

УДК 539.3

© 1995 г. Э.И. Григолюк, Е.А. Коган, В.И. Мамай

### МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ НЕРАВНОМЕРНО НАГРЕТЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ С РАССЛОЕНИЯМИ

Вариационным методом строится полная система соотношений, определяющих напряженно-деформированное состояние при изгибе неравномерно нагретых трехслойных стержней несимметричной структуры с жестким сжимаемым заполнителем и с дефектами типа расслоений на поверхностях контакта несущих слоев с заполнителем. Эти соотношения включают дифференциальные уравнения равновесия в инвариантной форме для всей области интегрирования, концевые условия, условия стыковки на границах бездефектных и дефектных областей и соотношения упругости. Исходные уравнения равновесия в усилиях-моментах приводятся к удобному для численного решения нормальному системам дифференциальных уравнений относительно обобщенных усилий и перемещений.

Обзор результатов по теории слоистых стержней, пластин и оболочек, учитывающей межслойные дефекты и несовершенства контакта слоев типа расслоений, приведен в [1]. Большинство из опубликованных по этой проблеме работ посвящено исследованию устойчивости и кромочным эффектам. Напряженно-деформированное состояние изучено недостаточно. В настоящей работе предлагается модель, позволяющая распространить теорию трехслойных тонкостенных конструкций с идеальным сцеплением между слоями [2] на случай неидеального контакта слоев.

**1. Исходные предположения.** Рассматривается статическое нагружение неравномерно нагретых трехслойных стержней с тонкими упругими изотропными слоями различной толщины и трансверсально-изотропным заполнителем. Для внешних слоев полагаются справедливыми гипотезы Бернулли. Заполнитель считается в соответствии с установившейся в теории трехслойных конструкций терминологией жестким (воспринимающим продольные силы и моменты), а также передающим поперечный сдвиг и поперечные нормальные деформации и напряжения. Принимается, что на поверхностях контакта внешних слоев с заполнителем имеются дефектные области, моделируемые нераспространяющимися сдвиговыми расслоениями, для которых характерен разрыв только продольных компонент вектора перемещений [3].

Стержень предполагается нагруженным распределенными по поверхностям несущих слоев поперечными нагрузками  $q_1(x)$  и  $q_2(x)$  (1, 2 – номера внешних несущих слоев) и неравномерно нагрет по длине и толщине до заданной температуры  $T(x, z)$ .

Здесь и далее  $x$  – продольная координата стержня ( $0 < x < l$ ),  $z$  – поперечная координата,  $h_1, h_2, h_3 = 2c$  – толщины соответственно первого, второго несущих слоев и заполнителя,  $\Delta x^k = x_2^k - x_1^k$  ( $k = 1, 2$ ) – длина расслоения (фигура).

Кроме того, принимаются следующие допущения, определяющие принятую модель деформирования трехслойного стержня с расслоениями.

1°. Нормальные перемещения по толщине заполнителя распределены по линейному закону [4]

$$w^3 = w + zc^{-1}v \tag{1.1}$$

где  $w = 1/2(w^1 + w^2)$  – средний прогиб заполнителя,  $w^k$  – прогиб  $k$ -го слоя ( $k = 1, 2, 3$ ),  $v = 1/2(w^1 - w^2)$  – функция, характеризующая обжатие заполнителя. В частности, для несжимаемого заполнителя  $w^1 = w^2$  и  $v = 0$ .

2°. В областях идеального контакта слоев обеспечивается непрерывность продольных и нормальных перемещений при переходе от слоя к слою.

3°. Нормальные и продольные перемещения принимаются непрерывными по толщине трехслойного пакета во всей области  $0 < x < l$  лишь на начальном этапе деформирования, пока поперечные касательные напряжения  $\sigma_{xz}^{k,3}$  ( $k = 1, 2$ ), передаваемые в областях расслоений от несущих слоев к заполнителю, не превысят предельно допустимых для материала заполнителя величин  $[\sigma_{xz}^{k,3}]$ , определяемых по закону Кулона–Амонтона

$$\sigma_{xz}^{k,3} \leq [\sigma_{xz}^{k,3}] = \hat{\sigma}_{xz}^{k,3} + f_k \sigma_z^3 \quad (2)$$

В формуле (1.2)  $\hat{\sigma}_{xz}^{k,3}$  – предельные для данного материала значения касательных напряжений, характеризующие тангенциальное сопротивление контактирующих слоев, не зависящее от нормального давления,  $\sigma_z^3$  – нормальные напряжения на границе контакта заполнителя с несущими слоями,  $f_k$  – коэффициенты трения берегов расслоений. Некоторые оценки величин  $\hat{\sigma}_{xz}^{k,3}$  для различных материалов даны в [5].

