УДК (539.3;62–50):534.1

© 1995 г. Д.В. Баландин

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ГАШЕНИИ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ОБЪЕКТОВ

Рассматриваются задачи оптимального (в смысле интегрального квадратичного функционала) управления колебаниями упругого объекта, вызванными возмущениями из определенного класса. Исследуются два типа задач: о предельных возможностях управления и о минимуме гарантированного результата. Показано, что минимум гарантированого результата ограничен снизу решением задачи о предельных возможностях управления. Предлагаются способы решения указанных задач, а также примеры расчетов для конкретной упругой системы.

К настоящему времени разработаны достаточно эффективные методы нахождения оптимального управления колебаниями упругих объектов в случае, когда все характеристики объекта и действующего на него внешнего возмущения полностью известны [1–4]. Однако во многих задачах оптимального гашения колебаний упругих конструкций полная информация о возмущении обычно отсутствует. Если известно лишь множество, содержащее эти возмущения, то целесообразна постановка оптимальных задач по принципу минимума гарантированного результата [5]. При расчете реальных систем управления важно предварительно оценить их предельные возможности. Когда управление рассчитывается, исходя из принципа минимума гарантированного результата, оценку предельных возможностей управления следует проводить с учетом всего множества внешних возмущений, действующих на управляемый объект.

1. Постановка задач. Рассмотрим упругий объект [6], описываемый начально-краевой задачей

$$\rho(x)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+B\frac{\partial z}{\partial t}+Cz=q^{\mathrm{T}}(x)u+r^{\mathrm{T}}(x)\upsilon(t) \tag{1.1}$$

$$z(x,t_0)=\dot{z}(x,t_0)=0 \tag{1.2}$$

$$H_\alpha z|_\Gamma=0, \quad \alpha=1,2,\ldots,a \tag{1.3}$$

Здесь $z(x, t)$ – отклонение упругого тела от состояния равновесия в точке $x \in \Omega$ при $t \in [t_0, \infty)$; Ω – ограниченная в R^n область с достаточно гладкой границей Γ, занимаемая объектом; B, C – линейные дифференциальные операторы порядка $2a$; $\rho(x)$ – непрерывная положительная функция, характеризующая плотность упругого объекта; u, υ – m- и k-мерные векторы-столбцы, характеризующие управляющие воздействия и внешнее возмущение, $q^{\mathrm{T}}(x)$, $r^{\mathrm{T}}(x)$ – m- и k-мерные векторы-строки, характеризующие соответственно интенсивность управления и возмущения в точке x области Ω; H_α – линейные дифференциальные операторы порядка не выше, чем порядок оператора C.

Предполагается, что жесткостной оператор C и оператор демпфирования B связаны линейной зависимостью $B = bC$, где b – положительное число. Будем считать, что оператор C ограниченный, симметричный и положительно-определенный в соответствующем пространстве Соболева функций, удовлетворяющих краевым условиям

(1.3). Далее предположим, что $\upsilon(t)$ – кусочно-непрерывная вектор-функция, каждая компонента которой – абсолютно-интегрируемая на $[0, \infty)$ функция. Кроме того, выполяются условия

$$\upsilon(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t < 0; \quad \int_0^\infty \upsilon^\tau P_0 \mathrm{v} dt \leqslant S_0^2 \tag{1.4}$$

Здесь P_0 – положительно-определенная симметрическая $(k \times k)$-матрица. Функции $\upsilon(t)$, задающие внешние возмущения и удовлетворяющие указанным выше условиям, будем относить к классу S. Относительно вектор-функции $u = u(t)$ будем предполагать, что она кусочно-непрерывна и каждая ее компонента абсолютно интегрируема на $(-\infty, \infty)$. Будем также считать допустимым, что "идеальное управление", обладая возможностью упреждения внешнего возмущения, может включаться в любой момент времени $t_0 < 0$, предшествующий началу действия возмущений, а при $t < t_0$ справедливо тождество $u(t) \equiv 0$. Функции $u(t)$, определяющие управление и удовлетворяющие указанным условиям, будем относить к классу D.

