

УДК 539.3

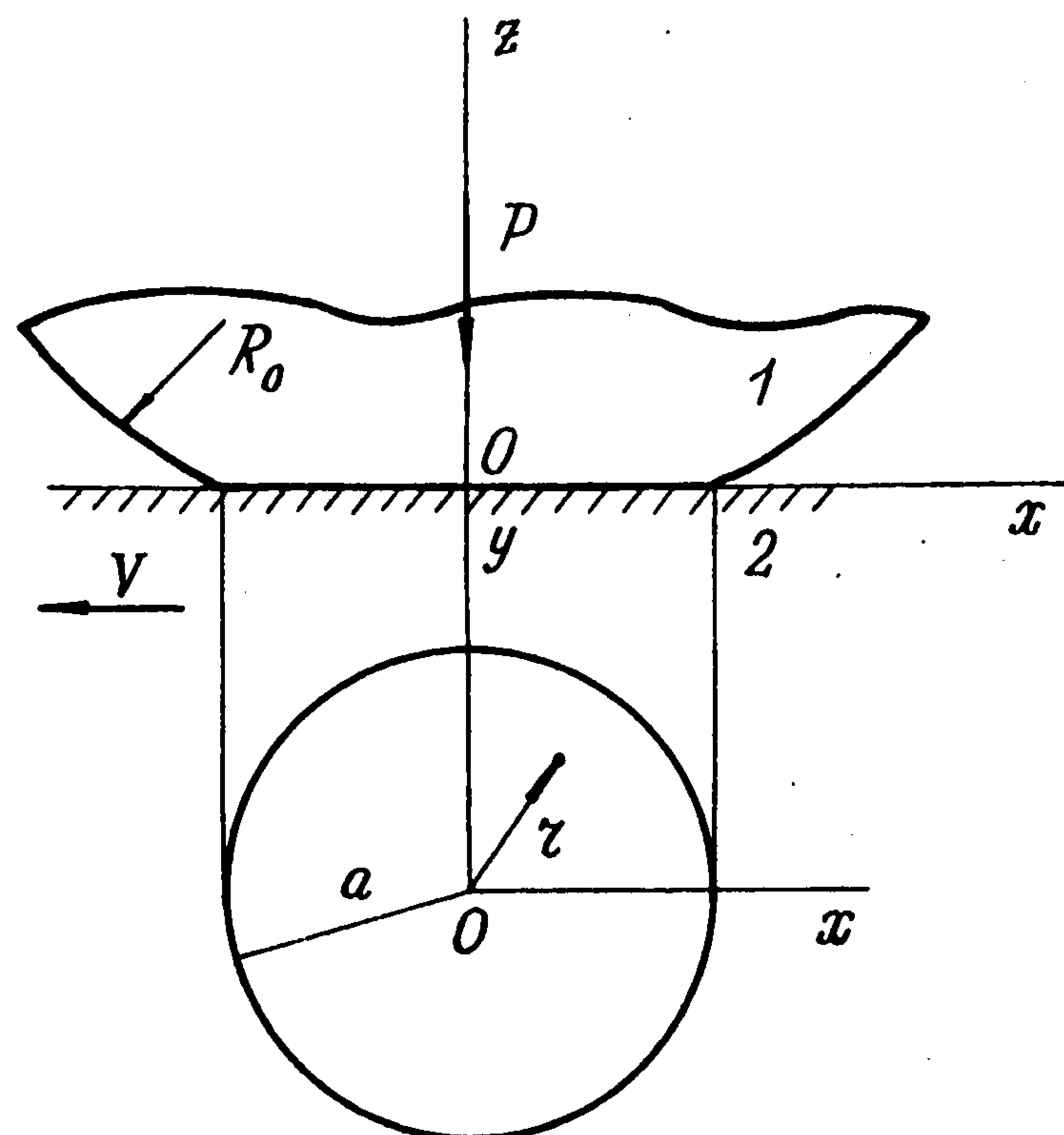
© 1995 г. А.А. Евтушенко, Е.В. Коваленко

О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ФРИКЦИОННОГО ТЕПЛОБРАЗОВАНИЯ И ИЗНОСА НА НЕСТАЦИОНАРНОМ КОНТАКТЕ СКОЛЬЖЕНИЯ

В предположении квадратичного изменения нормальных перемещений по радиальной координате получено решение осесимметричной контактной задачи для полупространства при учете нестационарного тепловыделения от трения и износа. Задача сведена к нелинейному интегральному уравнению Вольтерры относительно безразмерного радиуса площадки контакта. Построены асимптотические решения этого уравнения при малых и больших значениях времени, а также разработан численный алгоритм его исследования в общем случае. Предложенные математические методы позволили изучить влияние на размеры области контакта двух противоположных по характеру процессов – фрикционного теплообразования и износа.

Ранее [1, 2] исследовалось взаимодействие фрикционного теплообразования и износа при установившемся тепловом режиме на контакте. Рассматривалось [3] нестационарное тепловыделение с учетом изнашивания контактирующих поверхностей в плоской постановке. Ниже разработан алгоритм решения соответствующей осесимметричной контактной задачи.

