

УДК 539.375

© 1995 г. В.В. Сильвестров

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ВБЛИЗИ ТОЧКИ СГУЩЕНИЯ МИКРОПОВРЕЖДЕНИЙ

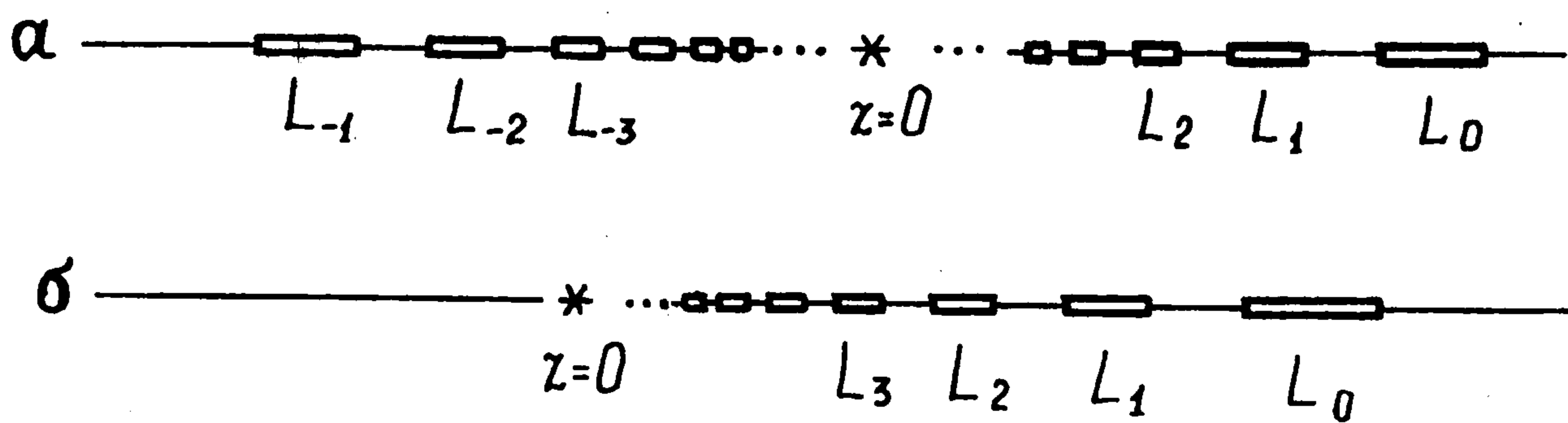
Изучается напряженное состояние вблизи точки сгущения $z = 0$ микроповреждений (МиП) типа трещин или тонких жестких линейных остроугольных включений в упругой плоскости, расположенных на одной прямой по одну или обе стороны от точки сгущения и удовлетворяющих определенным условиям. Этому предшествует аналитическое решение первой и второй основных задач теории упругости для плоскости с бесконечным множеством коллинеарных линейных сингулярностей, сгущающихся в конечной точке. Рассматриваются случаи, когда повреждения таковы, что их образы при отображении $\zeta = 1/z$ располагаются периодически на всей прямой или только на луче. В рамках силового и энергетического критериев разрушения исследуется устойчивость к разрушению окрестности точки сгущения МиП и системы МиП в целом. Приводятся примеры, описывающие механизм разрушения. Дается аналитическое решение задачи взаимодействия макроповреждения (МаП) с бесконечным рядом коллинеарных ему МиП, сгущающихся в вершине МаП. Исследования основаны на конформном отображении и результатах работ автора [1–4], в которых получены в замкнутой форме решения первой и второй основных задач теории упругости для плоскости со счетным множеством разрезов, сгущающихся на бесконечности.

Ранее [5, 6] изучалось напряженное состояние вблизи точки сгущения микротрещин, расположенных в логарифмическом масштабе периодически на луче, получены асимптотические представления напряжений и коэффициентов интенсивности напряжений вблизи точки сгущения микротрещин. Случай, рассмотренный в [5, 6], и случай, рассматриваемый в данной работе, различаются как по методам исследования, так и с точки зрения механики разрушения. Задача взаимодействия макротрещины с бесконечным множеством микротрещин, расположенных по определенным законам и сгущающихся на бесконечности, изучалась разными методами в [4, 7–9] и др.

1. Задачи теории упругости для плоскости со счетным множеством линейных сингулярностей, сгущающихся в конечной точке. Пусть однородная изотропная упругая плоскость комплексного переменного $z = x + iy$ ослаблена счетным множеством микроповреждений (МиП) типа трещин или тонких жестких линейных остроугольных включений, расположенных вдоль отрезков $L_n = [a_n, b_n]$, $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$, $n \in I$ действительной оси, сгущающихся в точке $z = 0$ и удовлетворяющих при больших n условиям:

$$|b_{n+1}^{-1} - b_n^{-1}| \geq d > 0, \quad a_n^{-1} - b_n^{-1} \leq l \quad (1.1)$$

Если отрезки сгущаются в точке $z = 0$ с двух сторон, то множество индексов $I = \{0; \pm 1, \pm 2; \dots\}$, причем все отрезки с неотрицательными индексами располагаются справа от точки сгущения, а отрезки с отрицательными индексами – слева от этой точки (фиг. 1, а). Если отрезки сгущаются в точке $z = 0$ только с одной стороны (например, справа), то $I = \{0; 1; \dots\}$, причем некоторое конечное множество отрезков может располагаться слева от точки сгущения (фиг. 1, б).



Фиг 1

Условия (1.1) выполняются, например, если отрезки L_n таковы, что их образы при отображении $\zeta = 1/z$, кроме, быть может, некоторого конечного множества, образуют периодическое множество на всей действительной оси или на полуоси. Заметим, что если МиП расположены периодически в логарифмическом масштабе, как в [6], то второе неравенство (1.1) не выполняется.