Будем полагать, что каждая компонента вектор-функции $q(x)$ есть дельта-функция Дирака $\delta(x - x_p)$, $x_p \in \Omega$. Физически это означает, что управление сосредоточено в заданном конечном числе точек упругого объекта. Вектор-функция $r(x)$ задает распределение внешних возмущений, действующих на упругий объект. Функция $r(x)$ предполагается ограниченной и интегрируемой на Ω.

Функционал, характеризующий виброактивность упругого объекта и определенный на прямом произведении $D \times S$, примем в виде

$$W[u(\cdot), \upsilon(\cdot)] = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt \tag{1.5}$$

$$w(t) = \int_\Omega \left\{ z(x,t) C z(x,t) + \rho(x) \left[\frac{\partial z(x,t)}{\partial t} \right]^2 \right\} dx$$

причем функция $w(t)$, с точностью до постоянного множителя совпадает с сумой кинетической и потенциальной энергии колебаний упругого объекта.

Сформулируем теперь задачи оптимального гашения колебаний упругого объекта. Задача 1 (задача о предельных возможностях управления) заключается в определении величины

$$W^0 = \sup_{\upsilon(\cdot) \in S} \inf_{u(\cdot) \in D} W[u(\cdot),\ \upsilon(\cdot)] \tag{1.6}$$

Таким образом, для решения задачи 1 требуется вначале для каждого возмущения из класса S определить оптимальное управление, минимизирующее функционал (1.5), затем максимизировать его по всем воздействиям $\upsilon(t)$.

Для формулировки задачи 2 (задача оптимизации гарантированного качества) дополнительно определим класс управлений D_1. В отличие от класса D в класс D_1 будем включать только такие управления, которые могут быть в принципе реализованы. Предполагается, что, во-первых, управлений начинает действовать одновременно с началом действия внешнего возмущения в момент $t_0 = 0$, во-вторых, управление u можно определить в любой момент времени $t^* > 0$, располагая информацией о воздействии $\upsilon(t)$ и состоянии упругого объекта лишь на отрезке времени $[0, t^*]$. В частности, в указанный класс входит широко распространенное управление типа обратной связи. В общем же случае соотношение между управлением u, возмущением $\upsilon(t)$ и состоянием упругого объекта $\{z(x, t), \dot{z}(x, t)\}$ выражается функциональной связью.

Для любого воздействия $\upsilon(t)$ из класса S, разрешая начально-краевую задачу (1.1)–(1.3) с управлением из класса D_1, можно выразить управление u как функцию времени t. Дополнительно ограничивая класс D_1, будем полагать, что полученные указанным способом функции $u(t)$ – кусочно-непрерывные вектор-функции с абсолютно интегрируемыми на $[0, \infty)$ компонентами.

Сформулируем теперь задачу 2: найти управление $u^0(\cdot) \in D_1$, такое, что

$$\sup_{\upsilon(\cdot)\in S} W[u^0(\cdot),\ \upsilon(\cdot)] = \inf_{u(\cdot)\in D_1} \sup_{\upsilon(\cdot)\in S} W[u(\cdot),\upsilon(\cdot)] \tag{1.7}$$

Выясним далее, в каком отношении находятся задачи 1 и 2. Имеем

$$\sup_{\upsilon(\cdot)\in S}\inf_{u(\cdot)\in D} W[u(\cdot),\upsilon(\cdot)] \leqslant \sup_{\upsilon(\cdot)\in S}\inf_{u(\cdot)\in D_1} W[u(\cdot),\upsilon(\cdot)]$$

Воспользовавшись известным в теории антагонистических игр неравенством [7], связывающим максимин и минимакс, получим

$$\sup_{\upsilon(\cdot)\in S}\inf_{u(\cdot)\in D_1} W[u(\cdot),\upsilon(\cdot)] \leqslant \inf_{u(\cdot)\in D_1}\sup_{\upsilon(\cdot)\in S} W[u(\cdot),\upsilon(\cdot)]$$

Обозначив

$$\inf_{u(\cdot)\in D_1}\sup_{\upsilon(\cdot)\in S} W[u(\cdot),\upsilon(\cdot)] = W_*^0$$

окончательно получим $W^0 \leqslant W_*^0$. Иными словами, величина гарантированного результата W_*^0 не может быть меньше величины W^0, дающей решение задачи о предельных возможностях управления.

