

УДК 539.375

© 1995 г. А.Н. Галыбин

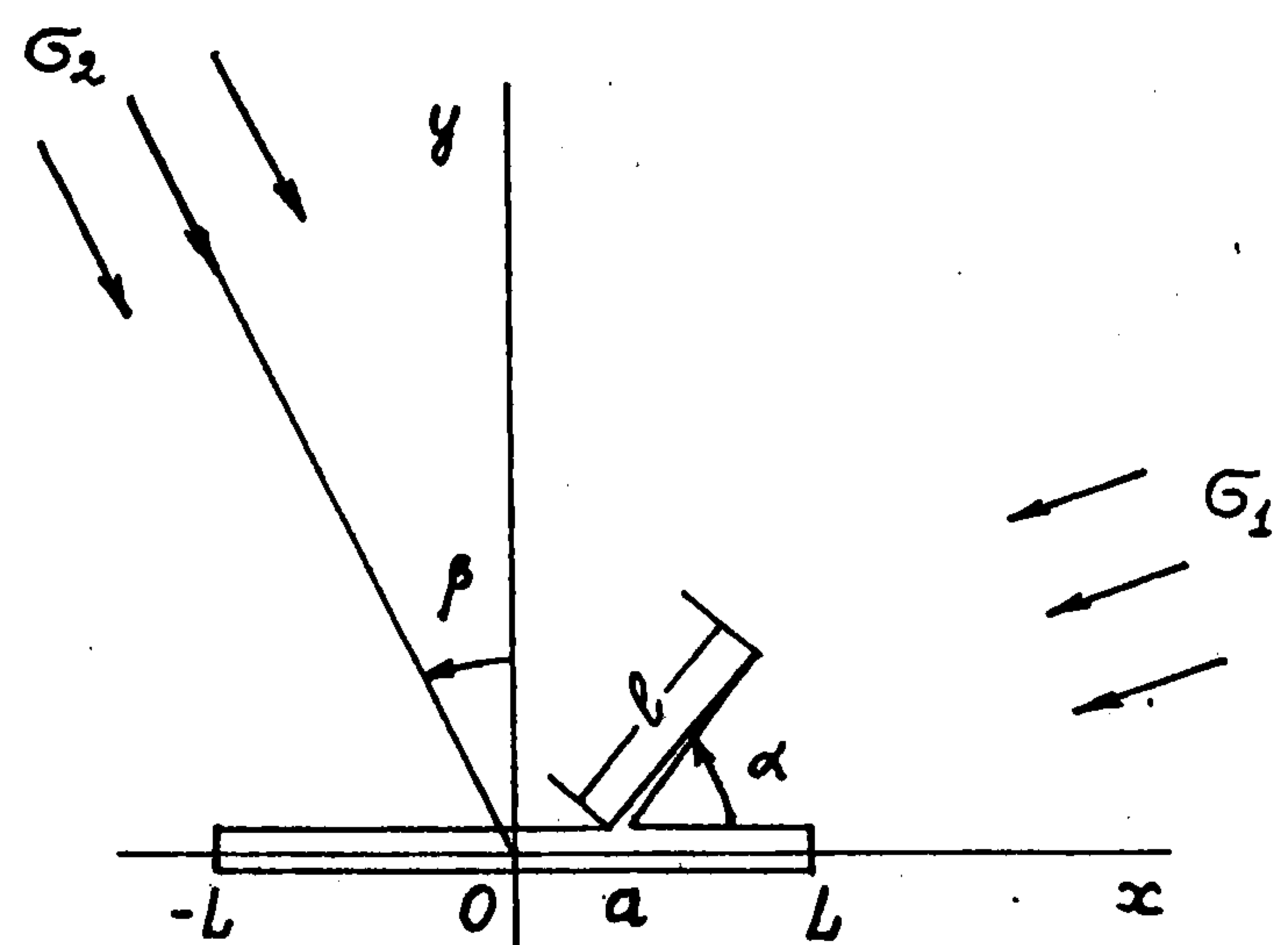
### РАЗВИТИЕ ТРЕЩИН ОТ ГРАНИЦЫ УЗКОЙ ПОЛОСТИ В ДВУХОСНОСЖАТОМ ТЕЛЕ

В качестве модели, описывающей развитие трещины от границы узкой полости, рассматривается задача о двухосном неравнокомпонентном сжатии плоскости с двумя прямолинейными разрезами. Задача сводится к сингулярному интегральному уравнению относительно плотности скачка смещений на одном из разрезов (трещине). Аналитическое решение уравнения строится с использованием метода малого параметра, характеризующего относительную длину и расположение разрезов, путем приведения к задаче сопряжения, возникающей после применения к интегральному уравнению преобразования Меллина. Получены выражения для коэффициентов интенсивности напряжений в вершине трещины для случаев сдвигового и отрывно-сдвигового разрушения. В рамках подхода Гриффитса-Ирвина определены углы ориентации трещины при которых ее рост неустойчив.