Когда межслоевые касательные напряжения превзойдут допустимую величину, возникает проскальзывание между слоями (взаимные смещения слоев в областях расслоений) и появляются межслоевые касательные усилия  $\tau^{k,3}$ ,  $k = 1, 2$  (фигура).

4°. По аналогии с теорией составных стержней с упруго-податливыми связями сдвига [6] принимается, что межслоевые касательные усилия ввиду малости деформаций пропорциональны взаимным смещениям слоев в областях расслоений. Тогда при принятом положительном направлении нагрузки величины  $\tau^{k,3}$  будут положительны, если направлены так, как показано на фигуре, и равны

$$\tau^{k,3}(x) = \lambda_k (u^k - u^3) \Big|_{z=(-1)^{k+1}c}, \quad x_1^k \leq x \leq x_2^k \quad (1.3)$$

где  $\lambda_k$  – заданные постоянные, аналогичные по смыслу коэффициентам жесткости швов в теории составных стержней.

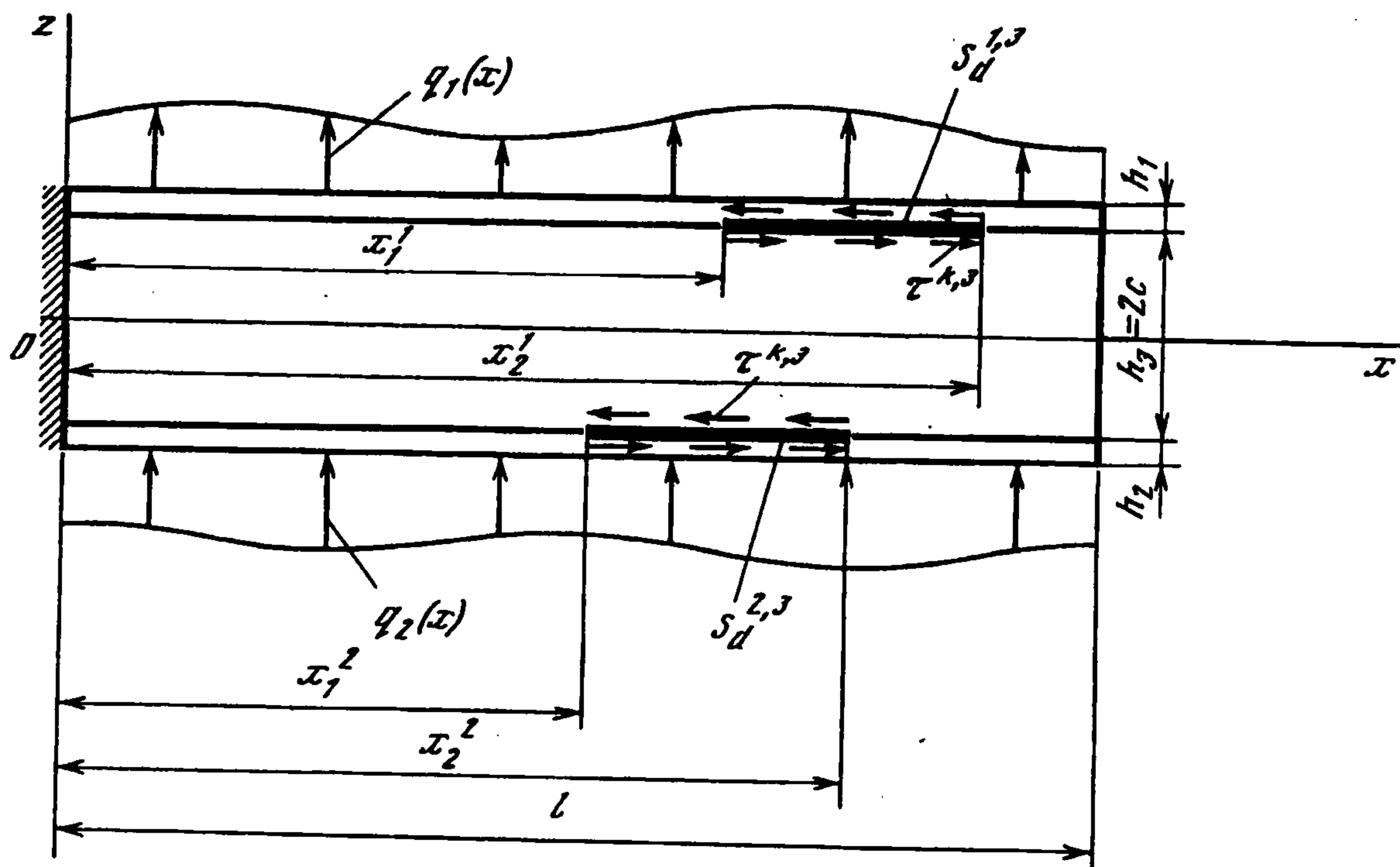
Соотношения (1.3) могут быть обобщены на случай нелинейной связи между усилиями  $\tau^{k,3}$  и взаимными смещениями слоев в областях расслоений.