Пусть на сторонах L_n^\pm МиП заданы либо нормальное $\sigma_y^\pm(t)$ и касательное $\tau_{xy}^\pm(t)$ напряжения (первая задача), либо частные производные $(u', v')^\pm(t)$ по x от компонент смещения (вторая задача), которые на каждом отрезке непрерывны по Гёльдеру и при $t \rightarrow 0$ могут расти не быстрее, чем $M|t|^{-\lambda_0}$, $0 \leq \lambda_0 < 1$, а на бесконечности заданы напряжения $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$ и вращение ω^∞ . Кроме того, во второй задаче будем считать заданными еще главные векторы $P_n = X_n + iY_n$ внешних усилий, действующих на микровключения L_n , убывающие при $n \rightarrow \infty$ не медленнее, чем $M|a_n|^{2-\lambda_0}$.

Задача. Найти плоское напряженно-деформированное состояние вне повреждений L_n , $n \in I$, характеризуемое конечной упругой потенциальной энергией как в окрестностях вершин каждого повреждения по отдельности, так и в окрестности точки сгущения $z = 0$, из которой удалены некоторые достаточно малые окрестности всех отрезков L_n .

Определим окрестности отрезков L_n следующим образом. Пусть L_n^* – образ отрезка L_n при отображении $\zeta = 1/z$, а $U_\varepsilon^*(L_n^*)$ – его малая ε -окрестность, т.е. множество точек плоскости, удаленных от L_n^* на расстоянии, не превышающем ε . Прообраз окрестности $U_\varepsilon^*(L_n^*)$ при обратном отображении $z = 1/\zeta$ обозначим $U_\varepsilon(L_n)$ и будем принимать в дальнейшем за ε -окрестность отрезка L_n , а совокупность всех этих окрестностей обозначим $U_\varepsilon(L)$ и будем принимать за ε -окрестность линии L , состоящей из всех отрезков L_n , $n \in I$.

В данном случае напряженно-деформированное состояние плоскости с МиП L_n , $n \in I$, обладающее описанными выше свойствами, определяется известными формулами Колосова–Мусхелишвили [10] через комплексные потенциалы $\Phi(z)$, $\Omega(z)$, которые на концах отрезков L_n могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы, а при малых z , расположенных вне любой фиксированной малой окрестности $U_\varepsilon(L)$ линии L в указанном выше понимании, не превосходят по модулю $M|z|^{-\lambda}$ при некотором $\lambda < 1$. Они на линии L удовлетворяют краевым условиям

$$\rho\Phi^+(t) + \Omega^-(t) = f^+(t), \quad \rho\Phi^-(t) + \Omega^+(t) = f^-(t), \quad t \in L \quad (1.2)$$

где в случае первой задачи $\rho = 1$, $f^\pm(t) = (\sigma_y - i\tau_{xy})^\pm$, а в случае второй задачи $\rho = -k$,

$f^\pm(t) = -2\mu(u' + iv')^\pm$; κ, μ – упругие постоянные материала. В окрестности бесконечности эти функции имеют вид

$$\Phi(z) = \Gamma - \frac{P}{2\pi(\kappa+1)} \frac{1}{z} + O(z^{-2}), \quad \Omega(z) = \Gamma' + \frac{\kappa P}{2\pi(\kappa+1)} \frac{1}{z} + O(z^{-2}) \quad (1.3)$$

$$\Gamma = \frac{1}{4}(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty) + i \frac{2\mu}{\kappa+1} \omega^\infty, \quad \Gamma' = \sigma_y^\infty - i\tau_{xy}^\infty - \Gamma \quad (1.4)$$

где P – главный вектор внешних усилий, действующих на все повреждения.

Из условий (1.2), складывая и вычитая их друг из друга, получим для нахождения функций $\Phi_{1,2}(z) = \rho\Phi(z) \pm \Omega(z)$ краевые условия

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(t) + \Phi_1^-(t) &= 2p(t), & \Phi_2^+(t) - \Phi_2^-(t) &= 2q(t), & t \in L \\ 2p(t) &= f^+(t) + f^-(t), & 2q(t) &= f^+(t) - f^-(t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

и счетное множество условий

$$\int_{L_n} (\Phi_1^+(t) - p(t)) dt = \frac{i(\rho - \kappa)}{2(\kappa + 1)} P_n, \quad n \in I \quad (1.6)$$

где P_n – главный вектор внешних усилий, действующих на повреждение L_n . В случае первой задачи условия (1.6) выражают однозначность смещений при обходе вокруг МиП. Эти функции на концах отрезков L_n и в окрестности их точки сгущения $z = 0$ обладают всеми свойствами функции $\Phi(z)$, а в окрестности бесконечности имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_k(z) &= B_k + C_k z^{-1} + O(z^{-2}), \quad k = 1, 2 \\ B_1 &= (\rho - 1)\Gamma + \sigma_y^\infty - i\tau_{xy}^\infty, & B_2 &= (\rho + 1)\Gamma - \sigma_y^\infty + i\tau_{xy}^\infty, \\ C_1 &= \frac{(\kappa - \rho)P}{2\pi(\kappa + 1)}, & C_2 &= -\frac{(\kappa + \rho)P}{2\pi(\kappa + 1)} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Через функции $\Phi_{1,2}(z)$ формулы Колосова–Мусхелишвили можно записать в виде

$$\begin{aligned} \rho(\sigma_x + \sigma_y) &= 2 \operatorname{Re}(\Phi_1(z) + \Phi_2(z)), & 4\mu\rho\omega &= (\kappa + 1) \operatorname{Im}(\Phi_1(z) + \Phi_2(z)) \\ 2\rho(\sigma_y - i\tau_{xy}) &= \Phi_1(z) + \Phi_2(z) + \rho\Phi_1(\bar{z}) - \rho\Phi_2(\bar{z}) + (z - \bar{z})(\overline{\Phi_1'(z)} + \overline{\Phi_2'(z)}) \\ 4\mu\rho \frac{\partial}{\partial x}(u + iv) &= \kappa\Phi_1(z) + \kappa\Phi_2(z) - \rho\Phi_1(\bar{z}) + \rho\Phi_2(\bar{z}) - (z - \bar{z})(\overline{\Phi_1'(z)} + \overline{\Phi_2'(z)}) \end{aligned} \quad (1.8)$$

где в случае первой задачи $\rho = 1$, а в случае второй задачи $\rho = -\kappa$.