**1. Постановка задачи.** Пусть неограниченное линейно-упругое тело с узкой прямолинейной полостью (щелью), находится в условиях плоской деформации (или плоского напряженного состояния) при двухосном неравнокомпонентном сжатии на бесконечности, причем поверхности полости между собой не контактируют. Предполагается, что вдоль некоторых направлений материал обладает пониженными прочностными характеристиками на сдвиг или растяжение. Из-за концентрации напряжений вблизи щели от ее границы возможно развитие трещин вдоль одного из направлений ослабления. При этом рост трещины может быть неустойчивым, когда увеличение ее длины происходит динамически без изменения внешних нагрузок.

Рассматривается упругая плоскость, содержащая два прямолинейных разреза  $L_1\{z = a + lte^{i\alpha}, |\alpha| < L, 0 < t \leq 1, 0 < \alpha \leq \pi\}$ ,  $L_2\{|\operatorname{Re} z| < L, \operatorname{Im} z = 0\}$  где  $z = x + iy$  – точка комплексной плоскости,  $l$  – длина разреза  $L_1$ ,  $L$  – полудлина разреза  $L_2$ . Плоскость нагружена на бесконечности сжимающими напряжениями  $\sigma_1 = \lambda\sigma$ ,  $\sigma_2 = \sigma$  ( $\sigma < 0$ ,  $\lambda \geq 0$ ), действующими под углом  $\beta$  ( $0 \leq \beta < \pi/2$ ) к координатным осям  $x$  и  $y$  соответственно (фиг. 1). При переходе через разрезы нормальные и касательные напряжения непрерывны (и равны нулю на разрезе  $L_2$ ), а смещения терпят скачки.

Соответствующая система из четырех вещественных сингулярных интегральных уравнений задачи относительно плотности неизвестных скачков смещений на разрезах может быть выписана непосредственно (как это сделано, например, для ломаных трещин [1]) на основании интегральных



Фиг 1

представлений для комплексных потенциалов через скачки смещений и использования формул Колосова [2] при задании граничных условий (в напряжениях) на разрезе  $L_1$ . Для редукции системы воспользуемся суперпозицией двух вспомогательных задач. Задача А – плоскость с разрезом  $L_2$  вдоль которого реализован произвольный скачок смещений и заданными напряжениями на бесконечности. Задача В – плоскость с нулевыми условиями на бесконечности с разрезом  $L_2$ , на котором заданы нормальные и касательные напряжения, взятые с обратным знаком из задачи А.

Комплексные потенциалы, соответствующие задаче А имеют вид [1]

$$\begin{aligned}\Phi_A(z) &= \sigma \frac{1+\lambda}{4} + \frac{1}{2\pi} \int_{L_2} \frac{g(t) dt}{t-z} \\ \Psi_A(z) &= \sigma \frac{\lambda-1}{2} e^{-2i\beta} + \frac{1}{2\pi} \int_{L_2} \frac{\overline{g(t)} \overline{dt}}{t-z} - \frac{\bar{t} g(t) dt}{(t-z)^2}\end{aligned}\quad (1.1)$$

$$g(t) = \frac{2\mu}{1+\kappa} \frac{d}{dt} [v(t) - iu(t)] e^{i\alpha}$$

Здесь  $g(t)$  – функция, пропорциональная плотности скачка смещений на разрезе  $L_1$ ,  $\mu$  – модуль сдвига,  $\kappa = 3 - 4\nu$  для плоской деформации,  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  для плоского напряженного состояния,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $v(t)$ ,  $u(t)$  – нормальная и тангенциальная компоненты вектора смещений, квадратные скобки означают величины при переходе через контур.