**2. Перемещения, деформации, напряжения.** Интегрируя соотношения Коши для деформаций поперечного сдвига в заполнителе  $\epsilon_{xz}^3 = \partial u^3 / \partial z + \partial w^3 / \partial x$  при учете принятого линейного распределения нормальных перемещений по толщине среднего слоя (1.1) и условий непрерывности перемещений на границах контакта слоев, а также вводя в качестве дополнительных неизвестных перемещения несущих слоев  $u_1, u_2$  в областях расслоений, можно представить распределение продольных и нормальных перемещений в слоях трехслойного стержня в следующей инвариантной форме: нормальные перемещения при  $x \in [0, l]$

$$\begin{aligned} w^1 &= w + v & (-c \leq z \leq c + h_1) \\ w^2 &= w - v & (-c - h_2 \leq z \leq -c) \\ w^3 &= w + zc^{-1}v & (-c \leq z \leq c) \end{aligned} \quad (2.1)$$

продольные перемещения при  $x \in [0, l]$  (штрих означает производную по  $x$ )

$$\begin{aligned} u^k &= u_k - [z + (-1)^k c][w - (-1)^k v]' \quad (k = 1, 2) \\ u^3 &= u + z(\alpha^3 - w' - 1/2 z^2 c^{-1} v') \end{aligned} \quad (2.2)$$



Здесь  $u$  – продольные перемещения нейтрального слоя заполнителя,  $\alpha^3 = \epsilon_{xz}^3$  – угол поперечного сдвига в заполнителе. В областях идеального контакта слоев  $S_c$  перемещения  $u^k$  определяются формулами [4]

$$u_k = u^3 \Big|_{z=(-1)^{k+1}c} = u - (-1)^k c(\alpha^3 - w') - \frac{1}{2} c v' \quad (k=1,2) \quad (2.3)$$

Продольные компоненты полной деформации слоев и деформации поперечного сдвига и обжатия в поперечном направлении для заполнителя во всей области имеют вид

$$\begin{aligned} \epsilon_x^k &= u_k' - [z + (-1)^k c][w - (-1)^k v]' \quad (k=1,2) \\ \epsilon_x^3 &= u' + z(\alpha^3 - w') - \frac{1}{2} z^2 c^{-1} v'' \\ \epsilon_{xz}^3 &= \alpha^3, \quad \epsilon_z^3 = v c^{-1} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Нормальные напряжения в несущих изотропных слоях согласно закону Гука–Неймана определяются выражениями

$$\sigma_x^k = E_k (\epsilon_x^k - \alpha_k T) \quad (k=1,2) \quad (2.5)$$

где  $E_k$  и  $\alpha_k$  – модуль упругости и коэффициент линейного температурного расширения  $k$ -го несущего слоя;  $T(x, z)$  – заданная температура.

Соотношения термоупругости для трансверсально-изотропного сжимаемого заполнителя могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_x^3 &= E_3 (v_{11} \epsilon_x^3 + v_{12} \epsilon_z^3 - v_{1T} \alpha_3 T) \\ \sigma_z^3 &= E_z^3 (v_{11} \epsilon_x^3 + v_{13} \epsilon_z^3 - v_{2T} \alpha_3 T) \\ \sigma_{xz}^3 &= G_3 \alpha^3, \quad v_{11} = 1 / (1 - v_1 v_2) \\ v_{12} &= v_1 / (1 - v_1 v_2), \quad v_{13} = v_2 / (1 - v_1 v_2) \\ v_{1T} &= v_{11} + v_{12} \alpha_z^3 / \alpha_3, \quad v_{2T} = v_{12} + v_{11} \alpha_z^3 / \alpha_3 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь  $E_3$ ,  $\alpha_3$  – модуль упругости и коэффициент линейного температурного расширения в плоскости изотропии,  $G_3$  – модуль сдвига,  $E_z^3$  – модуль упругости заполнителя в поперечном направлении,  $v_1$  и  $v_2$  – коэффициенты Пуассона материала заполнителя,

характеризующие сокращение размеров в плоскости изотропии при растяжении в поперечном направлении и сокращение размеров в поперечном направлении при растяжении в плоскости изотропии,  $\alpha_z^3$  – коэффициент линейного температурного расширения материала заполнителя в поперечном направлении.