1. Пусть упругое (μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона) осесимметричное массивное тело (упругий штамп) прижимается силой P и скользит с достаточно малой для пренебрежения инерционными эффектами скоростью V по поверхности жесткого полупространства в направлении оси x (фиг. 1). При этом происходит износ основания штампа, сопровождающийся тепловыделением от трения в области контакта. Считаем, что поверхность первого тела теплопроводна, а второе тело является жестким теплоизолятором. Все рассуждения далее будем вести в системе координат x, y, z , связанной со штампом, причем при решении задачи рассматривать его в сечении как полуплоскость, граница которой слегка искривлена (R_0 – радиус кривизны).



Фиг 1

Отправляясь от уравнений несвязной термоупругости, выпишем условие контакта взаимодействующих тел

$$u_z^e + u_z^T + u_z^w = \Delta(t) - r^2 / (2R_0) \quad (r \leq a(t), t \geq 0) \tag{1.1}$$

Здесь $u_z^e(r, t)$ – упругие перемещения граничных точек штампа в направлении оси z , $u_z^T(r, t)$ – нормальные температурные перемещения, $u_z^w(r, t)$ – вертикальные перемещения вследствие износа, $\Delta(t)$ – сближение тел 1 и 2 как жестких целых. Предполагается, что u_z^T , u_z^w и Δ соизмеримы с u_z^e и поэтому возможен принятый в линейной теории упругости снос граничных условий на недеформированные поверхности контактирующих тел, т.е. соотношение (1.1) имеет место при $z = 0$.

В начальный момент времени функция u_z^e и контактное давление $p(r, t)$ в приближении теории Герца даются формулами [4] ($r \leq a(0)$)

$$u_z^e = \frac{3P[2a^2(0) - r^2]}{16\theta a^3(0)}, \quad p = \frac{3P\sqrt{a^2(0) - r^2}}{2\pi a^3(0)}, \quad \theta = \frac{\mu}{1 - \nu} \quad (1.2)$$

Первое равенство (1.2) получено в предположении, что перемещение u_z^e от действия нормальных напряжений значительно больше такового, вызванного касательными усилиями. Оценка погрешности этого факта дана, например, в [5].

Сумму температурных перемещений поверхности штампа вследствие нагрева тепловым потоком

$$q(r, t) = fVp(r, t) \quad (r \leq a(t), t \geq 0) \quad (1.3)$$

(f – коэффициент трения скольжения) и ее нормальных перемещений, обусловленных износом, аппроксимируем в каждый момент времени $t \geq 0$ квадратичной зависимостью

$$u_z^T(r, t) + u_z^w(r, t) = C_0(t) + C_2(t)r^2 \quad (r \leq a(t)) \quad (1.4)$$

Тогда при учете (1.4), граничное условие (1.1) запишем

$$u_z^e(r, t) = D_0(t) - D_2(t)r^2 \quad (r \leq a(t))$$

$$D_0(t) = \Delta(t) - C_0(t), \quad D_2(t) = C_2(t) + (2R_0)^{-1} \quad (1.5)$$

$$C_j(0) = 0 \quad (j = 0, 2)$$

и, следовательно, при нахождении $u_z^e(r, t)$ и $p(r, t)$ ($t > 0$) можно воспользоваться формулами Герца. Отсюда, из сравнения коэффициентов при r^2 в выражениях (1.2) и (1.5), имеем

$$D_2(t) = 3P[16\theta a^3(t)]^{-1} \quad (t \geq 0) \quad (1.6)$$

Внося во второе равенство (1.2) величину радиуса площадки контакта $a(t)$ из (1.6), получим

$$p(r, t) = 8\pi^{-1}\theta D_2(t)\sqrt{a^2(t) - r^2} \quad (r \leq a(t), t \geq 0) \quad (1.7)$$

Таким образом, из соотношений (1.3), (1.6) и (1.7) вытекает, что для определения контактного давления $p(r, t)$, фрикционного теплового потока $q(r, t)$ и радиуса площадки контакта $a(t)$ достаточно знать вид функции $D_2(t)$.

Заметим, что при установившемся режиме тепловыделения радиус зоны контакта вычисляется по формуле [6]

$$a_0 = \pi K[1,566(1 + \nu)fV\alpha_T\theta]^{-1} \quad (1.8)$$

где K – коэффициент теплопроводности, α_T – коэффициент линейного температурного расширения материала штампа. Здесь величина a_0 не зависит от прижимающей силы P и является предельным значением $a(t)$ при $P \rightarrow \infty$. В чисто изотермической задаче такой предел не существует.

2. Найдем температуру $T(r, t)$ и нормальное перемещение $u_z^T(r, t)$ поверхности упругого полупространства, нагреваемой тепловым потоком $q(r, t)$ вида (1.3). С этой целью воспользуемся фундаментальным решением [7] нестационарного уравнения теплопроводности для мгновенно действующего в точке O (фиг. 1) источника тепла постоянной мощности q^0

$$T^0(r, t) = \frac{q^0 \exp[-r^2(4kt)^{-1}]}{4\rho c(\pi kt)^{3/2}} \quad (r \geq 0, t > 0) \quad (2.1)$$

Здесь $k = K(\rho c)^{-1}$ – коэффициент температуропроводности, ρ – плотность, c – удельная теплоемкость материала полупространства.