Комплексные потенциалы в задаче В при учете условия однозначности смещений при обходе составного контура  $L_1 + L_2$  на основании известного решения для произвольно нагруженного разреза [2], после вычисления соответствующих интегралов принимают вид

$$\begin{aligned}\Phi_B(z) &= \frac{1}{4\pi} \int_{L_2} (E_1(z, t) g(t) dt - E_2(z, \bar{t}) \overline{g(t)} dt) - \frac{p_0}{2} R(z) \\ \Psi_B(z) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{L_2} ((E_1(z, t) + E_2(z, \bar{t})) g(t) dt - (E_1(z, t) - E_2(z, \bar{t})) \overline{g(t)} dt) - \\ &- z \Phi'_B(z) + \frac{p_0 - \bar{p}_0}{2} R(z)\end{aligned}\quad (1.2)$$

$$E_1(z, t) = E(z, t) + E(z, \bar{t}), \quad E_2(z, t) = (t - \bar{t}) \frac{\partial E(z, t)}{\partial t}$$

$$E(z, t) = \frac{\sqrt{z^2 - L^2} - \sqrt{t^2 - L^2}}{\sqrt{z^2 - L^2} (z - t)}, \quad R(z) = 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 - L^2}}$$

$$p_0 = \frac{\sigma}{2} (1 + \lambda + (\lambda - 1) e^{2i\beta})$$

Суммарные потенциалы задач А и В удовлетворяют граничным условиям на бесконечности и на разрезе  $L_2$  для произвольного скачка смещений на разрезе  $L_1$ , распределение которого должно находиться из соответствующего уравнения, которое следует из граничных условий на  $L_2$ .

Рассмотрим случай трещины малой длины по отношению к длине полости. Полагая  $z = a + l\xi e^{i\alpha}$ ,  $t = a + l\eta e^{i\alpha}$  ( $0 \leq \xi, \eta \leq 1$ ) и разлагая (1.2) в ряд по малому параметру

$$\varepsilon = 2lL/(L^2 - a^2)\quad (1.3)$$

найдем соотношение между нормальными  $N$  и касательными  $T$  напряжениями и скачком смещений на линии разреза  $L_1$

$$\frac{1}{\pi_0} \int_0^1 \left( M_1 \left( \frac{\xi}{\eta} \right) g(\eta) + M_2 \left( \frac{\xi}{\eta} \right) \overline{g(\eta)} \right) \frac{d\eta}{\eta} + \varepsilon^2 C + P_0(\xi) = N(\xi) + iT(\xi)$$

$$M_1 \left( \frac{\xi}{\eta} \right) = 2e^{i\alpha} \sin \alpha \left( \operatorname{Im} M \left( \frac{\xi}{\eta} \right) - \xi \operatorname{Im} M^2 \left( \frac{\xi}{\eta} \right) \right)$$

$$M_2 \left( \frac{\xi}{\eta} \right) = \frac{\eta}{\eta - \xi} + \operatorname{Re} M \left( \frac{\xi}{\eta} \right) - 2 \sin^2 \alpha \left( M \left( \frac{\xi}{\eta} \right) - 3\xi M^2 \left( \frac{\xi}{\eta} \right) + 2\xi^2 M^3 \left( \frac{\xi}{\eta} \right) \right) \quad (1.4)$$

$$M(\xi) = (\xi - e^{-2i\alpha})^{-1}, \quad C = \frac{-ie^{i\alpha} \sin^2 \alpha}{2\pi} \int_0^1 (\sin \alpha \operatorname{Re} g(\eta) + \cos \alpha \operatorname{Im} g(\eta)) \eta d\eta$$

$$P_0(\xi) = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} p_0 R(\xi) + \frac{1}{2} (p_0 - \overline{p_0}) R(\xi) - ip_0 \xi \sin \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} R(\xi)$$

Непосредственно из (1.4) вытекает асимптотика напряжений вблизи разреза  $L_2$ . Полагая  $g(\eta) \equiv 0$ , найдем

$$\left\| \begin{array}{l} \sigma_\alpha(\xi) \\ \tau_{\rho\alpha}(\xi) \end{array} \right\| = \frac{\sigma_2 \sin \alpha}{\sin \gamma} ((1 - \lambda) \sin(2\beta - \gamma) I + \varepsilon \xi D) \left\| \begin{array}{l} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{array} \right\| \quad (1.5)$$

$$\cos \gamma = \frac{a}{L}, \quad D = b(\alpha, \beta) I + b(0, \beta) \left\| \begin{array}{cc} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{array} \right\|$$

$$b(\alpha, \beta) = \frac{1 + \lambda}{2} \sin \alpha + \frac{1 - \lambda}{2} \sin(\alpha + 2\beta)$$

где  $I$  – единичная матрица.