2. Решение задачи. Применим к упругой области конформное отображение $\zeta = 1/z$. При этом линия L перейдет в линию L^* , состоящую из отрезков $L_n^* = [\alpha_n, \beta_n]$, $\alpha_n = 1/b_n$, $\beta_n = 1/a_n$, $n \in I$, сгущающихся на бесконечности и согласно (1.1) удовлетворяющих при больших n условиям $\alpha_{n+1} - \alpha_n \geq d$, $\beta_n - \alpha_n \leq l$. Тогда функции

$$\Psi_{1,2}(\zeta) = \zeta^{-2} \Phi_{1,2}(1/\zeta) = z^2 \Phi_{1,2}(z) \quad (2.1)$$

удовлетворяют всем условиям работы [1] и еще дополнительно условию

$$\Psi_k(\zeta) = B_k \zeta^{-2} + C_k \zeta^{-1} + O(1), \quad k = 1, 2$$

которое должно выполняться в окрестности точки $\zeta = 0$. Записав функции $\Psi_{1,2}(\zeta)$ и переходя от переменной ζ обратно к переменной z , находим

$$\Phi_1(z) = X(z)(R(z) + Q(z) + \alpha B_1), \quad \alpha^{-1} = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \prod_{n \in I} \frac{\sqrt{a_n b_n}}{c_n} \quad (2.2)$$

$$X(z) = \prod_{n \in I} \frac{\sqrt{a_n b_n}}{c_n} \frac{z - c_n}{\sqrt{(z - a_n)(z - b_n)}}, \quad c_n = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \quad (2.3)$$

$$R(z) = \sum_{n \in I} \frac{1}{\pi i (z - c_n)} \int_{L_n} \frac{t - c_n}{X^+(t)} \frac{p(t) dt}{t - z} \quad (2.4)$$

$$Q(z) = \sum_{n \in I} A_n / (z - c_n) \quad (2.5)$$

$$\Phi_2(z) = B_2 + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{q(t) dt}{t - z}, \quad L = \bigcup_{n \in I} L_n \quad (2.6)$$

Бесконечное произведение (2.3) и ряд (2.4) в любой замкнутой ограниченной области, не содержащей точек линии L , сходятся абсолютно и равномерно. Под квадратными корнями в произведении (2.3) понимаются ветви многозначных функций, которые однозначны в плоскости с соответствующими разрезами $[a_n, b_n]$ и при $z \rightarrow \infty$ эквивалентны z . Постоянные $B_{1,2}$ и функции $p(t)$, $q(t)$ находятся по формулам (1.7), (1.4) и (1.5) соответственно, а постоянные A_n , $n \in I$ находятся из бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k \in I} \delta_{nk} A_k = H_n, \quad n \in I \quad (2.7)$$

$$\delta_{nk} = \int_{L_n} \frac{X^+(t)}{t - c_n} dt, \quad H_n = \frac{i(\rho - \kappa)}{2(\kappa + 1)} P_n - \int_{L_n} (\alpha B_1 + R(t)) X^+(t) dt \quad (2.8)$$

Решение этой системы надо искать в классе таких комплексных последовательностей A_k , $k \in I$, что ряд (2.5) в любой замкнутой ограниченной области, не содержащей точек c_n , $n \in I$, сходится равномерно и его сумма $Q(z)$ при малых $z \notin U_\varepsilon(L)$ не превосходит по модулю $M|z|^{-\lambda}$ при некотором $\lambda < 1$. Система (2.7) – следствие условий (1.6). Если эта система в указанном классе последовательностей разрешима, то ее решение единственно и может быть найдено методом редукции или методом последовательных приближений. Дальнейшие рассуждения будем проводить при условии, что система (2.7) разрешима. Некоторые случаи разрешимости этой системы будут рассмотрены в разд. 4,5.

В частности, если граничные условия задачи, а в случае второй задачи также еще главные векторы P_n равны нулю, то

$$\Phi_1(z) = \alpha B_1 X(z) (1 - \sum_{n \in I} A_n / (z - c_n)), \quad \Phi_2(z) = B_2 \quad (2.9)$$

Постоянные A_n находятся из системы (2.7), где $H_n = \int_{L_n} X^+(t) dt$.

3. Поведение напряжений и коэффициентов интенсивности напряжений в окрестности точки сгущения микроразрывов. Из результатов работ [1, 11] относительно поведения функции $\Psi_2(\zeta)$ при больших ζ и равенства (2.1) вытекает, что при малых z , расположенных вне любой фиксированной малой ε -окрестности $U_\varepsilon(L)$ линии L в смысле, определенном в разд. 1, функция $\Phi_2(z)$ по модулю не превосходит $M|z|^{-\lambda}$ при любом $\lambda \in (\lambda_0, 1)$, где λ_0 характеризует порядок роста исходных данных задачи вблизи точки сгущения МиП. Функция $R(z)$ по модулю не превосходит $M|z|^{-\lambda_0}$. Так как функция $X(z)$ вне окрестности $U_\varepsilon(L)$ ограничена, то характер поведения функции $\Phi_1(z)$ при малых $z \notin U_\varepsilon(L)$ зависит еще от характера поведения функции $Q(z)$, которая по модулю не превосходит $M|z|^{-\lambda_1}$, где λ_1 – некоторое неотрицательное число, меньшее единицы. Следовательно, если $\lambda_1 > \lambda_0$, то при малых $z \notin U_\varepsilon(L)$ функция $\Phi_1(z)$ по

модулю не превосходит $M|z|^{-\lambda_1}$ и согласно (1.8) напряжения, вращение и производные от компонент смещения при малых $z \notin U_\varepsilon(L)$ также не превосходят по модулю величины $M|z|^{-\lambda_1}$. Если $\lambda_1 \leq \lambda_0$, то они по модулю не превосходят $M|z|^{-\lambda}$ при любом $\lambda \in (\lambda_0, 1)$.