2. Задача 1. Будем искать решение начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) в виде ряда по собственным функциям соответствующей краевой задачи:

$$Cf(x) = \lambda\rho(x)f(x),\quad (H_\alpha f)|_\Gamma = 0,\quad \alpha = 1,2,\dots,a$$

Известно [8], что такая задача имеет счетное число собственных значений λ_μ, которым соответствует семейство собственных функций $f_\mu(x)$, образующих полную систему в соответствующем пространстве Соболева. Заметим также, что в силу положительной определенности оператора C, для собственных функций $f_\mu(x)$ и $f_\nu(x)$, отвечающих различным собственным значениям, имеем

$$\int_\Omega \rho(x)f_\mu(x)f_\nu(x)dx = 0$$

Соответствующей нормировкой собственных функций можно добиться, что

$$\int_\Omega \rho(x)f_\mu^2(x)dx = 1$$

Итак, решение задачи (1.1)–(1.3) представимо в виде ряда

$$z(x,t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} T_\mu(t)f_\mu(x)$$

Подставляя ряд в уравнение (1.1), умножая обе части уравнения последовательно на $f_\mu(x)$ (μ = 1, 2,...) и, интегрируя его по всей области Ω, получим счетную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{T}_\mu + b\lambda_\mu \dot{T}_\mu + \lambda_\mu T_\mu = Q_\mu^{\text{т}}u(t) + R_\mu^{\text{т}}\upsilon(t),\quad \mu \geqslant 1 \tag{2.1}$$

с начальными условиями $T_\mu(t_0) = \dot{T}_\mu(t_0) = 0$, где векторы-строки $Q_\mu^{\text{т}}$ и $R_\mu^{\text{т}}$ определяются равенствами

$$Q_\mu^{\text{т}} = \int_\Omega f_\mu(x)q^{\text{т}}(x)dx,\quad R_\mu^{\text{т}} = \int_\Omega f_\mu(x)r^{\text{т}}(x)dx,\quad \mu \geqslant 1$$

Функция $w(t)$, фигурирующая в (1.5), примет вид

$$w(t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} [\dot{T}_\mu^2 + \lambda_\mu T_\mu^2]$$

Далее для решения задачи 1 используется способ, изложенный в [9]. Умножим каждое из уравнений (2.1) на exp $(-i\omega t)$ и проинтегрируем полученные соотношения по переменной t на бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$. В изображениях по Фурье получим соотношения

$$(-\omega^2 + ib\omega\lambda_\mu + \lambda_\mu)\theta_\mu(\omega) = Q_\mu^{\mathrm{T}} Y(\omega) + R_\mu^{\mathrm{T}} V(\omega), \quad \mu \geqslant 1 \tag{2.2}$$

Здесь $\theta_\mu(\omega)$, $Y(\omega)$, $V(\omega)$ – изображения по Фурье функций $T_\mu(t)$ и вектор-функций $u(t)$, $\upsilon(t)$. Для дальнейшего удобно записать систему (2.2) в матричной форме

$$\Lambda\Theta(\omega) = QY(\omega) + RV(\omega) \tag{2.3}$$

где Λ – бесконечномерная диагональная матрица с элементами $(-\omega^2 + ib\omega\lambda_\mu + \lambda_\mu)$, $\Theta(\omega)$ – бесконечномерный вектор-столбец с элементами $\theta_\mu(\omega)$, Q и R – матрицы с бесконечным числом строк, каждая из которых есть соответственно вектор-строка Q_μ^{T} и R_μ^{T}.

Обозначим ξ_j столбцы матрицы Q, а $y_j(\omega)$ – элементы вектора-столбца $Y(\omega)$ (здесь $j = 1, 2,..., m$). Рассмотрим случай, когда среди всех m столбцов $\xi_j m_1$ из них являются линейно независимыми, а остальные $m - m_1$ представляют собой линейные комбинации вида

$$\xi_j = \sum_{l=1}^{m_1} C_{jl}\xi_l, \quad m_1 \leqslant j \leqslant m \tag{2.4}$$

Без ограничения общности будем считать линейно независимыми m_1 первых столбцов ξ_j. Тогда

$$QY(\omega) = \sum_{j=1}^{m} \xi_j y_j(\omega) = \sum_{j=1}^{m_1} \xi_j y_j(\omega) + \sum_{j=m_1+1}^{m} \xi_j y_j(\omega)$$