Элементарный анализ соотношения (1.5) показывает, что при  $(1 - \lambda) > 0$  ( $(1 - \lambda) < 0$ ) часть верхней границы разреза  $L_2$ :  $-L < a < L \cos 2\beta$  находится в условиях растяжения (сжатия), а другая часть  $L \cos 2\beta < a < L$  в условиях сжатия (растяжения). Для нижнего берега разреза картина кососимметрична.

В зонах растяжения от границы разреза вдоль линии ослабления возможно развитие трещин, сопровождающееся их раскрытием и сдвигом (отрывно-сдвиговое разрушение), в зонах сжатия возможно развитие сдвиговых трещин (сдвиговое разрушение), соответственно граничные условия на разрезе  $L_1$  приобретают вид:

для отрывно-сдвигового разрушения

$$N(\xi) + iT(\xi) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (1.6)$$

для сдвигового разрушения

$$|T(\xi)| = -\operatorname{tg} \rho N(\xi), \quad N(\xi) < 0, \quad \operatorname{Re} g = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (1.7)$$

Последнее условие может быть выполнено только для углов  $\alpha$ , удовлетворяющих неравенствам

$$0 < \alpha < \pi/2 - \rho, \quad \pi/2 + \rho < \alpha < \pi \quad (1.8)$$

При гидростатическом сжатии на бесконечности зоны растяжения отсутствуют, но образование сдвиговых трещин по условию (1.7) возможно в точках, удаленных от границы разреза с такими же ограничениями на угол  $\alpha$ .

В случае  $\beta = 0$  (разрез ориентирован по направлению действия  $\sigma_1$ ) вся граница находится в условиях либо растяжения (при  $|\sigma_2| > |\sigma_1|$ ) либо (при  $|\sigma_2| < |\sigma_1|$ ) сжатия, условия (1.6) или (1.7) для развития трещин сохраняются.

Максимум растягивающих напряжений достигается при  $\alpha = \pi/2$ , максимум  $|\Gamma| + \operatorname{tg} \rho N$  — при  $\alpha = \pi/4 - \rho/2$ ,  $\alpha = 3\pi/4 + \rho/2$ , поэтому в отсутствие линий ослабления развитие трещин вдоль этих направлений кажется наиболее вероятным.

**2. Задача сопряжения.** Применение преобразования Меллина к интегральному соотношению (1.4) приводит к функциональному соотношению между изображениями напряжений и скачками смещений на линии разреза  $L_1$ , имеющему место в полосе комплексного параметра преобразования  $s$ ,  $\delta < \operatorname{Re} s \leq 0$  ( $\delta < 0$ ):

$$-\operatorname{tg} \frac{s\pi}{2} G(s) V^-(s) = V^+(s) + F^-(s) \quad (2.1)$$

$$G(s) = \frac{\lambda_1(s) + \lambda_2(s)}{2} I - \frac{\lambda_1(s) - \lambda_2(s)}{2} B \quad (2.2)$$

$$\lambda_{1,2}(s) = (h \pm s \sin \alpha \sin s(\pi - 2\alpha) \sqrt{f}) \sin^{-2}(s\pi/2)$$

$$h = \sin s\alpha \sin s(\pi - \alpha) - s^2 \sin^2 \alpha \cos s(\pi - 2\alpha), \quad f = -\det B = 1 - s^2 \sin^2 \alpha$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{f}} \begin{vmatrix} \cos \alpha & (1-s) \sin \alpha \\ (1+s) \sin \alpha & -\cos \alpha \end{vmatrix}$$

$$V^-(s) = \int_0^1 \begin{vmatrix} \operatorname{Re} g(x) \\ -\operatorname{Im} g(x) \end{vmatrix} x^s dx, \quad V^+(s) = \int_1^\infty \begin{vmatrix} \sigma_\alpha(x) \\ \tau_{p\alpha}(x) \end{vmatrix} x^s dx$$

$$F^-(s) = -\frac{\sigma \sin \alpha}{\sin \gamma} \left( \frac{1-\lambda}{1+s} \sin(2\beta - \gamma) I + \frac{\varepsilon}{2+s} D \right) \begin{vmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{vmatrix} -$$

$$-\frac{\varepsilon^2 \sin^2 \alpha}{1+s} \begin{vmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{vmatrix} \|\sin \alpha, \cos \alpha\| V^-(1).$$

Здесь  $G$  —  $(2 \times 2)$ -матрица,  $\lambda_{1,2}(s)$  — ее собственные числа,  $V^\pm$  и  $F^-$  —  $(2 \times 1)$ -матрицы.