При $z \rightarrow 0$ по любому фиксированному лучу, расположенному в верхней или нижней полуплоскости, функции $X(z)$ и $R(z)$ в формуле (2.2) стремятся к пределам 1 и 0 соответственно, а функция $\Phi_2(z)$ по модулю не превосходит $M|z|^{-\lambda_0}$ при $0 < \lambda_0 < 1$ и $M \ln|z|^{-1}$ при $\lambda_0 = 0$. Поэтому характер поведения напряжений по указанным лучам определяется характером поведения функции $Q(z)$ при $z \rightarrow 0$ по этим лучам, который в свою очередь зависит от поведения решения системы (2.7) при $n \rightarrow \infty$.

Найдем коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) вблизи вершины $g_n = a_n$ или $g_n = b_n$ повреждения L_n [12, 13]:

$$K_1(g_n) - iK_2(g_n) = \lim_{x \rightarrow g_n, x \in L} \frac{2\rho}{\rho + 1} \sqrt{2\pi|x - g_n|} (\sigma_y(x + i0) - i\tau_{xy}(x + i0))$$

где в случае первой задачи $\rho = 1$, а в случае второй задачи $\rho = -\kappa$. На основании формул (1.8), (2.2)–(2.6) находим

$$K_1(g_n) - iK_2(g_n) = \lim_{x \rightarrow g_n, x \in L} \sqrt{2\pi|x - g_n|} \Phi_1(x + i0) = \eta(g_n)[R(g_n) + Q(g_n) + \alpha B_1] \quad (3.1)$$

$$\eta(g_n) = g_n(a_n + b_n)^{-1} \alpha^{-1} \sqrt{2\pi(b_n - a_n)} \prod_{k \in I, k \neq n} (g_n - c_k) / \sqrt{(g_n - a_k)(g_n - b_k)} \quad (3.2)$$

Так как при больших n согласно (1.1) выполняются неравенства

$$b_n - a_n \leq la_n b_n \leq M g_n^2, \quad |g_n| \leq M |n|^{-1}$$

а функции $R(g_n)$, $Q(g_n)$ при $n \rightarrow \infty$ могут расти не быстрее, чем $M|g_n|^{-\lambda}$, то КИН при больших n удовлетворяют неравенству

$$|K_{1,2}(g_n)| \leq M |g_n|^{1-\lambda} \leq M |n|^{\lambda-1}, \quad 0 \leq \lambda < 1$$

т.е. они для вершин повреждений, расположенных достаточно близко к точке сгущения, становятся сколь угодно малыми. Следовательно, в рамках силового критерия разрушения [14] рассматриваемая система МиП L_n , $n \in I$ в некоторой окрестности точки сгущения МиП всегда устойчива к разрушению. В случае неустойчивости к разрушению системы в целом ее разрушение в зависимости от внешних нагрузок и характера расположения МиП начнется с вершин некоторого конечного множества повреждений, расположенных "далеко" от точки сгущения. Этим механизм разрушения рассматриваемой системы МиП в рамках силового критерия отличается от механизма разрушения изученной ранее [6] системы микротрещин. Последняя при любой сколь угодно малой внешней нагрузке неустойчива к разрушению, и ее разрушение происходит в окрестности точки сгущения микротрещин путем слияния всех трещин, кроме некоторого конечного их числа. Конкретные примеры разрушений, происходящих по описанному выше механизму, будут приведены в следующем разделе.

Рассмотрим устойчивость точки $z = 0$ сгущения МиП к разрушению еще в рамках энергетического критерия, для чего изучим инвариантный комплексный Γ -интеграл Райса–Черепанова [15] вдоль окружности малого радиуса r с центром в точке $z = 0$. Если эта окружность пересекает достаточно малую окрестность некоторого повреждения L_n в смысле разд. 1, то ее часть, расположенную в этой окрестности, заменим меньшей частью границы окрестности.

Пусть система (2.7) разрешима и ее решение при больших n удовлетворяет неравенству $|A_n| \leq M_1 |a_n|^{2-\lambda_1}$, $0 \leq \lambda_1 < 1$. Тогда $Q(z)$ при $z \rightarrow 0$ по любому фиксированному лучу, расположенному в верхней или нижней полуплоскости, не превосходит по модулю $M_2 |z|^{-\lambda_1}$ при $0 < \lambda_1 < 1$ и $M_2 \ln|z|^{-1}$ при $\lambda_1 = 0$, хотя для малых $z \notin U_\varepsilon(L)$ можно лишь утверждать, что $|Q(z)| \leq M_3 |z|^{-\lambda}$ при любом $\lambda \in (\lambda_1, 1)$. Такими же свойствами обладает при $z \rightarrow 0$ по указанным лучам и функция $\Phi_2(z)$. Только при этом вместо λ_1 надо брать λ_0 .

Обозначим: $\lambda = \max\{\lambda_0; \lambda_1\}$. Тогда согласно (1.8) для рассматриваемого Γ -интеграла справедлива оценка $|\Gamma| \leq Mr^{1-2\lambda}$, откуда видно, что в случае $\lambda < 1/2$ этот интеграл при $r \rightarrow 0$ неограниченно убывает. Следовательно, в этом случае в рамках энергетического критерия разрушения некоторая малая окрестность точки сгущения МиП снова является устойчивой к разрушению и разрушение системы МиП в целом будет происходить по описанному выше механизму. Примеры, когда имеет место данная ситуация, будут приведены в разд. 4.

Если $\lambda \geq 1/2$, то устойчивость окрестности точки сгущения МиП к разрушению в рамках энергетического критерия зависит от значения интеграла Γ , который при $r \rightarrow 0$ может иметь как определенный конечный предел, так и возрастет неограниченно. В каждом таком конкретном случае необходимо провести дополнительные исследования.