Используя (2.4), окончательно получим

$$QY(\omega) = \sum_{j=1}^{m_1} \xi_j \left[y_j(\omega) + \sum_{l=m_1+1}^{m} C_{lj} y_l(\omega) \right] = Q_0 U(\omega)$$

где Q_0 – матрица, в которой столбцы линейно-независимы, а $U(\omega)$ – вектор-столбец с компонентами

$$\tilde{y}_j(\omega) = y_j(\omega) + \sum_{l=m_1+1}^{m} C_{lj} y_l(\omega), \quad j = 1, \ldots, m_1 \tag{2.5}$$

Заметим, что если все столбцы исходной матрицы Q линейно независимы, то $Q_0 = Q$, $U(\omega) = Y(\omega)$.

Итак, система (2.3) примет вид

$$\Lambda\Theta(\omega) = Q_0 U(\omega) + RV(\omega) \tag{2.6}$$

Исключим из дальнейшего рассмотрения случай, когда все элементы матрицы Q нулевые. Это означает, что исходная система по существу неуправляема. Такая ситуация возникает, например, когда управления действуют в закрепленных точках границы Г упругого объекта.

Из системы (2.6) найдем

$$\Theta(\omega) = \Lambda^{-1}[Q_0 U(\omega) + RV(\omega)]$$

Используя равенство Парсеваля [10], при учете последнего соотношения получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)d\omega$$

где

$$G(\omega) = U^{\mathrm{T}} F_1 U^* + V^* F_2 V + U^{\mathrm{T}} F_3 V^* + V^{\mathrm{T}} F_4 U^* \tag{2.7}$$

(верхний индекс T означает операцию транспонирования, звездочка указывает на комплексно-сопряженную величину), при этом $F_1 = Q_0^{\mathrm{T}} \Lambda_0 Q_0$,, $F_2 = R^{\mathrm{T}} \Lambda_0 R$, $F_3 = F_4^{\mathrm{T}} = Q_0 \Lambda_0 R$, а диагональная бесконечномерная матрица Λ_0 имеем элементы $(\omega^2 + \lambda_\mu) \times [(\omega^2 - \lambda_\mu)^2 + (b\lambda_\mu\omega)^2]^{-1}$.

Минимизируем правую часть (2.7) по U. Определим частные производные G по U и U^*:

$$\frac{\partial G}{\partial U} = F_1 U^* + F_2 V^*, \quad \frac{\partial G}{\partial U^*} = F_1^{\mathrm{T}} U + F_4^{\mathrm{T}} V$$

Приравнивая полученные соотношения нулю, получим

$$U^* = -F_1^{-1} F_3 V^*, \quad U = -(F_1^{\mathrm{T}})^{-1} F_4^{\mathrm{T}} V \tag{2.8}$$

Обозначим $F_0 = -F_1^{-1} F_3 = -(F_1^{\mathrm{T}})^{-1} F_4^{\mathrm{T}}$. Заметим, что выражения (2.8) имеют смысл лишь в случае, если матрица F_1 невырожденная.

Покажем, что это в самом деле так. Введем бесконечномерную диагональную матрицу Λ_1 такую, что $\Lambda_1 \Lambda_1 = \Lambda_0$. Определим также матрицу $Q_1 = \Lambda_1 Q_0$. Заметим, что если столбцы матрицы Q_0 линейно-независимы, то и столбцы матрицы Q_1 линейно-независимы. В то же время $F_1 = Q_1^{\mathrm{T}} Q_1$ – матрица Грама [11], определитель которой отличен от нуля в силу линейной независимости столбцов Q_1. Следовательно, матрица F_1 невырожденная.

Таким образом, при любом ω выражение (2.7) принимает экстремальное значение, если функция U определена в соответствии с (2.8). Для выяснения характера этого экстремума найдем

$$\frac{\partial^2 G}{\partial U^2} = \frac{\partial^2 G}{(\partial U^*)^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial U \partial U^*} = F_1$$

Покажем, что F_1 – положительно-определенная матрица. В самом деле, при $V = 0$ по определению $G(\omega)$ эрмитова форма $U^{\mathrm{T}} F_1 U^* \geqslant 0$. Следовательно, все главные миноры матрицы F_1 неотрицательны [11]. С другой стороны, по критерию Грама [11] они не равны нулю. Значит, главные миноры матрицы F_1 положительны. Отсюда по критерию Сильвестра следует положительная определенность F_1. Следовательно, полученный экстремум есть минимум.