**3. Уравнения равновесия и граничные условия.** Уравнения равновесия трехслойного стержня с расслоениями при изгибе могут быть получены из расширенного вариационного уравнения Лагранжа

$$\delta \mathcal{E} = \delta \Pi - \delta A_q - \delta A_\tau = 0 \quad (3.1)$$

в котором помимо вариации потенциальной энергии деформации стержня  $\delta \Pi$  и вариации работы внешней поверхностной нагрузки  $\delta A_q$  учитывается также вариация работы межслоевых касательных усилий  $\tau^{k,3}$  на соответствующих взаимных смещениях слоев в областях расслоений –  $\delta A_\tau$ .

Потенциальная энергия деформации трехслойного стержня при учете поперечных сдвигов и обжатия в заполнителе равна

$$\Pi = b \int_0^l \left[ \int_c^{c+h_1} \sigma_x^1 \varepsilon_x^1 dz + \int_{-c-h_2}^{-c} \sigma_x^2 \varepsilon_x^2 dz + \int_{-c}^c (\sigma_x^3 \varepsilon_x^3 + \sigma_{xz}^3 \varepsilon_{xz}^3 + \sigma_z^3 \varepsilon_z^3) dz \right] dx \quad (3.2)$$

Используя соотношения (2.4)–(2.6), приведем выражение для потенциальной энергии деформации к виду

$$\Pi = \int_0^l \left[ \hat{N} u' + \hat{H} (\alpha^3)' - \hat{M} w'' - \hat{L} v'' + Q_x^3 \alpha^3 + c^{-1} Q_z^3 v \right] dx + \sum_{k=1}^2 \int_{S_d^{k,3}} N^k u_k' dx \quad (3.3)$$

Здесь

$$\hat{N} = N - N^d, \quad \hat{H} = H - H^d, \quad \hat{M} = M - M^d, \quad \hat{L} = L - L^d \quad (3.4)$$

– полные удельные усилия и моменты в трехслойном стержне с расслоениями.

Входящие в правые части формул (3.4) величины  $N$ ,  $H$ ,  $M$  и  $L$  есть соответствующие силовые факторы в трехслойном стержне при отсутствии расслоений [4]:

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=1}^3 N^k, & H &= M^3 + c(N^1 - N^2) \\ M &= \sum_{k=1}^3 M^k + c(N^1 - N^2), & L &= M^1 - M^2 + \frac{1}{2}c(N^1 + N^2) + G^3 \end{aligned} \quad (3.5)$$

где  $N$  – полная продольная сила в трехслойном стержне,  $M$  – полный изгибающий момент в трехслойном стержне относительно нейтральной линии заполнителя,  $H$  – изгибающий момент, определяемый деформациями поперечного сдвига в заполнителе (момент сдвига),  $L$  – изгибающий момент, обусловленный учетом сжимаемости заполнителя.

При этом удельные усилия и моменты в отдельных слоях трехслойного стержня таковы:

$$\begin{aligned} N^1 &= b \int_c^{c+h_1} \sigma_x^1 dz, & N^2 &= b \int_{-c-h_2}^{-c} \sigma_x^2 dz, & N^3 &= b \int_{-c}^c \sigma_x^3 dz \\ M^1 &= b \int_c^{c+h_1} \sigma_x^1 (z-c) dz, & M^2 &= b \int_{-c-h_2}^{-c} \sigma_x^2 (z+c) dz, & M^3 &= b \int_{-c}^c \sigma_x^3 z dz \\ G^3 &= \frac{b}{2c} \int_{-c}^c \sigma_x^3 z^2 dz, & Q_x^3 &= b \int_{-c}^c \sigma_{xz}^3 dz, & Q_z^3 &= b \int_{-c}^c \sigma_z^3 dz \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь  $G^3$  – дополнительный изгибающий момент второго порядка, появляющийся при учете сжимаемости заполнителя,  $Q_x^3$  и  $Q_z^3$  – поперечные силы, воспринимаемые заполнителем, обусловленные соответственно поперечным сдвигом и поперечными нормальными деформациями в среднем слое.

Дополнительные силовые факторы  $N^d, H^d, M^d, L^d$  в (3.4), появляющиеся в трехслойном стержне из-за дефектов поверхностей контакта слоев, имеют различный вид в зависимости от количества и взаимного расположения расслоений.