В случае отрывно-сдвигового разрушения берега разреза  $L_1$  свободны от напряжений (граничные условия (1.6)) и соотношение (3.1) является задачей сопряжения для двух пар функций  $V^\pm(s)$  аналитических в областях  $\operatorname{Re} s \leq 0$ ,  $\operatorname{Re} s \geq 0$ . В случае сдвигового разрушения, когда на  $L_1$  выполняются граничные условия (1.7), умножение (2.1) слева на строку  $(\operatorname{tg} \rho, -1)$  при учете  $\operatorname{Re} g \equiv 0$  приводит к одномерной задаче сопряжения, которая сохраняет вид (2.1), но ее коэффициент  $G(s)$ , искомые функции  $V^\pm(s)$  и свободный член  $F^-(s)$  приобретают вид

$$G(s) = (h + s \sin \alpha \sin s(\pi - 2\alpha) (\cos \alpha - (1-s) \operatorname{tg} \rho \sin \alpha)) \sin^{-2}(s\pi/2)$$

$$V^-(s) = -\int_1^\infty \operatorname{Im} g(x) x^s dx, \quad V^+(s) = \int_0^1 (\tau_{p\alpha}(x) - \operatorname{tg} \rho \sigma_\alpha(x)) x^s dx \quad (2.3)$$

$$F^-(s) = \frac{-\sigma \sin \alpha \cos(\alpha - \rho)}{\sin \gamma \cos \rho} \left( \frac{1-\lambda}{1+s} \sin(2\beta - \gamma) + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon}{2(2+s)} ((1+\lambda) \sin \alpha + (1-\lambda)(\sin(\alpha + 2\beta) + \frac{\sin 2\beta \cos(2\alpha - \rho)}{\cos(\alpha - \beta)}) \right) -$$

$$-\frac{\varepsilon^2 \sin^2 \alpha \cos(\alpha - \rho)}{2\pi(1+s) \cos \rho} \cos \alpha V^-(1)$$

При  $\varepsilon = 0$  краевые задачи (2.1), (2.2) и (2.1), (2.3) совпадают с рассмотренными [3] и [4] соответственно. После факторизации коэффициентов  $\operatorname{tg}(s\pi/2) = 2K^+(s)K^-(s)/s$ ,  $G(s) = G^+(s)(G^-(s))^{-1}$  в обоих случаях решение может быть представлено в виде (в качестве линии сопряжения выбрана мнимая ось)

$$V^-(s) = -\frac{2K^-(s)}{s} G^-(s)(H - \phi^-(s)), \quad V^+(s) = \frac{1}{K^+(s)} (G^+(s))^{-1} (H - \phi^+(s))$$

$$K^\pm(s) = \Gamma(1 \mp s/2) / \Gamma(1/2 \mp s/2)$$

$$\phi^\pm(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\phi(t)}{t-s} dt, \quad \phi(t) = K^+(t)(G^+(t))^{-1} F^-(t) \quad (2.4)$$

$$H = Q \left\| \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \end{matrix} \right\| \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad Q - \lim_{s \rightarrow \infty} G^+(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} (G^-(s))^{-1}$$

$k_1, k_2$  – коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) в вершине разреза  $L_1$ .

Поскольку  $V^-(0)$  – раскрытие трещины в точке выхода на границу полости, то (физическое) требование ограниченности этой величины ( $C = \phi(0)$ ) приводит к выражению для КИН

$$\left\| \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \end{matrix} \right\| \frac{2}{\sqrt{\pi}} Q^{-1} \phi^-(0) \quad (2.5)$$

через краевое значение функции  $\phi^-(0)$ , которое может быть вычислено по теореме о вычетах

$$\phi^-(0) = -\operatorname{res}\phi(-1) - \frac{1}{2} \operatorname{res}\phi(-2), \quad \operatorname{res}\phi(-k) = \lim_{t \rightarrow -k} (t+k)\phi(t), \quad k = 1, 2$$

Неизвестная постоянная  $V^-(1)$  определяется из решения, для чего необходимо положить  $s = 1$ , что приводит к линейному уравнению

$$V^-(1) = 2sK^-(1)G^-(1)(\phi^-(1) - \phi^-(0)) \quad (2.6)$$

В задаче (2.1), (2.2) факторизация матрицы  $G(s)$  ищется в виде [3]

$$G^\pm(s) = \Delta^\pm(\operatorname{ch}(\sqrt{f}\gamma^\pm)I - \operatorname{sh}(\sqrt{f}\gamma^\pm)B) \quad (2.7)$$

$$\Delta^\pm(s) = \exp\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln \sqrt{\Delta(t)}}{t-s} dt\right], \quad \gamma^\pm(s) = \exp\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\gamma(t)}{\sqrt{f(t)}(t-s)} dt\right]$$

где  $\Delta(s) = \lambda_1(s)\lambda_2(s)$ ,  $\gamma(s) = \frac{1}{2} \ln(\lambda_1(s)/\lambda_2(s))$  – соответственно определитель и показатель матрицы  $G(s)$ .