Подставляя (2.8) в (2.7), найдем

$$G(\omega) = V^{\mathrm{T}} G_0(\omega) V^*, \quad G_0(\omega) = F_2 - F_3^{\mathrm{T}} F_1^{-1} F_3$$

Анализ матриц G_0 и F_0 показывает, что их элементы – непрерывные ограниченные на $(-\infty, \infty)$ функции ω. Значит, комплексная вектор-функция $U(\omega)$ из соотношений (2.7) – фурье-образ некоторой вектор-функции $\tilde{u}_0(t)$, по которой можно, используя (2.5), определить m-мерную вектор-функцию $u_0(t)$, задающую управление в (1.1).

Для нахождения $u_0(t)$ по известной $\tilde{u}_0(t)$ можно поступить, например, следующим образом: первые m_1 компонент $u_0(t)$ положить равными компонентам $\tilde{u}_0(t)$, а последующие $m - m_1$ компонент $u_0(t)$ положить равными нулю.

Итак, справедливо неравенство

$$\inf_{u(\cdot)\in D} W[u(\cdot),\upsilon(\cdot)] \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V^{\mathrm{T}} G_0(\omega) V^* d\omega$$

Если $u_0(t)$ принадлежит классу D, то последнее неравенство переходит в равенство. Однако $u_0(t)$ может и не принадлежать классу D.

В самом деле, функция

$$\tilde{u}_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_0(\omega)V(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

может быть, вообще говоря, отлична от тождественного нуля при $t < t_0$ для любого конечного значения t_0. Следовательно, соответствующая вектор-функция $u_0(t)$ не принадлежит D.

В этом случае построим минимизирующую последовательность функций

$$\tilde{u}_\varepsilon(t) = \begin{cases} \tilde{u}_0(t), & t \geqslant t_0^\varepsilon \\ 0, & t < t_0^\varepsilon \end{cases}$$

где t_0^ε определяется уравнением

$$\int_{-\infty}^{t_0^\varepsilon} \|\tilde{u}_0(t)\|_1\, dt = \varepsilon$$

($\|\cdot\|_1$ – норма вектора). Определим фурье-образ функции $\tilde{u}_\varepsilon(t)$:

$$U_\varepsilon(\omega) = U(\omega) + \Omega_\varepsilon(\omega) = F_0(\omega)V(\omega) + \Omega_\varepsilon(\omega)$$

$$\left(\Omega_\varepsilon(\omega) = -\int_{-\infty}^{t_0^\varepsilon} \tilde{u}_0(t)e^{-i\omega t}dt\right)$$

Отсюда следует $\|\Omega_\varepsilon(\omega)\|_1 \leqslant \varepsilon$. Подставляя $U_\varepsilon(\omega)$ в (2.7), получим

$$G(\omega) = V^{\mathrm{T}}(\omega)G_0(\omega)V^*(\omega) + \Omega_\varepsilon^{\mathrm{T}}(\omega)F_1(\omega)\Omega_\varepsilon^*(\omega)$$

Итак,

$$W[\tilde{u}_\varepsilon(\cdot),\upsilon(\cdot)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V^{\mathrm{T}}(\omega)G_0(\omega)V^*(\omega)d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Omega_\varepsilon^{\mathrm{T}}(\omega)F_1(\omega)\Omega_\varepsilon^*(\omega)d\omega$$

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Omega_\varepsilon^{\mathrm{T}}(\omega)F_1(\omega)\Omega_\varepsilon^*(\omega)d\omega \leqslant \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty}\|F_1(\omega)\|_1\, d\omega$$

а интеграл в правой части этого неравенства, как показывает несложный анализ, сходится, то, устремляя ε к нулю, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} W[\tilde{u}_\varepsilon(\cdot),\upsilon(\cdot)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} V^{\mathrm{T}}(\omega)G_0(\omega)V^*(\omega)d\omega = \inf_{u(\cdot)\in D} W[u(\cdot),\upsilon(\cdot)]$$

а искомая в задаче 1 величина

$$W^0 = \frac{1}{2\pi} \sup_{\upsilon(\cdot)\in S} \int_{-\infty}^{\infty} V^{\text{т}}(\omega) G_0(\omega) V^*(\omega) d\omega$$

Займемся теперь максимизацией последнего интеграла по $\upsilon(\cdot) \in S$.