Окончательные выражения полных усилий и моментов для различных случаев расположения расслоений друг относительно друга определяются формулами:

в области первого изолированного расслоения  $S_d^{1,3}$

$$\begin{aligned} \hat{N} &= N^2 + N^3, \quad \hat{H} = M^3 - cN^2 \\ \hat{M} &= \sum_{k=1}^3 M^k - cN^2, \quad \hat{L} = M^1 - M^2 + G^3 + \frac{1}{2}cN^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

в области второго изолированного расслоения  $S_d^{2,3}$

$$\begin{aligned} \hat{N} &= N^1 + N^3, \quad \hat{H} = M^3 + cN^1 \\ \hat{M} &= \sum_{k=1}^3 M^k + cN^1, \quad \hat{L} = M^1 - M^2 + G^3 + \frac{1}{2}cN^1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

в области перекрытия расслоений  $S_d^{1,3} \cap S_d^{2,3}$

$$\hat{N} = N^3, \quad \hat{H} = M^3, \quad \hat{M} = \sum_{k=1}^3 M^k, \quad \hat{L} = M^1 - M^2 + G^3 \quad (3.9)$$

В предельном случае трехслойного стержня с идеальным сцеплением между слоями (при учете поперечных сдвигов и сжимаемости заполнителя) полные усилия и моменты будут соответствовать введенным в [4].

Интегрируя по частям выражение (3.3) и анализируя внеинтегральные члены, получим, что обобщенные усилия и перемещения трехслойного стержня с расслоениями должны быть выбраны следующим образом:

$N^1$	$N^2$	$\hat{N}$	$\hat{H}$	$\hat{M}$	$\hat{L}$	$\hat{M}'$	$\hat{L}'$
$u_1$	$u_2$	$u$	$\alpha^3$	$w'$	$v'$	$w$	$v$

Отметим, что неизвестные касательные межслоевые усилия  $\tau^{k,3}$  взаимодействия слоев в областях расслоений определяются через продольные перемещения на границах контакта дефектных областей по формулам (1.3). Поэтому число основных неизвестных задачи об изгибе трехслойного стержня с дефектами типа расслоений равно 16.

Работа  $A_q$  внешних распределенных поверхностных нагрузок  $q_1(x)$  и  $q_2(x)$ , приложенных к поверхности  $z = c + h_1$  и  $z = -c - h_2$  соответственно (см. фигуру), и работа  $A_\tau$  межслоевых контактных усилий в областях расслоений равны

$$\begin{aligned} A &= A_q + A_\tau = \int_0^l (q_1 w^1 + q_2 w^2) dx + \sum_{k=1}^2 \int_{S_{ij}^{k,3}} \tau^{k,3} (u^k - u^3) |_{z=(-1)^{k+1}c} dx = \\ &= \int_0^l [(q_1 + q_2)w + (q_1 - q_2)v] dx + \\ &+ \sum_{k=1}^2 \int_{S_{ij}^{k,3}} \left\{ u_k - u + (-1)^k \frac{c}{2} \left[ \alpha^3 - (-1)^k w' + \frac{v'}{2} \right] \right\} dx \end{aligned} \quad (3.10)$$

(учтены соотношения (1.3), (2.1)–(2.3), (2.6)). Варьируя  $\Pi$ ,  $A_q$  и  $A_\tau$  при учете выражений для полных и обобщенных моментов и усилий в различных областях стержня согласно (3.7)–(3.9), получим расширенное вариационное уравнение Лагранжа (3.1) в виде:

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{E} = & - \int_{S_c} [N'\delta u + (H' - Q_x^3)\delta\alpha^3 + (M'' + q_1 - q_2)\delta w + \\
& + (L'' - c^{-1}Q_z^3 + q_1 - q_2)\delta v] dx - \sum_{k=1}^2 \int_{S_d^{k,3}} \{((N^k)'\tau^{k,3})\delta u_k + ((N^3)'\tau^{k,3})\delta u_k - \\
& - \tau^{k,3}\delta u + [\hat{H}' + (-1)^k \tau^{k,3} - Q_x^3]\delta\alpha^3 + [\hat{H}'' + (-1)^k c(\tau^{k,3})' + q_1 + q_2]\delta w + \\
& + [\hat{L}'' - \frac{1}{2}c(\tau^{k,3})' - c^{-1}Q_z^3 + q_1 - q_2]\delta v\} dx + \\
& + (N\delta u + H\delta\alpha^3 - M\delta w' + M'\delta w - L\delta v' + L'\delta v)|_{S_c} + \\
& + \sum_{k=1}^2 \{N^k\delta u_k + \hat{N}\delta u + \hat{H}\delta\alpha^3 - \hat{M}\delta w' + [\hat{M}' - (-1)^k c\tau^{k,3}]\delta w - \\
& - \hat{L}\delta v' + (\hat{L}' + \frac{1}{2}c\tau^{k,3})\delta v\}|_{x_1^k}^{x_2^k} = 0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

где  $S_d^{k,3}$  – области расслоений ( $k = 1, 2$ ),  $S_c$  – бездефектные области.

В силу произвольности вариаций перемещений из расширенного вариационного уравнения Лагранжа следуют уравнения равновесия для различных областей стержня (бездефектных и областей с расслоениями), а также условия на концах стержня и условия сопряжения на границах контакта бездефектных и дефектных областей.