Соответствующее температурному полю (2.1) вертикальное перемещение свободной от внешних усилий границы полупространства $z = 0$ равно [8]

$$u_z^0(r, t) = -\frac{\alpha_T(1+\nu)q^0}{4\pi Kt} \Phi\left(\frac{3}{2}; 2; -\frac{r^2}{4kt}\right), \quad (r \geq 0, t > 0) \quad (2.2)$$

где $\Phi(\alpha; \gamma; x)$ – вырожденная гипергеометрическая функция.

Исходя из формул (2.1), (2.2) и принимая во внимание принцип суперпозиции (метод мгновенного точечного источника [7]), будем иметь

$$T(r, t) = \frac{1}{4\rho c(\pi k)^{3/2}} \int_0^t \int_0^{u(\tau)2\pi} \int_0^a q(s, \tau) e^{-X^2} \frac{sd\varphi ds d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \quad (2.3)$$

$$u_z^T(r, t) = -\frac{\alpha_T(1+\nu)}{4\pi K} \int_0^t \int_0^{u(\tau)2\pi} \int_0^a q(s, \tau) \Phi\left(\frac{3}{2}; 2; -X^2\right) \frac{sd\varphi ds d\tau}{t-\tau}, \quad (2.4)$$

$$X^2 = \frac{r^2 - 2rs \cos \varphi + s^2}{4k(t-\tau)}, \quad r \leq a(t), \quad t > 0$$

При постановке контактных задач теории упругости с износом чаще всего закон изнашивания берется в форме [9]

$$u_z^w(r, t) = k_w \int_0^t p(r, \tau) d\tau \quad (r \leq a(t)) \quad (2.5)$$

(k_w – коэффициент износа). Такая закономерность имеет место при жестких режимах изнашивания абразивными частицами и в некоторых случаях усталостного изнашивания.

В последнее время стали применяться и более сложные модели наследственно-ста-реющего типа [10, 11], учитывающие эффекты последействия

$$u_z^w(r, t) = k_w \int_0^t K_1(\tau) K_2(t-\tau) p(r, \tau) d\tau \quad (r \leq a(t)) \quad (2.6)$$

$$K_1(\tau) = 1 + \alpha e^{-\beta\tau}, \quad K_2(t-\tau) = e^{-\gamma(t-\tau)}$$

где α, β, γ – параметры, экспериментально определяемые для каждого трибосопряжения. Закон изнашивания (2.6) в отличие от (2.5) позволяет описать процессы с ограниченной величиной износа.

Отметим, что в выражениях (2.5) и (2.6) необходимо следить за изменением площадки контакта с течением времени и в случае ее монотонного возрастания, например, на участке $\theta_1 \leq t \leq \theta_2$ ($\theta_1 < \theta_2, \theta_1 \geq 0$) следует положить [12]: $p(r_*, t) = 0$

при $t \leq t_*$ ($\theta_1 \leq t_* \leq \theta_2$). Здесь t_* – время достижения границей области контакта произвольных точек с координатами $z = 0$, $r_* = a(t_*)$.

Подставим соотношения (1.3) и (1.7) в (2.4) и (2.5). При учете (1.8) последние формулы запишем в виде

$$u_z^T(r, t) = -\frac{8k}{1,566\pi a_0} \int_0^t \int_0^{A(t, \tau)} D_2(\tau) \sqrt{(A^2 - S^2)g(t - \tau)} SF_0(R, S) dS d\tau \quad (2.7)$$

$$u_z^w(r, t) = \frac{8\theta V k_w}{\pi} \int_0^t D_2(\tau) \sqrt{a^2 - r^2} d\tau \quad (2.8)$$

Здесь

$$A^2 = a^2 / g, \quad R^2 = r^2 / g, \quad S^2 = s^2 / g, \quad g(t - \tau) = 4k(t - \tau) \quad (2.9)$$

$$F_0(R, S) = \int_0^{2\pi} \Phi\left[\frac{3}{2}; 2; -(R^2 - 2RS \cos \varphi + S^2)\right] d\varphi$$

Для вычисления квадратуры в (2.9) разложим вырожденную гипергеометрическую функцию в ряд

$$\Phi\left(\frac{3}{2}; 2; -X^2\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i+1)!!(-X^2)^i}{(2i)!!(i+1)!} \quad (X^2 < \infty)$$

Используя интеграл [13]

$$\int_0^{2\pi} \left[1 - 2\frac{R}{S} \cos \varphi + \left(\frac{R}{S}\right)^2\right]^i d\varphi = 2\pi \sum_{j=0}^i (C_i^j)^2 \left(\frac{R}{S}\right)^{2j}$$

найдем

$$F_0(R, S) = 2\pi \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i+1)!!(-S^2)^i}{(2i)!!(i+1)!} \sum_{j=0}^i (C_i^j)^2 \left(\frac{R}{S}\right)^{2j} \quad (2.10)$$