Замечание. Используя конформное отображение и результаты работы [16], аналогично можно изучить напряженное состояние вблизи конечной точки сгущения бесконечного множества закрытых микротрещин в кусочно-однородной упругой плоскости, расположенных на линии раздела сред. В работе [16] рассмотрен случай, когда трещины сгущаются на бесконечности.

4. Двустороннее периодическое расположение микроповреждений в масштабе отображения $\zeta = 1/z$. Пусть повреждения расположены вдоль отрезков $L_n = [a_n, b_n]$, где $a_n^{-1} = (n + 1/2)T + a$, $b_n^{-1} = (n + 1/2)T - a$, $a < T/2$, $n = 0, \pm 1, \dots$, т.е. сгущаются в точке $z = 0$ с двух сторон (фиг. 1,а) и их образы $L_n^* = [(n + 1/2)T - a, (n + 1/2)T + a]$ при отображении $\zeta = 1/z$ образуют периодическое множество с периодом T , расположенное на всей действительной оси.

В данном случае согласно результатам работы [2] функция

$$X(z) = \frac{\cos \eta}{\sqrt{\cos(\eta + b) \cos(\eta - b)}}, \quad \eta = \frac{\pi}{Tz}, \quad b = \frac{\pi a}{T} \quad (4.1)$$

а система (2.7) имеет вид

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{n-k} A_k - \alpha_{n+1/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k = iH_n, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

$$\alpha_n = \int_0^b \frac{2x}{x^2 - n^2 \pi^2} \frac{\sin x dx}{(\sin^2 b - \sin^2 x)^{1/2}}$$

Отсюда, сложив все уравнения, просуммировав полученные при этом ряды и вычислив интегралы, находим сумму $\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k = C_1 \cosh b$, причем C_1 находится по формуле (1.7). Следовательно, система (2.7) имеет вид

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{n-k} A_k = G_n, \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (4.2)$$

$$G_n = \frac{\kappa - \rho}{2\pi(\kappa + 1)} (\pi P_n + \alpha_{n+1/2} P \cos b) - i \int_{L_n} (R(t) + B_1 \cos b) X^+(t) dt$$

Числа G_n при больших n удовлетворяют неравенствам

$$|G_n| \leq M_0 |n|^{\lambda_0 - 2}, \quad \lambda_0 < 1$$

поэтому [17, 18] система (4.2) в классе последовательностей, описанном в разд. 2, разрешима и имеет единственное решение

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=1} \frac{G(t)}{\alpha(t)} \frac{dt}{t^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_{n-k} G_k, \quad G(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n t^n, \quad \alpha(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n t^n \quad (4.3)$$

где ξ_n – коэффициенты комплексного ряда Фурье функции $1/\alpha(t)$ на отрезке $[0, 2\pi]$. При больших n числа A_n удовлетворяют неравенству $|A_n| \leq M_1 |n|^{\lambda - 2}$ при любом $\lambda \in (\lambda_0, 1)$. Решение системы (4.2) можно найти также методом редукции.

Согласно (3.1), (2.2), (4.1) для КИН вблизи вершины $g_n = a_n$ или $g_n = b_n$ справедлива формула

$$K_1(g_n) - iK_2(g_n) = |g_n| \sqrt{T \operatorname{tg} b} [R(g_n) + Q(g_n) + B_1 \cos b], \quad b = \pi a / T$$

Функции R , Q и постоянная B_1 находятся по формулам (2.4), (2.5) и (1.7), (1.4) соответственно.

В данном случае функции $R(z)$, $Q(z)$, а значит, и функция $\Phi_1(z)$, а также функция $\Phi_2(z)$ при $z \rightarrow 0$ вне любой фиксированной малой окрестности $U_\varepsilon(L)$ могут расти не быстрее, чем $M|z|^{-\lambda}$ при любом $\lambda \in (\lambda_0, 1)$, где λ_0 характеризует порядок роста исходных данных задачи в окрестности точки $z = 0$. Это следует из результатов работ [2, 11] и приведенного выше свойства чисел A_n . Следовательно, напряжения, вращения и производные от компонент смещения при $z \rightarrow 0$ вне $U_\varepsilon(L)$ могут расти неограниченно, однако не быстрее, чем $M|z|^{-\lambda}$ при любом $\lambda \in (\lambda_0, 1)$, а КИН $K_{1,2}(g_n)$ при $n \rightarrow \infty$ убывают медленнее, чем $M|n|^{\lambda - 1}$. В случае $\lambda_0 < 1/2$ инвариантный Γ -интеграл вдоль окружности малого радиуса r с центром в точке $z = 0$ при $r \rightarrow 0$ всегда стремится к нулю, а в случае $\lambda_0 \geq 1/2$ он может иметь конечный или бесконечный предел. В частности, если все исходные данные задачи, кроме нагрузок на бесконечности, нулевые, то решение задачи определяется функциями (2.9), а число λ можно взять сколь угодно малым.

Пример 1. Пусть плоскость ослаблена трещинами L_n , $n = 0, \pm 1, \dots$, на берегах которых действуют постоянные напряжения $\sigma_y^+ = -\sigma_y^- = \sigma_n$, $\tau_{xy}^+ = -\tau_{xy}^- = \tau_n$, а на бесконечности действуют заданные напряжения и вращение. Тогда функция $R(z) \equiv 0$, а главный вектор внешних сил, приложенных к берегам трещины L_n , равен $P_n = 2i(\sigma_n - i\tau_n)(a_n - b_n)$. Возьмем напряжения σ_n , τ_n так, чтобы

$$\frac{\kappa - \rho}{2(\kappa + 1)} P_n = iB_1 \cos b \int_{L_n} X^+(t) dt \quad (4.4)$$

т.е.