При учете четности вещественных функций  $\Delta(it)$ ,  $\gamma(it)$  на линии сопряжения, функции  $\Delta^\pm(s)$ ,  $\gamma^\pm(s)$  на действительной оси запишем в виде

$$\Delta^+(-k) = (\Delta^-(k))^{-1} = \exp\left[\frac{k}{\pi} \int_0^\infty \frac{\ln \sqrt{\Delta(it)}}{t^2 - k^2} dt\right] \quad (2.8)$$

$$\gamma^+(-k) = -\gamma^-(-k) = \exp\left[\frac{k}{\pi} \int_0^\infty \frac{\gamma(it)}{\sqrt{f(it)}(t^2 + k^2)} dt\right]$$

Коэффициент задачи сопряжения (2.1), (2.3) не имеет нулей и полюсов на мнимой оси и стремится к единице на бесконечности, что позволяет выполнить его факторизацию в виде [4]

$$G^{\pm}(s) = \exp \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\ln G(t)}{t-s} dt \right]$$

Разделяя действительную и мнимую части подынтегральной функции на линии сопряжения, при учете четности модуля ( $|G|$ ) и нечетности аргумента ( $\arg G$ ), для значений функций  $G^+(s)$  на отрицательной части действительной оси имеем

$$G^+(-k) = \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k \ln |G(it)| + t \arg G(it)}{k^2 + t^2} dt \right] \quad (2.9)$$

**3. Неустойчивый рост трещин.** Поскольку при движении трещины сумма квадратов КИН пропорциональна плотности энергии, выделяемой при разрушении материала (см., например, [5]), то в качестве условия, определяющего развитие трещины, можно принять

$$|k_1 + ik_2| = k_c \quad (3.1)$$

здесь  $k_c$  – постоянная материала, характеризующая его трещиностойкость. Из полученного выше решения вытекают асимптотические представления для КИН

$$k_j = k_{0j} + \varepsilon k_{1j} + \varepsilon^2 k_{2j} + \dots, \quad j = 1, 2 \quad (3.2)$$

в которых функции  $k_{mj}$  не зависят от  $\varepsilon$ .

Для малых длин трещин начало движения трещины определяется величинами первых членов асимптотики, при этом возможен как устойчивый так и неустойчивый (динамический) рост трещины. Далее будем считать (исходя из статического решения), что неустойчивость возникает, когда с увеличением длины трещины левая часть равенства (3.1) возрастает, в противном случае рост трещины устойчив. Пренебрегая в (3.2) членами имеющими порядок малости выше первого, представим условие неустойчивого роста в виде

$$\|k_{01}, k_{02}\| \begin{vmatrix} k_{11} \\ k_{12} \end{vmatrix} > 0. \quad (3.3)$$

КИН в случае отрывно-сдвигового разрушения на основании формул (2.2), (2.4)–(2.8) преобразуют вид

$$\begin{vmatrix} k_1 \\ k_2 \end{vmatrix} = \frac{\sigma \sin \alpha}{\sin \gamma} \begin{pmatrix} (1-\lambda) \sin(2\beta - \gamma) G_1 + \frac{\varepsilon}{\pi} G_2 D \\ -\cos \alpha \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

при  $((1-\lambda) \sin(2\beta - \gamma) < 0$ . Здесь  $G_n = Q^{-1}(G^+(-n))^{-1}$  – матрицы, соответствующие безразмерным КИН ( $k_j / \sqrt{l}$ ) в случае, когда на трещине заданы постоянная ( $n = 1$ ) и линейная нагрузки ( $n = 2$ ). Элементы матриц  $G_n$  приведены ниже в зависимости от углов  $\alpha$

$\alpha$	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
$\{G_1\}_{1,1}$	5,237	2,339	1,593	1,292	1,160	1,122
$\{G_1\}_{1,2}$	0,477	0,282	0,184	0,113	0,054	0
$\{G_1\}_{2,1}$	3,105	1,041	0,507	0,266	0,117	0
$\{G_1\}_{2,2}$	1,737	1,377	1,236	1,166	1,132	1,122
$\{G_2\}_{1,1}$	4,369	2,278	1,724	1,496	1,395	1,365
$\{G_2\}_{1,2}$	0,440	0,252	0,161	0,098	0,047	0
$\{G_2\}_{2,1}$	2,064	0,694	0,340	0,179	0,079	0
$\{G_2\}_{2,2}$	1,923	1,591	1,465	1,404	1,375	1,365

В случае  $\alpha > \pi/2$  элементы матриц  $G_n$  отличаются множителем  $(-1)^{k+l}$  и соответствуют углам  $\alpha = \pi - \alpha$ .