Введем теперь в рассмотрение функцию

$$F(R, A) = \int_0^A \sqrt{A^2 - S^2} F_0(R, S) S dS \quad (2.11)$$

Внося (2.10) в (2.11) и учитывая значение интеграла [13]

$$\int_0^A \sqrt{A^2 - S^2} S^{2i-2j+1} dS = \frac{(2i-2j)!!}{(2i-2j+3)!!} A^{2i-2j+3}$$

будем иметь

$$F(R, A) = -2\pi A \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=j}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} (2i+1)!! (2i-2j)!!}{(2i)!! (i+1)! (2i-2j+3)!!} (C_i^j)^2 \left(\frac{R}{A}\right)^{2j} A^{2i+2} \quad (2.12)$$

В равенстве (2.12) изменен порядок суммирования по i и j .

Нормальное перемещение поверхности штампа вследствие износа (2.8) запишем в форме

$$u_z^w(r, t) = \frac{8\theta V k_w}{\pi} \int_0^t D_2(\tau) a(\tau) [1 - r^2 / (2a^2) + \dots] d\tau \quad (2.13)$$

Такое представление правомерно [14] в силу замечания, сделанного выше, относительно поведения контактного давления в подынтегральных выражениях (2.5) и (2.6).

Сравнивая теперь коэффициенты при r^2 в соотношениях (1.4), (2.7), (2.12) и (2.13), получим

$$D_2(t) = \frac{8k}{1,566a_0} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{(i+1)!} \int_0^t (-A^2)^{i+1} D_2(\tau) [a(\tau)]^{-1} d\tau - \frac{4\theta V k_w}{\pi} \int_0^t D_2(\tau) a^{-1}(\tau) d\tau + D_2(0), \quad (D_2(0) = (2R_0)^{-1}) \quad (2.14)$$

Перейдем в выражении (2.14) к безразмерным переменным

$$\tilde{t} = 4kta_0^{-2}, \quad \tilde{\tau} = 4k\tau a_0^{-2} \quad (2.15)$$

и используем сумму ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-A^2)^{i+1} i}{(i+1)!} = 1 - (1 + A^2)e^{-A^2} = B[A(t, \tau)] = \tilde{B}(\tilde{t}, \tilde{\tau})$$

Придем к интегральному уравнению Вольтерра относительно $D_2(\tilde{t})$

$$D_2(\tilde{t}) = \frac{a_0}{0,783} \int_0^{\tilde{t}} \tilde{B}(\tilde{t}, \tilde{\tau}) D_2(\tilde{\tau}) a^{-1}(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau} - a_0 \kappa \int_0^{\tilde{t}} D_2(\tilde{\tau}) a^{-1}(\tilde{\tau}) d\tilde{\tau} + D_2(0) \quad \left(\kappa = \frac{\theta V k_w}{\pi k} \right) \quad (2.16)$$

При помощи новой искомой функции $\tilde{a}(\tilde{t}) = a(\tilde{t}) a_0^{-1}$ и связи (1.6), преобразуем интегральное уравнение (2.16) к виду (волну ниже опустим)

$$0,783 \left[\frac{1}{a^3(t)} - \frac{1}{a^3(0)} \right] = \int_0^t [B(t, \tau) - 0,783] \frac{d\tau}{a^4(\tau)} \quad (t \geq 0) \quad (2.17)$$

Если вертикальное перемещение $u_z^w(r, t)$ дается соотношением наследственно-старееющего типа (2.6), то второй член в подынтегральном выражении (2.17) следует умножить на произведение $K_1(\tau)K_2(t - \tau)$.

3. Построим расчетную схему решения интегрального уравнения (2.17). Для этого промежуток интегрирования $[0, t]$ разделим на L частей длины $h = tL^{-1}$: $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_L = t$. На каждом участке изменения времени $\tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j]$ ($j = 1, 2, \dots, L$) аппроксимируем искомую функцию $a(\tau)$ постоянными $a(t_j) \equiv a_j$ ($t_j = \tau_j - h/2$). Используя первую формулу (2.9) и (2.15), при $\tau \in [\tau_{j-1}, \tau_j]$ найдем