$$\sigma_n - i\tau_n = ia^{-1} (\kappa - 1)^{-1} ((2n + 1)^2 T^2 - 4a^2) B_1 \beta_n, \quad B_1 = \sigma_y^\infty - i\tau_{xy}^\infty \quad (4.5)$$

$$\beta_n = 4(2n + 1)(\kappa + 1)\pi^2 T^{-1} \cos b \int_0^b \frac{x}{(4x^2 - (2n + 1)^2 \pi^2)^2} \frac{\sin x dx}{(\sin^2 b - \sin^2 x)^{1/2}}$$

Отсюда, в частности, видно, что при больших n напряжения σ_n , τ_n убывают как $1/n$, а числа P_n убывают как $1/n^3$. Тогда главный вектор $P = \sum P_n = 0$ и в системе (4.2) все $G_n = 0$,

поэтому решение системы тривиально и $Q(z) \equiv 0$. Следовательно, решение задачи теории упругости определяется функциями

$$\Phi_1(z) = B_1(\cos b)X(z), \quad \Phi_2(z) = B_2 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_n - i\tau_n}{\pi i} \ln \frac{b_n - z}{a_n - z}$$

а КИН находятся из равенства

$$K_1(g_n) - iK_2(g_n) = |g_n| \sqrt{\frac{1}{2}T \sin 2b} B_1 \quad (4.6)$$

где $g_n = a_n$ или $g_n = b_n$. Отсюда видно, что наибольшее значение $|K_1 - iK_2|$ достигается при $g_n = a_{-1}$ и $g_n = b_0$, а при $n \rightarrow \infty$ КИН убывают как $1/n$.

Следовательно, в рамках силового критерия разрушения при достижении $|K_1 - iK_2|$ критической величины разрушение системы трещин начнется с левой вершины a_{-1} трещины L_{-1} и правой вершины b_0 трещины L_0 , причем одновременно и в одинаковой мере. Так как функции $\Phi_{1,2}(z)$ вне любой фиксированной малой окрестности линии L ограничены, то такая же картина имеет место и в рамках энергетического критерия разрушения.

Пример 2. Пусть плоскость ослаблена тонкими жесткими прямолинейными остроугольными включениями L_n , $n = 0, \pm 1, \dots$, а на бесконечности действуют заданные напряжения и вращение. Приложим к включениям L_n усилия так, чтобы выполнялись равенства (4.4), т.е. $P_n = 8\kappa^{-1}B_1\beta_n$, где B_1 и β_n находятся по формулам (1.7), (1.4) и (4.5) соответственно. Тогда для КИН снова справедливы равенства (4.6) и относительно устойчивости системы включений к разрушению имеет место ситуация, описанная в примере 1.

5. Одностороннее периодическое расположение микроповреждений в масштабе отображения $\zeta = 1/z$. Пусть повреждения расположены вдоль отрезков $L_n = [a_n, b_n]$, где $a_n^{-1} = (n + 1/2)T + a$, $b_n^{-1} = (n + 1/2)T - a$, $a < T/2$, $n = 0, 1, \dots$, т.е. они все расположены справа от точки сгущения $z = 0$ (фиг. 1,б) и их образы при отображении $\zeta = 1/z$ образуют периодическое множество с периодом T , расположенное только на положительной действительной полуоси.

В данном случае имеем [3]

$$X(z) = \sqrt{\Gamma(\eta + b)\Gamma(\eta - b) / \Gamma(\eta)}, \quad \eta = \frac{1}{2} - 1/(Tz), \quad b = a/T$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, а система (2.7) после преобразований, аналогичных преобразованиям, примененным к этой системе в разд. 4, примет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{nk} A_k = iH_n + \alpha(C_1 + \beta B_1)\gamma_{n,-1/2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (5.1)$$

$$\gamma_{nk} = \int_{-b}^b \frac{|\Gamma(x - n + b)\Gamma(x - n - b)|^{1/2}}{\Gamma(x - n)} \frac{dx}{n - k - x}, \quad b = \frac{a}{T}$$

$$\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{8a^2}{T(2n+1)(4a^2 - (2n+1)^2 T^2)} = \frac{1}{2T} \left[\Psi\left(\frac{1}{2} + b\right) + \Psi\left(\frac{1}{2} - b\right) - 2\Psi\left(\frac{1}{2}\right) \right]$$

$$\psi(z) = (\ln \Gamma(z))', \quad \alpha = \sqrt{\cos \pi b}$$

Постоянные C_1, B_1, H_n находятся по формулам (1.7), (1.4), (2.8), а для КИН справедлива формула

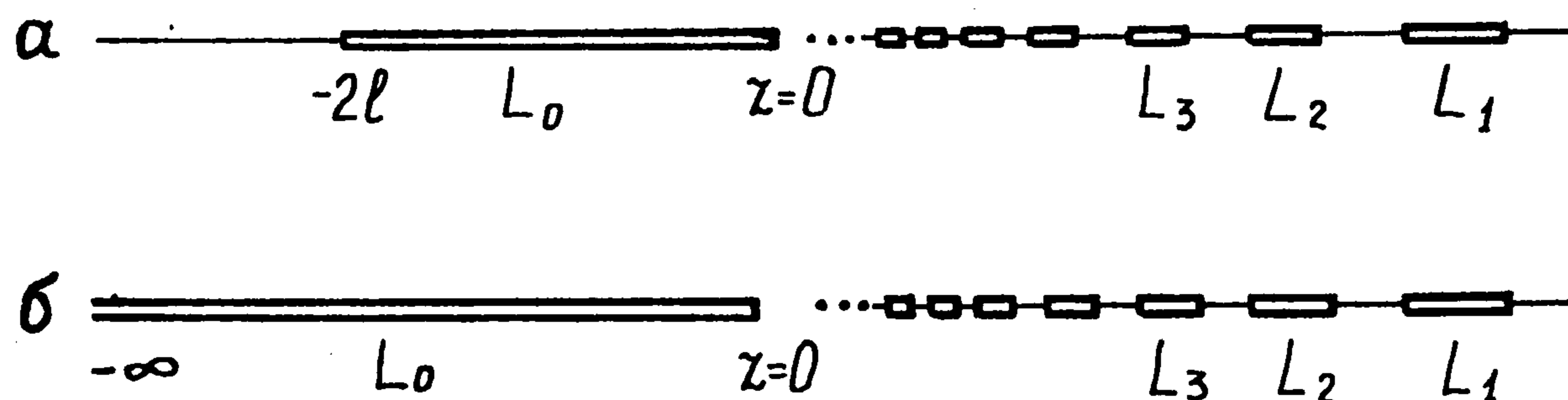
$$K_1(g_n) - iK_2(g_n) = |g_n| \Gamma(n + 1 \pm b) \left(\frac{T \operatorname{tg} \pi b}{n! \Gamma(n + 1 \pm 2b)} \right)^{1/2} (R(g_n) + Q(g_n) + B_1 \sqrt{\cos \pi b})$$