Условие (3.3) не выполняется при  $\beta = 0$  и  $\beta = \pi/2$  для всех значений  $\lambda, \alpha$  из рассматриваемого диапазона их изменения ( $\lambda \geq 0, 0 < \alpha < \pi$ ). Как показывают расчеты, для углов  $\alpha$ , близких к  $\pi/2$ , (3.3) также не выполняется, т.е. возможен лишь устойчивый рост трещины перпендикулярно границе полости.

На фиг. 2 представлены области значений параметров  $\alpha, \beta, \rho$ , при которых развитие отрывно-сдвиговых трещин неустойчиво. При  $\lambda > 1$  ( $\lambda < 1$ ) неравенство (3.3) выполнено для всех точек с координатами  $\alpha, \beta$ , лежащих выше (ниже) кривой, отмеченной значением параметра  $\lambda$ . Кривые, соответствующие значениям  $\lambda$  и  $\lambda^{-1}$ , кососимметричны относительно осей  $\alpha = \pi/2, \beta = \pi/4$ .

Для сдвигового разрушения на основании (2.3)–(2.6), (2.9) имеем

$$k_2 = \frac{-\sigma \sin \alpha \cos(\alpha + \rho)}{\sin \gamma \cos \rho} \left( (1 - \lambda) \sin(2\beta - \gamma) G^+(-1) + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon}{\pi} G^+(-2) \left( (1 + \lambda) \sin \alpha + (1 - \lambda) (\sin(\alpha + 2\beta) + \frac{\sin 2\beta \cos(\rho + 2\alpha)}{\cos(\alpha + \rho)}) \right) \right) \quad (3.5)$$

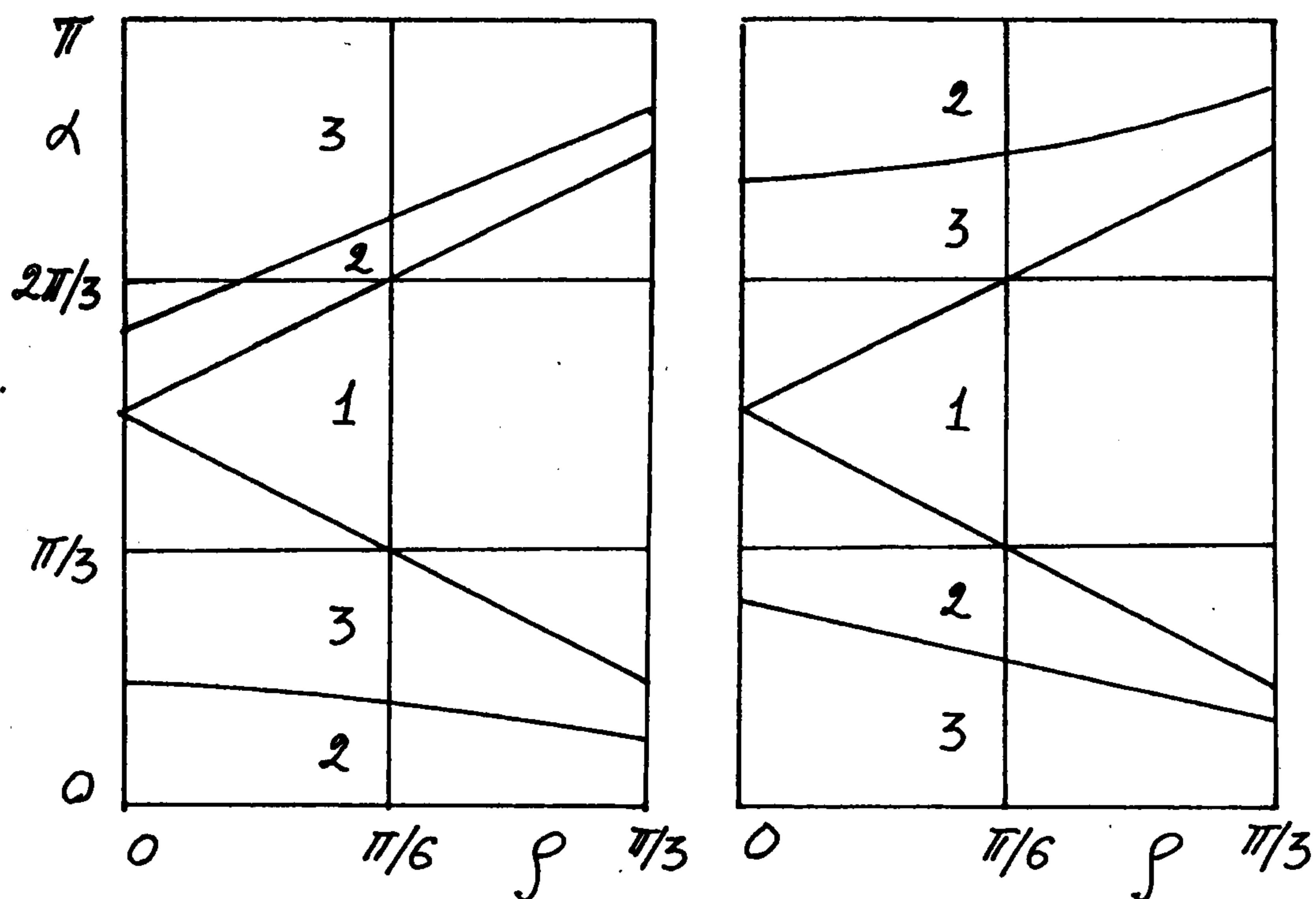
при  $0 < \alpha \leq \pi/2 - \rho, (1 - \lambda) \sin(2\beta - \gamma) > 0$ .