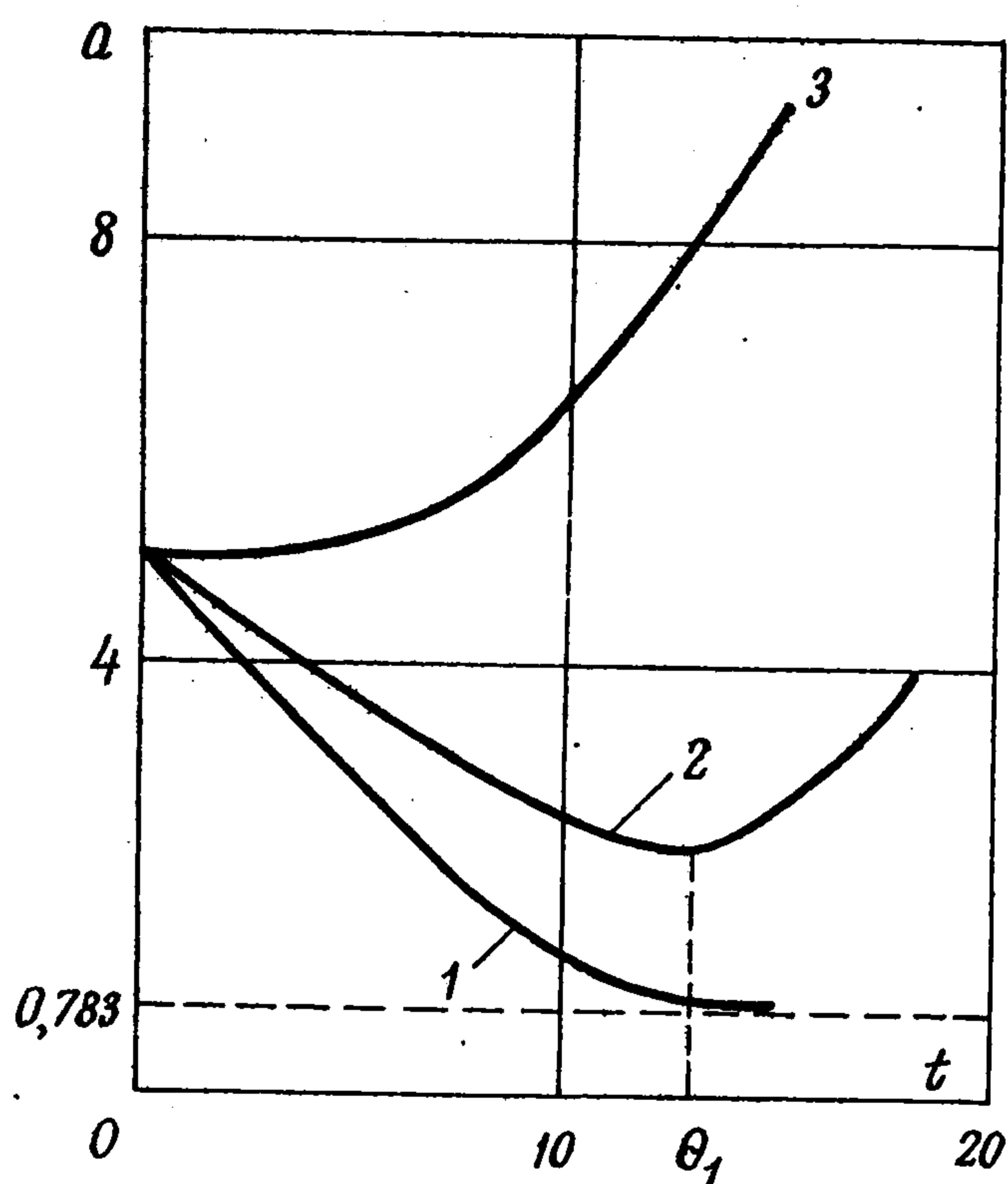
$$A^2 = a_j^2 (t - \tau)^{-1}, \quad d\tau = 2a_j^2 A^{-3} dA \quad (3.1)$$

Тогда интегральное уравнение (2.17) трансформируется в рекуррентное алгебраическое соотношение, позволяющее определить величину $a(t_L)$ по предыдущим значениям $a(t_j)$ ($j = 1, 2, \dots, L - 1$)