В общем случае для произвольно расположенных друг относительно друга расслоений необходимо совместное решение систем уравнений равновесия для бездефектных областей, для областей с изолированными расслоениями и для области с перекрывающимися расслоениями при учете соответствующих конечных условий и условий сопряжения.

Введением единичных ступенчатых функций

$$\Delta H^k = H^k(x - x_1^k) - H^k(x - x_2^k) = \begin{cases} 1, & x \in [x_1^k; x_2^k] \\ 0, & x \in [0; x_1^k] \cup [x_2^k; l] \end{cases}$$

системы уравнений равновесия в усилиях–моментах для различных областей при учете соотношения (3.4), могут быть представлены в инвариантной форме

$$\begin{aligned}
\hat{N}' - \sum_{k=1}^2 \tau^{k,3} \Delta H^k &= 0, \quad ((N^k)'\tau^{k,3}) \Delta H^k = 0 \quad (k = 1, 2) \\
\hat{H}' - Q_x^3 - c \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} \tau^{k,3} \Delta H^k &= 0 \\
\hat{M}'' - c \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} (\tau^{k,3})' \Delta H^k + q_1 + q_2 &= 0 \\
\hat{L}'' - c^{-1}Q_z^3 - \frac{1}{2}c \sum_{k=1}^2 (\tau^{k,3})' \Delta H^k + q_1 - q_2 &= 0
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Фигурирующие в уравнениях усилия и моменты для различных областей определяются согласно (3.7)–(3.9) при учете соотношений (2.4) и (2.5), (3.5), (3.6).

Каждое из внеинтегральных слагаемых в вариационном уравнении (3.11) может быть представлено в виде

$$F_1(x)\delta U|_0^{x_1^k} + F_2(x)\delta U|_{x_1^k}^{x_2^k} + F_3(x)\delta U|_{x_2^k}^l = \\ = \{-F_1(0) + [F_1(x_1^k) - F_2(x_1^k)] + [F_2(x_2^k) - F_3(x_2^k)] + F_3(l)\}\delta U$$

где  $F_i(x)$  – обобщенный силовой фактор, а  $U$  – соответствующее ему обобщенное перемещение. Поэтому из условия произвольности вариаций  $\delta U$  из вариационного уравнения (3.11) следуют при  $x = 0, l$  концевые условия для стержня, а при  $x = x_1^k$  и  $x = x_2^k$  – условия сопряжения решений систем уравнений, описывающих напряженно-деформированное состояние стержня в смежных областях.

Естественные статические граничные условия при  $x = 0, l$  запишутся в общем случае так

$$\hat{N} = \hat{H} = \hat{M} = \hat{L} = \hat{M}' = \hat{L}' = 0 \quad (3.13)$$

Если концы стержня находятся в бездефектных областях, как показано на фигуре, то в условиях (3.13) соответствующие величины будут лишены верхнего индекса.

Если не равны нулю силовые факторы, то соответствующие кинематические концевые условия будут такими:

$$u = v = w = \alpha^3 = w' = v' = 0 \quad (3.14)$$

Кроме того, согласно (1.3), в вершинах расслоений должны выполняться следующие условия:

$$\tau^{k,3} = 0 \quad \text{при } x = x_1^k, x_2^k \quad (k = 1, 2) \quad (3.15)$$

Условия сопряжения решений при  $x_1^1 = x_1^2, x_2^1 = x_2^2$  имеют вид

$$N = N^3, \quad H = M^3, \quad M = \sum_{k=1}^3 M^k \\ M' = \sum_{k=1}^3 (M^k)' + c(\tau^{1,3} - \tau^{2,3}), \quad L = M^1 - M^2 + G^3 \quad (3.16)$$

$$L' = (M^1 - M^2 + G^3)' + \frac{1}{2}c(\tau^{1,3} + \tau^{2,3})$$

В левых частях равенств (3.16) указаны усилия и моменты в бездефектных областях при  $x \rightarrow x_1^k - 0$  и  $x \rightarrow x_2^k + 0$ , а в правых – усилия и моменты в области расслоений соответственно при  $x \rightarrow x_1^k + 0$  и  $x \rightarrow x_2^k - 0$ .