где верхний знак плюс относится к вершине $g_n = a_n$, а нижний знак минус – к вершине $g_n = b_n$. Однозначная разрешимость системы (5.1) была доказана в [3], однако полу-

чить решение системы в явной форме в данном случае не удалось. Найти ее решение можно методом редукции.

Относительно поведения напряжений и КИН в окрестности точки сгущения МиП справедливы все результаты и выводы разд. 4.

6. Взаимодействие макроповреждения с бесконечным рядом микроповреждений. Пусть плоскость ослаблена макроповреждением (МаП) $L_0 = [-2l, 0]$, $l > 0$, и МиП $L_n = [a_n, b_n]$, $a_n > 0$, $b_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$, сгущающимися в вершине $z = 0$ МаП (фиг. 2,а).



Фиг. 2

В этом случае все результаты разд. 2 остаются в силе, если во всех формулах положить $I = \{0; 1; \dots\}$, $a_0 = -2l$, $c_0 = -l$, а в формулах (2.2), (2.3), кроме того, считать $\sqrt{a_0 b_0} / c_0 = 1$. При этом решение системы (2.7) надо искать в классе таких последовательностей A_k , $k \in I$, что сумма $Q(z)$ ряда (2.5) при малых $z \notin U_\varepsilon(L)$ не превосходит по модулю выражения $M|z|^{-\lambda}$ при некотором $\lambda < 1/2$. Для КИН в вершинах МиП L_n , $n = 1, 2, \dots$ при учете сделанных выше оговорок также справедливы формулы (3.1), (3.2), а КИН в левой вершине $a_0 = -2l$ МаП находятся по формуле (3.1), где

$$\eta(a_0) = \alpha^{-1} \sqrt{\pi l} \prod_{n=1}^{\infty} (a_0 - c_n) / \sqrt{(a_0 - a_n)(a_0 - b_n)}$$

Для правой вершины $z = 0$ МаП, в окрестности которой содержится бесконечное множество МиП, определить КИН в общем случае невозможно, так как в общем случае для функций $\Phi_{1,2}(z)$ при малых $z \notin U_\varepsilon(L)$ известна лишь их оценка сверху, а точная асимптотика неизвестна. Тем не менее не исключены случаи, когда эти функции при $z \rightarrow 0$ имеют определенную асимптотику, например, имеют определенную асимптотику при $z \rightarrow 0$ по некоторым лучам. Тогда согласно (1.8), (2.2)–(2.6) при $z \rightarrow 0$ напряжения тоже будут иметь определенную асимптотику, содержащую параметры, которые можно принять за КИН.

Например, пусть при $z \rightarrow 0$ по мнимой оси функция $Q(z) \sim A(2\pi z)^{-\lambda}$, $0 \leq \lambda < 1/2$. Тогда эта же асимптотика имеет место при $z \rightarrow 0$ также по любому фиксированному лучу, расположенному в верхней или нижней полуплоскости. При этом функция $R(z)$, определяемая формулой (2.4), имеет предел $B = R(0)$ и

$$\Phi_1(z) \sim (K_1 - iK_2)(2\pi z)^{-\lambda - 1/2}, \quad K_1 - iK_2 = A\sqrt{\pi l}, \quad 0 < \lambda < 1/2 \quad (6.1)$$

$$\Phi_1(z) \sim (K_1 - iK_2)(2\pi z)^{-1/2}, \quad K_1 - iK_2 = (A + B + \alpha B_1)\sqrt{\pi l}, \quad \lambda = 0 \quad (6.2)$$

Ветви многозначных функций в плоскости с разрезом по отрицательной действительной полуоси берутся так, что на положительной действительной полуоси они принимают действительные положительные значения. Для функции $\Phi_2(z)$, определяемой формулой (2.6), при $z \rightarrow 0$ по указанным лучам справедлива оценка $|\Phi_2(z)| \leq M|z|^{-\lambda_0}$ при $0 < \lambda_0 < 1$ и $|\Phi_2(z)| \leq M \ln|z|^{-1}$ при $\lambda_0 = 0$, где λ_0 характеризует порядок роста исходных данных задачи вблизи точки $z = 0$.

Пусть $\lambda_0 < \lambda + 1/2$. Тогда согласно (1.8) асимптотика напряжений при $z \rightarrow 0$ полностью определяется представлениями (6.1), (6.2) и постоянные K_1, K_2 в этих представлениях естественно принять за КИН в вершине $z = 0$ МаП. При $\lambda = 0$ КИН в указанном смысле и КИН в классическом смысле [12, 13] совпадают. В случае $\lambda_0 \geq \lambda + 1/2$ асимптотика напряжений при $z \rightarrow 0$ зависит еще от характера поведения функции $\Phi_2(z)$ при $z \rightarrow 0$. В каждом случае надо проводить дополнительные исследования, на которых останавливаться не будем.

Если вблизи вершины $z = 0$ МаП имеет место асимптотика (6.1), то инвариантный Γ -интеграл Райса–Черепанова, вычисленный вдоль окружности малого радиуса r с центром в точке $z = 0$, при $r \rightarrow 0$ возрастает как $r^{-2\lambda}$. Это свидетельствует о неустойчивости рассматриваемой вершины МаП к разрушению в рамках энергетического критерия.