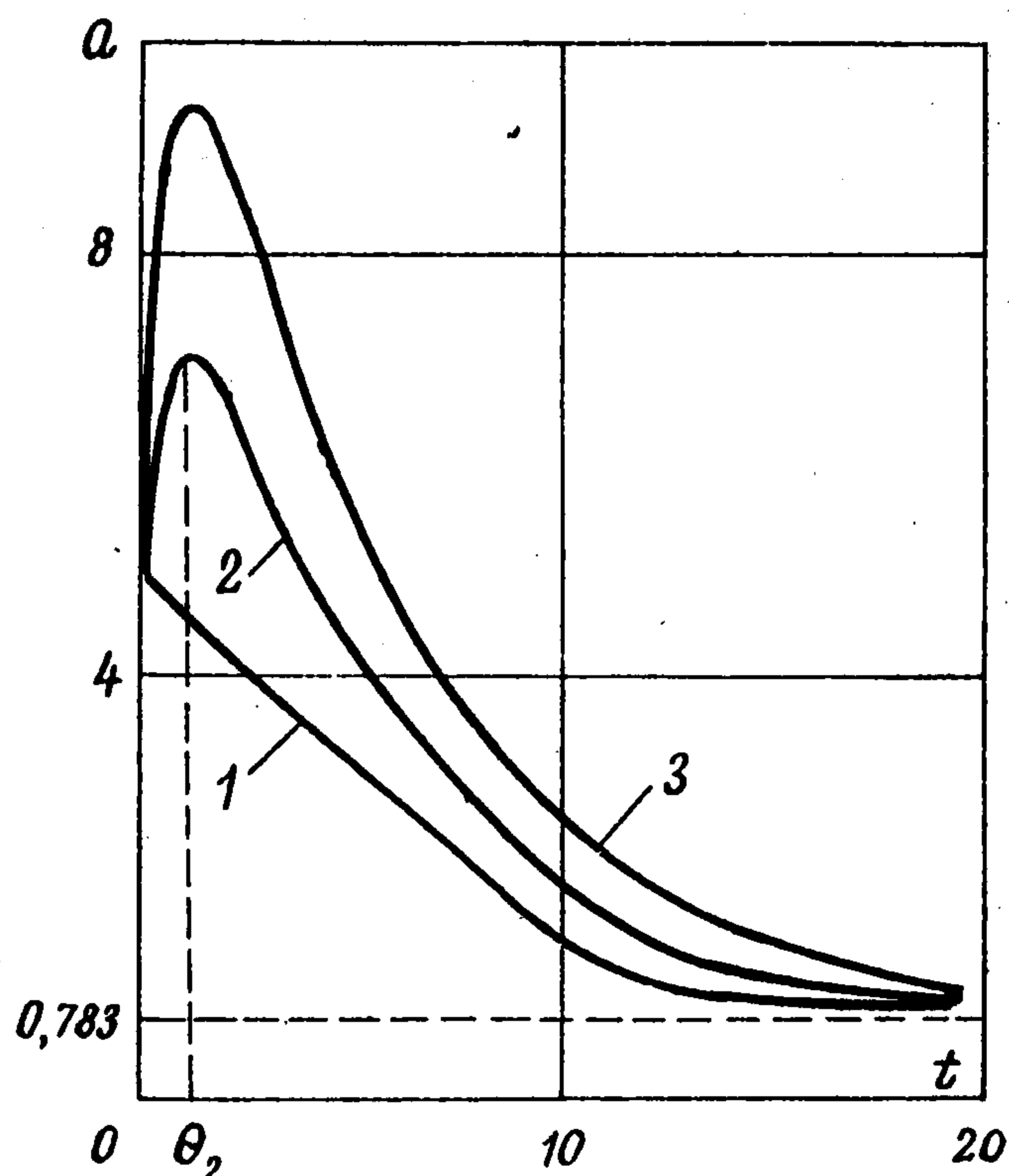
$$\frac{1}{a^3(t_L)} - \frac{1}{a^3(0)} = -\frac{1}{0,783} \sum_{j=1}^{L-1} \frac{2a_j^2 A_{jL} + 0,783\kappa h}{a_j^4} \quad (3.2)$$

$$A_{jL} = \int_{\alpha_{1j}}^{\alpha_{2j}} \frac{B(A)}{A^3} dA, \quad \alpha_{mj}^2 = \frac{a_j^2}{\hat{t}_{mj}} \quad (m = 1, 2)$$

$$\hat{t}_{mj} = [L - j + \frac{1}{2}(-1)^m] h$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Вычисления по формулам (3.2) начинаем при $L = 1$; в этом случае $a(t_1) = a(0)$, что соответствует радиусу площадки контакта изотермической задачи Герца. Если начальное искривление поверхности упругого штампа отсутствует, т.е. $a(0) \rightarrow \infty$ и $D_2(0) = 0$; интегральное уравнение (2.16) имеет тривиальное решение $D_2(t) = 0$ ($t > 0$), соответствующее задаче о равномерном распределении давления по поверхности полупространства. Нахождение функций влияния A_{jL} в (3.2) осуществлялось при помощи пакета программ [15].

На фиг. 2 показано изменение безразмерного радиуса $a(t)$ участка контакта в случае абразивного износа (2.5). Начальное значение $a(0)$ полагалось равным 5. Кривые 1–3 рассчитаны для $\kappa = 0; 0,5; 1,5$ соответственно. Если износ отсутствует ($\kappa = 0$), функция $a(t)$ является линейно убывающей (см. далее (3.3)) и при достаточно больших значениях времени достигает величины $a_\infty = 0,783a_0$, представляющей решение задачи при установившемся режиме тепловыделения. Численный анализ показывает, что в диапазоне $0 < \kappa < 1,277$ всегда существует такое значение $t = \theta_1$, начиная с которого область контакта будет монотонно возрастать. Для $\kappa > 1,277$ функция $a(t)$ является монотонно возрастающей в течение всего периода работы рассматриваемого сопряжения.

Несколько по-иному ведет себя радиус площадки контакта при наследственно-стареющей модели изнашивания (2.6) (фиг. 3). Представленные здесь результаты получены для следующих значений параметров: $\alpha = 40; \beta = 1; \gamma = 0,5$. Как и выше, кривые 1–3 соответствуют значениям $\kappa = 0; 0,5; 1,5$. Характерным для этого вида износа является наличие в начальной стадии контактного взаимодействия при $\kappa > 0$ пика значений $a(\theta_2) > a(0)$, после достижения которого происходит обязательный выход $a(t)$ на асимптоту a_∞ .