**4. Соотношения упругости.** Ввиду громоздкости полной системы соотношений упругости ограничимся случаем, когда области расслоений полностью совпадают. Тогда при учете соотношений (2.4)–(2.6), (3.4)–(3.6), (3.9) получим:

для бездефектной области

$$\hat{N} = Ehb[c_{16}u' + \frac{1}{2}h(c_{12}(\alpha^3)' - c_{15}w'' - c_{26}v'') + 2h^{-1}\gamma_3 t_3^{-1}v_{12}v] - N_t \\ \hat{H} = \frac{1}{2}Eh^2b[c_{12}u' + \frac{1}{2}h(c_{36}(\alpha^3)' - c_{46}w'' - c_{24}v'')] - H_t \\ \hat{M} = \frac{1}{2}Eh^2b[c_{15}u' + \frac{1}{2}h(c_{46}(\alpha^3)' - c_{66}w'' - c_{45}v'')] - M_t \\ \hat{L} = \frac{1}{2}Eh^2b[c_{26}u' + \frac{1}{2}h(c_{24}(\alpha^3)' - c_{45}w'' - c_{61}v'')] + \frac{1}{3}h^{-1}\gamma_3 v_{12}v] - L_t \quad (4.1)$$

$$E = h_k^{-1} \sum_{k=1}^3 E_k h_k, \quad \gamma_k = E_k h_k / Eh, \quad t_k = h_k / h$$

$$c_{12} = t_3(\gamma_1 - \gamma_2), \quad c_{13} = \gamma_1 t_1 - \gamma_2 t_2$$

$$c_{15} = c_{12} + c_{13}, \quad c_{16} = \gamma_1 + \gamma_2 + \nu_{11} \gamma_3$$

$$c_{23} = t_3(\gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2), \quad c_{24} = t_3(c_{13} + \frac{1}{2} c_{12})$$

$$c_{26} = t_3^{-1}(c_{23} + \frac{1}{2} c_{36}), \quad c_{33} = \frac{4}{3}(\gamma_1 t_1^2 + \gamma_2 t_2^2)$$

$$c_{34} = \frac{4}{3}(\gamma_1 t_1^2 - \gamma_2 t_2^2) + \frac{1}{3} t_3 c_{13}, \quad c_{36} = t_3^2(\gamma_1 + \gamma_2 + \frac{1}{3} \nu_{11} \gamma_3)$$

$$c_{45} = c_{24} + c_{34}, \quad c_{46} = c_{36} + c_{23}$$

$$c_{61} = c_{23} + c_{33} + \frac{1}{4} t_3^2(\gamma_1 + \gamma_2 + \frac{1}{5} \gamma_3 \nu_{11}), \quad c_{66} = c_{36} + 2c_{23} + c_{33}$$

где  $E$  – приведенный модуль упругости трехслойного пакета,  $\gamma_k$  – относительная безразмерная жесткость на растяжение  $k$ -го слоя,  $t_k$  – относительная толщина  $k$ -го слоя [2] ( $k = 1, 2, 3$ ):

в областях расслоений

$$\hat{N} = Ehb(\gamma_3 \nu_{11} u' - \frac{1}{2} hc_{64} \nu_{11} v'' + 2h^{-1} t_3^{-1} \gamma_3 \nu_{12} v) - T_3$$

$$\hat{H} = Eh^3 bc_{63}((\alpha^3)' - w'') - m_3$$

$$\hat{M} = \frac{1}{2} Eh^2 b[\gamma_1 t_1 u_1' - \gamma_2 t_2 u_2' + \frac{1}{2} h(c_{63}(\alpha^3)' - c_{56} w'' - c_{62} v'')] - \sum_{k=1}^3 m_k$$

$$\hat{L} = \frac{1}{2} Eh^2 b[\gamma_1 t_1 u_1' + \gamma_2 t_2 u_2' + c_{64} u' - \frac{1}{2} h(c_{62} w'' + c_{56} v'' + \frac{1}{3} h^{-1} \gamma_3 \nu_{12} v)] - (m_1 - m_2 + m_4)$$

$$N^1 = Ehb\gamma_1[u_1' - \frac{1}{2} ht_1(w + v)'] - T_1 \quad (4.2)$$

$$N^2 = Ehb\gamma_2[u_2' - \frac{1}{2} ht_2(w - v)'] - T_2$$

$$c_{56} = c_{33} + \frac{3}{5} c_{63}, \quad c_{62} = \frac{4}{3}(\gamma_1 t_1^2 - \gamma_2 t_2^2)$$

$$c_{63} = \frac{1}{12} \gamma_3 t_3^2 \nu_{11}, \quad c_{64} = \frac{1}{6} \gamma_3 t_3 \nu_{11}$$

При этом поперечные силы в заполнителе для всей области стержня таковы:

$$Q_x^3 = G_3 h b t_3 \alpha^3$$

$$Q_z^3 = E_3 h b \left( 2h^{-1} \nu_{11} v + t_3 \nu_{13} u' - \frac{1}{12} t_3^2 \nu_{13} v'' - h^{-1} \alpha_3 \nu_{2T} \int_{-c}^c T dz \right) \quad (4.3)$$