При  $\pi/2 + \rho \leq \alpha < \pi$  в выражении (3.5) следует изменить знак и положить  $\rho = -\rho$ . Значения функций  $G^{+1}(-1)$  и  $G^{+1}(-2)$  в зависимости от  $\alpha, \rho$  приведены в таблице

$\alpha$	$(G^+(-1))^{-1}$				$(G^+(-1))^{-2}$			
	$\rho = 0$	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/3$	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/3$
$\pi/12$	1,221	1,196	1,166	1,048	1,117	1,100	1,079	0,992
$\pi/6$	1,132	1,134	1,136	1,135	1,068	1,072	1,076	1,085
$\pi/4$	1,121	1,139	1,161		1,068	1,082	1,099	
$\pi/3$	1,121	1,142	1,170		1,072	1,087	1,106	
$5\pi/12$	1,121	1,135			1,073	1,082		
$\pi/2$	1,121				1,073			

Рост сдвиговой трещины по условию (3.3) неустойчив когда оба слагаемых (3.5) имеют одинаковый знак. На фиг. 3 показаны области значений параметров  $\rho, \alpha$  для двух значений  $\lambda, \beta$ , при которых рост трещин невозможен (1) (вследствие условия (1.8)), устойчив (2) и неустойчив (3). Как показывают расчеты, при других значениях  $\lambda, \beta$  ( $\beta \neq 0$ ) картина остается качественно аналогичной.

При  $\beta = 0, \lambda > 1$  рост сдвиговых трещин неустойчив для всех углов  $\alpha$ , удовлетворяющих условию (1.8). Рассматривалось [6] распространение сдвиговых трещин от конца щели, моделирующей горную выработку, в случае  $\beta = 0$  был также определен диапазон углов между трещиной и щелью, при которых трещина растет неустойчиво.



Фиг 3

Интересно отметить, что направления у конца выработки, вдоль которых сдвиговые трещины не могли развиваться неустойчиво, при продвижении выработки могут стать направлениями, вдоль которых трещины должны расти неустойчиво, что несколько расширяет диапазон “опасных” взаимориентаций геологических нарушений и выработки, указанный в [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-05-9395).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Саврук П.М. Двумерные задачи теории упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 323с.
2. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707с.
3. Храпов А.А. Некоторые случаи упругого равновесия бесконечного клина с несимметричным надрезом в вершине под действием сосредоточенных сил // ПММ. 1971. Т. 35. Вып. 4. С. 677–689.
4. Черепанов Г.П. Равновесие откоса с тектонической трещиной // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 136–151.
5. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1973. 584с.
6. Галыбин А.Н., Одинцев В.Н. Образование протяженных сдвиговых трещин при разработке глубоких жильных месторождений // Физ.-техн. пробл. разработки полез. ископаемых. 1991. N 5. С. 87–93.

Москва

Поступила в редакцию  
17.V.1994