Построим теперь асимптотические решения интегрального уравнения (2.17) при малых и больших значениях времени. В первом варианте, как следует из (3.1), $A \gg 1$, откуда $B(A) \approx 1$. Тогда исходное интегральное уравнение запишется в форме

$$\frac{1}{a^3(t)} - \frac{1}{a^3(0)} = (1,277 - \kappa) \int_0^t \frac{d\tau}{a^4(\tau)} \quad (t \geq 0)$$

и его решением является линейная функция

$$a(t) = a(0) - 1/3(1,277 - \kappa)t \quad (3.3)$$

Соотношение (3.3) подтверждает сделанные ранее выводы о том, что безразмерный радиус площадки контакта при малых значениях времени может быть в зависимости от величины коэффициента κ либо монотонно убывающей, либо монотонно возрастающей функцией. В первом случае преобладающим на контакте является фрикционное теплообразование, во втором – износ.

В согласии с (2.15) и обозначениями, принятыми выше, преобразуем формулу (3.3) к размерному виду

$$a(t) = a(0) - \frac{4\kappa t}{3a_0}(1,277 - \kappa)$$

Отсюда следует, что скорость изменения радиуса области контакта обратно пропорциональна радиусу участка контакта a_0 (1.8) в установившемся режиме тепловыделения.

Пусть теперь в (2.17) $t \rightarrow \infty$. Обозначая в этом случае $a(\infty) = a_\infty = \text{const}$ и используя первое равенство (2.9), найдем

$$d\tau = 2A^{-3}(a_\infty / a_0)^2 dA$$

Подставляя последнее тождество в подынтегральное выражение (2.17), будем иметь

$$0,783 \left[1 - \frac{a_\infty^3}{a^3(0)} \right] = 2 \frac{a_\infty}{a_0} \int_0^\infty B(A) \frac{dA}{A^3} \quad (3.4)$$

Интеграл в правой части (3.4) равен 0,5, и, следовательно, для определения a_∞ получим алгебраическое уравнение

$$0,783a_0 \{ 1 - [a_\infty a^{-1}(0)]^3 \} = a_\infty \quad (3.5)$$

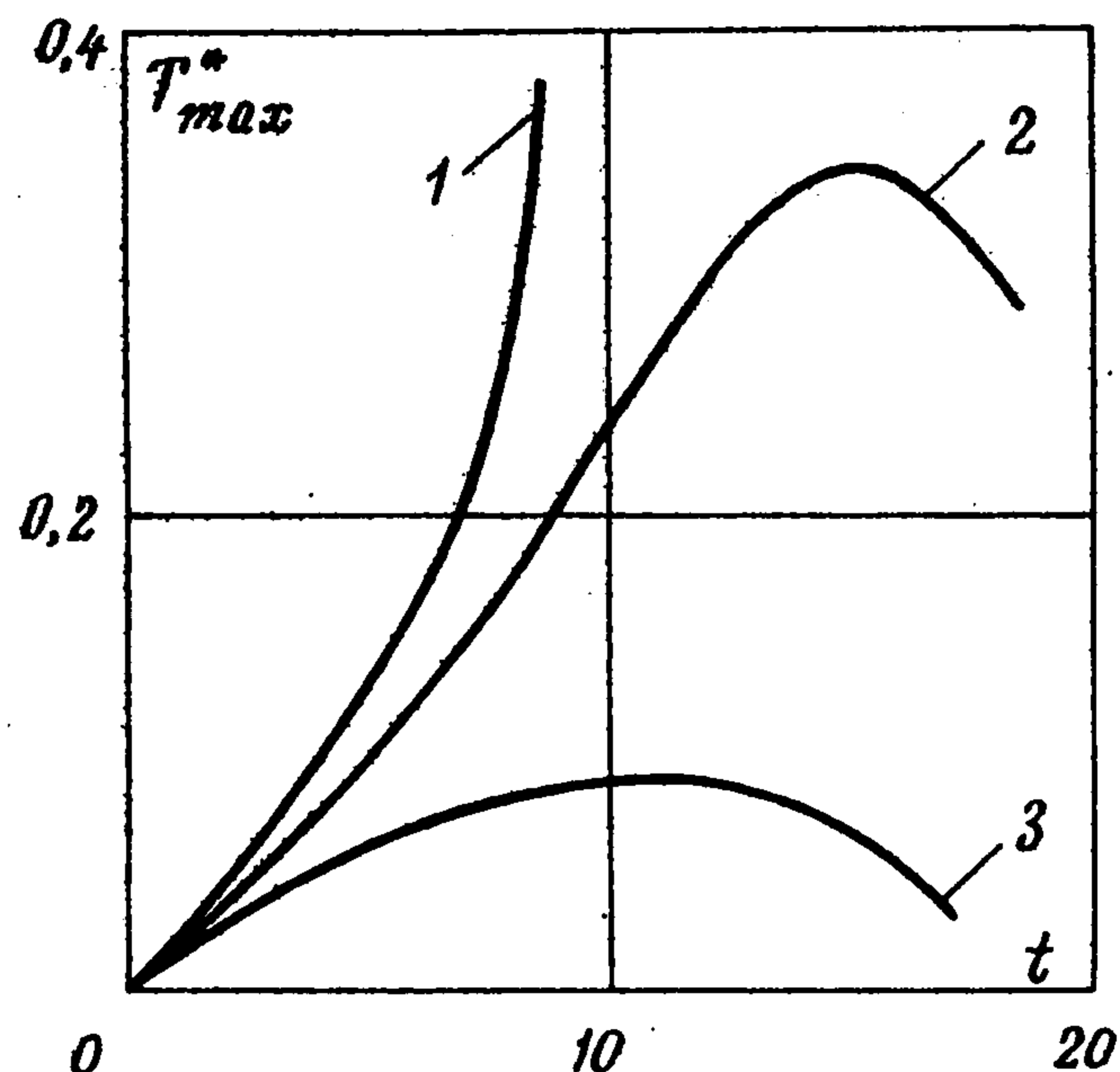
Если в (3.5) $a_\infty a^{-1}(0) \ll 1$, то отсюда найдем $a_\infty = 0,783a_0$. Таким образом, в рамках предположения о распределении нормального перемещения упругого штампа по квадратичному закону (1.4) относительная погрешность при вычислении радиуса площадки контакта в установившемся и нестационарном режимах тепловыделения может составить 21,7%.