В соотношениях (4.1)–(4.3) последние слагаемые, характеризующие влияние температуры на напряженно-деформированное состояние трехслойного стержня при изгибе, имеют вид:

$$N_i = \sum_{k=1}^3 T_k, \quad H_i = c(T_1 - T_2) + m_3$$

$$M_i = \sum_{k=1}^3 m_k + c(T_1 - T_2), \quad L_i = m_1 - m_2 + m_4 + \frac{1}{2} c(T_1 + T_2) \quad (4.4)$$

где

$$T_k = Eb \frac{\alpha_k \gamma_k}{t_k h_k} \int T dz \quad (k = 1, 2), \quad T_3 = Eb \nu_{1T} \frac{\alpha_3 \gamma_3}{t_3} \int_{-c}^c T dz$$

$$m_1 = Eb \frac{\alpha_1 \gamma_1}{t_1} \int_c^{c+h_1} T(z-c) dz, \quad m_2 = Eb \frac{\alpha_2 \gamma_2}{t_2} \int_{-c-h_2}^{-c} T(z+c) dz$$

$$m_3 = Eb \nu_{1T} \frac{\alpha_3 \gamma_3}{t_3} \int_{-c}^c Tz dz, \quad m_4 = Eb \nu_{1T} \frac{\alpha_3 \gamma_3}{t_3} \int_{-c}^c Tz^2 dz$$

**5. Разрешающие системы уравнений.** Системы уравнений равновесия (3.12) при учете соотношений упругости (4.1)–(4.4) могут быть записаны относительно принятых обобщенных усилий и перемещений в удобной для численного решения нормальной форме Коши.

Соотношения упругости для случая, когда области расслоений перекрываются, после некоторых преобразований представляются в векторно-матричной форме

$$AX = d$$

$$X^T = \| \| u'_1, u'_2, u', (\alpha^3)', w'', v'' \| \| ^T \quad (5.1)$$

$$d = \left\| \begin{array}{l} -(N^1 + T_1) \\ N^2 + T_2 \\ -(\hat{N} + T_3 - \eta v) \\ -(\hat{H} + m_3) \\ \hat{M} + \sum_{k=1}^3 m_k \\ \hat{L} + m_1 - m_2 + m_4 - \frac{1}{2} t_3 \eta v \end{array} \right\|, \quad \eta = 2Eb t_3^{-1} \nu_{12} \gamma_3$$

где  $A$  – симметричная матрица жесткостных коэффициентов,  $X^T$  – транспонированный вектор неизвестных.

Разрешая систему (5.1), найдем вектор неизвестных в виде

$$X = Bd \quad (5.2)$$

Компоненты матриц  $A$ ,  $B$  и формулы для изолированных и бездефектных областей из-за громоздкости не приводятся.

Принимая для обобщенных усилий и перемещений обозначения

$$y_1 = N^1, \quad y_2 = u_1, \quad y_3 = N^2, \quad y_4 = u_2$$

$$y_5 = \hat{N}, \quad y_6 = u, \quad y_7 = \hat{H}, \quad y_8 = \alpha^3$$

$$y_9 = \hat{M}, \quad y_{10} = w', \quad y_{11} = \hat{M}', \quad y_{12} = w$$

$$y_{13} = \hat{L}, \quad y_{14} = v', \quad y_{15} = \hat{L}'', \quad y_{16} = v$$

получим разрешающие системы уравнений изгиба трехслойного стержня для различных областей в нормальной форме Коши

$$y'_i = f_i(y_j, q_1, q_2, T) \quad (5.3)$$

где  $i, j = 1, 2, \dots, 16$  для областей стержня с расслоением и  $i, j = 1, 2, \dots, 12$  для бездефектных областей. Решение систем уравнений (5.3) может быть получено любым устойчивым численным методом, например методом ортогональной прогонки.

Отметим, что представленная модель деформирования неравномерно нагретых трехслойных стержней допускает естественное обобщение на случай пластин и полых оболочек. При этом число основных неизвестных в области расслоений повышается с 16 в одномерном случае до 24 в двумерном.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э.И., Коган Е.А., Мамай В.И. Проблемы деформирования тонкостенных слоистых конструкций с расслоением // Изв. РАН. МТТ. 1994. № 2. С. 6–32.
2. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. М.: Машиностроение, 1973. 170 с.
3. Пелех Б.Л., Максимук А.В., Коровайчук И.М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. Киев: Наук. думка., 1988. 280 с.
4. Иванов А.В., Чулков П.П. Учет поперечных деформаций заполнителя в задачах устойчивости трехслойных пластин с различными несущими слоями // Изв АН СССР. МТТ. 1969. № 6. С. 101–107.
5. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчета на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 526 с.
6. Ржаницын А.Р. Теория составных стержней строительных конструкций. М.: Стройиздат, 1948. 192 с.

Москва

Поступила в редакцию  
31.V.1994