., Фуфаев Н.А. Теория качения деформируемого колеса. М.: Наука, 1989. 271 с.
7. Remington P.J. Wheel / rail rolling noise, I: Theoretical analysis / J. Acoust. Soc. America. 1987. V. 81. № 6. P. 1805–1823.
8. Вильке В.Г. О качении вязкоупругого колеса / Изв. РАН. МТТ. 1993. № 6. С. 11–15.
9. Ишлинский А.Ю. Механика: Идеи, задачи, приложения. М.: Наука, 1985. 623 с.
10. Timoshenko S.P. Collected Papers. New York: McGraw Hill, 1953. 642 p.

Москва

Поступила в редакцию  
4.IV.1994