Температуру в области контакта определим, исходя из соотношений (1.3), (1.6), (1.7) и (2.3). Очевидно, что максимальные значения $T(r, t)$ будут достигнуты в центре круговой зоны контакта. При $r = 0$ в согласии с (2.15) (волну, как и выше, опустим) найдем

$$T(0, t) = T_0 \int_0^t F_1(A) \frac{d\tau}{a^3(\tau)} \quad (t > 0) \quad (3.6)$$

$$F_1(A) = \int_0^A \sqrt{A^2 - S^2} e^{-S^2} S dS, \quad T_0 = \frac{P}{1,044 a_0^2 \sqrt{\pi \theta \alpha_T} (1 + \nu)}$$

Квадратуру $F_1(A)$ при помощи интегрирования по частям можно представить в форме



Фиг. 4

$$F_1(A) = 1/2A[1 - F_2(A)] \quad (3.7)$$

$$F_2(A) = \frac{1}{A} e^{-A^2} \int_0^A e^{x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-A^2} \Phi\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; A^2\right)$$

(значения функции Досона $AF_2(A)$ затабулированы [16]).

На фиг. 4 показана эволюция во времени максимальной безразмерной температуры $T_{\max}^*(t) = T_0^{-1}T(0,t)$, рассчитанной по формулам (3.6) и (3.7), при абразивном законе изнашивания (2.5) поверхности упругого теплопроводного тела. Кривые 1–3 соответствуют $k = 0; 0,5; 1,5$. Видно, что существует наибольшее значение T_{\max}^* , после достижения которого происходит выравнивание температуры на контакте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Евтушенко А.А., Коваленко Е.В. Контактная задача об износе оплавлением вкладыша подшипника скольжения // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 1. С. 148–156.
2. Коваленко Е.В., Евтушенко А.А. Износ подшипника скольжения с учетом тепловыделения от трения // Трение и износ. 1993. Т. 14. № 2. С. 259–269.
3. Azarkhin A., Barber J.R. Transient contact of two sliding half-planes with wear // Trans. ASME. Ser. F. J. Tribology. 1987. V. 109. № 4. P. 598–603.
4. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 509 с.
5. Kuznetsov Ye.A., Gorokhovskiy G.A. Effect of tangential load on the stressed state of rubbing rough bodies // Wear. 1981. V. 73. № 1. P. 41–58.
6. Barber J.R. Some thermoelastic contact problems involving frictional heating // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1976. V. 29. № 1. P. 1–13.
7. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
8. Barber J.R. Distortion of the semi-infinite solid due to transient surface heating // Intern. J. Mech. Sci. 1972. V. 14. № 6. P. 377–393.
9. Трение, изнашивание и смазка: Справочник / Под ред. И.В. Крагельского, В.В. Алисина. М.: Машиностроение, 1978. Т. 1. 400 с.
10. Кузьменко А.Г. Контактные задачи с учетом износа для цилиндрических опор скольжения // Трение и износ. 1981. Т. 2. № 3. С. 502–512.
11. Гавриков М.В., Мазинг Р.И. Наследственно-стареющая модель изнашивания и ее применение к задачам с монотонно растущей зоной контакта. // Трение и износ. 1988. Т. 9. № 2. С. 274–279.
12. Белоконь А.В., Ворович И.И. Контактные задачи линейной теории вязкоупругости без учета сил трения и сцепления. // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. № 6. С. 63–73.
13. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
14. Александров В.М., Коваленко Е.В. Аналитическое решение контактной задачи об изнашивании сопряжения вал–втулка. // Трение и износ. 1987. Т. 8. № 6. С. 985–995.
15. Press W.H., Flannery B.P., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. Numerical Recipes. Cambridge: Univ. Press, 1986. 818 p.
16. Карпов К.А. Таблицы функции $w(z) = e^{-z^2} \int_0^z e^{x^2} dx$ в комплексной области. М.: Изд-во АН СССР, 1954. 536 с.