Если вблизи $z = 0$ имеет место асимптотика (6.2), то в случае $\lambda_0 \leq 1/2$ указанный Γ -интеграл при $r \rightarrow 0$ будет иметь конечный предел, от значения которого и будет зависеть устойчивость вершины МаП к разрушению. В случае $\lambda_0 > 1/2$ Γ -интеграл при $r \rightarrow 0$ может иметь как конечный, так и бесконечный предел. В каждом таком случае нужны дополнительные исследования.

Пусть МаП расположено вдоль луча $L_0 = (-\infty, 0]$ (фиг. 2,б) и заданные на его сторонах граничные условия убывают при $t \rightarrow \infty$ не медленнее, чем $M|t|^{-\lambda_0}$, $\lambda_0 > 1/2$. В данном случае все результаты разд. 2 также остаются в силе, если функции $X(z), R(z)$ заменить на функции

$$X_1(z) = X(z)/\sqrt{z}, \quad R_1(z) = R(z) + \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{p(t)}{X_1^+(t)} \frac{dt}{t-z}$$

и во всех формулах брать $I = \{1; 2; \dots\}$, $L = L_0 \cup L_1 \cup \dots$, а решение системы (2.7) искать в классе таких последовательностей $A_k, k \in I$, что сумма $Q(z)$ ряда (2.5) при малых $z \in U_\varepsilon(L)$ не превосходит по модулю выражения $M|z|^{-\lambda}$ при некотором $\lambda < 1/2$. При этом согласно (1.8) для нахождения постоянной B_2 в формуле (2.6) в случае первой задачи (т.е. при $\rho = 1$) надо задать на бесконечности значение гидростатического напряжения $(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty)/2$ и вращения ω^∞ , а в случае второй задачи ($\rho = -\kappa$) – значение $(\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty)/2$ или только σ_y^∞ и ω^∞ или τ_{xy}^∞ . Так как при больших z , расположенных вне любой фиксированной окрестности луча L_0 , функция $\Phi_1(z) \sim \alpha B_1 z^{-1/2}$, то для нахождения постоянной B_1 в формуле (2.2) надо задать не только значения указанных параметров при $z \rightarrow \infty$, но и их асимптотические представления с точностью до $|z|^{-1/2}$ включительно.

В данном случае для КИН в вершинах МиП также справедливы формулы (3.1), (3.2), если брать $I = \{1; 2; \dots\}$ и еще число $\eta(g_n)$ поделить на $\sqrt{g_n}$, а по вопросу о КИН в вершине $z = 0$ МаП вновь имеет место ситуация, описанная выше.

Рассмотренная выше модель упругой плоскости с бесконечным множеством МиП типа трещин или тонких жестких линейных включений, сгущающихся в конечной точке, может быть использована для изучения напряженного состояния вблизи точки, в малой окрестности которой имеется большое число МиП указанных типов, расположенных определенным образом и сильно "уплотненных" вблизи этой точки. В этом случае множество МиП, которое в реальности конечно, можно заменить бесконечным множеством МиП, располагая новые повреждения так, чтобы они с определенной точностью отражали порядок и характер расположения исходных повреждений. Можно использовать и другие модели, описывающие реальный объект. Например, окрестность точки с повреждениями можно заменить материалом без повреждений, однако

характеризуемым другими упругими постоянными. Для определения эффективных упругих постоянных нового материала также может быть использована описанная выше модель.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-01-00207).

ЛИТЕРАТУРА

1. Сильвестров В.В. Краевые задачи теории упругости для плоскости со счетным множеством разрезов // Изв. вузов. Математика. 1992. № 4. С. 61–69.
2. Сильвестров В.В. Эффективное решение основных квазипериодических задач теории упругости для плоскости с разрезами по прямой // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 3. С. 519–531.
3. Сильвестров В.В. Основные задачи теории упругости для плоскости с полубесконечной периодической системой разрезов // Исследования по краевым задачам и их приложениям. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 1992. С. 20–37.
4. Сильвестров В.В. Взаимодействие макротрещины с бесконечным рядом микротрещин // Физ.-хим. механика материалов. 1992. Т. 28. № 1. С. 119–122.
5. Назаров С.А. О показателе сингулярности напряжений для трещины при сцеплении участков ее берегов, сгущающихся к вершинам // Докл. АН АрмССР. 1981. Т. 73. № 1. С. 51–53.
6. Назаров С.А. Напряженно-деформированное состояние в точке сгущения коллинеарных микротрещин // Вестн. ЛГУ. Сер. математика, механика, астрономия, 1983. Т. 13. Вып. 3. С. 63–68.
7. Ромалис Н.Б., Тамуж В.П. Распределение магистральной трещины в теле с распределенными микротрещинами // Механика композит. материалов. 1984. № 1. С. 42–51.
8. Rubinstein A.A. Macrocrack interaction with semi-infinite microcrack array // Intern J. Fracture. 1985. V. 27. № 2. P. 113–119.
9. Kachanov M. On crack-microcrack interactions // Intern. J. Fracture. 1986. V. 30. № 4. P. R65–R72.
10. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
11. Сильвестров В.В. Об интеграле типа Коши и его аналогах в случае счетного множества отрезков // Известия АН Чувашской Республики. 1994. № 2. Вып. 1. С. 3–15.
12. Бережницкий Л.Т., Панасюк В.В., Стацук Н.Г. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле. Киев: Наук. думка. 1983. 288 с.
13. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев: Наук. думка, 1988. 619 с. Механика разрушения и прочность материалов. Т. 2.
14. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
15. Черепанов Г.П. Инвариантные Г-интегралы и некоторые их приложения в механике // ПММ. 1977. Т. 41. Вып. 3. С. 399–412.
16. Сильвестров В.В. Кусочно-однородная упругая плоскость со счетным множеством закрытых трещин // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 2. С. 133–140.
17. Гохберг И.Ц., Фельдман И.А. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М.: Наука, 1971. 352 с.
18. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. М.: Наука, 1978. 295 с.