Используя неравенство (1.4) и равенство Парсеваля, будем иметь

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V^{\text{т}}(\omega) P_0 V^*(\omega) d\omega \leq S_0^2$$

Рассмотрим две эрмитовы формы $V^{\text{т}}(\omega)G_0(\omega)V^*(\omega)$ и $V^{\text{т}}(\omega)P_0V^*(\omega)$. Так как матрица P_0 – положительно определенная, то существует [11] матрица $\Phi(\omega)$, задающая преобразование эрмитовой формы G_0 к сумме квадратов, а P_0 – к каноническому виду. Заметим, что матрица $\Phi(\omega)$ имеет действительные элементы, поскольку матрица $G_0(\omega)$ с действительными элементами. Итак, имеем

$$V(\omega) = \Phi(\omega)\Xi(\omega), \quad V^{\text{т}}(\omega) G_0(\omega) V^*(\omega) = \Xi^{\text{т}}(\omega)\Psi(\omega)\Xi^*(\omega)$$

$$V^{\text{т}}(\omega) P_0 V^*(\omega) = \Xi^{\text{т}}(\omega)\Xi^*(\omega)$$

Здесь $\Psi(\omega)$ – диагональная матрица с элементами $\Psi_j(\omega)$ ($j = 1, 2,..., k$).

Пусть при $j = l$ и $\omega = \omega_0$ достигается максимальное значение

$$\Psi^+ = \max_{j=[1,k]} \max_{\omega\in(-\infty,\infty)} \Psi_j(\omega)$$

Тогда [9] можно показать, что искомое решение задачи 1

$$W^0 = S_0^2 \Psi^+$$

В заключение данного раздела кратко сформулируем основные этапы решения задачи о предельных возможностях управления.

1) найти собственные числа λ_μ и собственные функции $f_\mu(x)$ краевой задачи;

2) составить матрицы Q и R;

3) отбрасывая линейно зависимые столбцы в матрице Q, сформировать матрицу Q_0;

4) найти матрицу $G_0(\omega)$;

5) найти преобразование $\Phi(\omega)$, приводящее матрицу $G_0(\omega)$ к диагональному виду;

6) определить величину Ψ^+.

При численном решении задачи, разумеется, придется, исходя из заданной точности, ограничиться конечным набором собственных функций краевой задачи.

3. Задача 2. Решить задачу 2 в общем виде в классе управлений D_1 не удается. Ограничимся частными случаями. Рассмотрим параметрическое семейство линейных управлений вида

$$u_j = -\gamma_j \dot{z}(x_j, t) - \sigma_j z(x_j, t) \quad (j = 1, 2, ..., m) \tag{3.1}$$

где γ_j, σ_j – неотрицательные параметры, x_j – точка упругого объекта, на которую действует управление u_j. После перехода от краевой задачи к уравнениям типа (2.1) получим

$$T_\mu^{\cdot\cdot} + b\lambda_\mu T_\mu^{\cdot} + \lambda_\mu T_\mu = -\sum_{\nu=1}^{\infty} [T_\nu^{\cdot} \sum_{j=1}^{m} Q_{\mu j} Q_{\nu j} \gamma_j + T_\nu \sum_{j=1}^{m} Q_{\mu j} Q_{\nu j} \sigma_j] + R_\mu^{\text{т}} \upsilon(t) \tag{3.2}$$

где $Q_{\mu j} = f_\mu(x_j)$.

Задача 2 принимает вид: найти параметры γ_j^0 и σ_j^0 такие, что

$$\sup_{\upsilon(\cdot)\in S} W[\gamma^0, \sigma^0, \upsilon(\cdot)] = \inf_{\gamma,\sigma\geq 0} \sup_{\upsilon(\cdot)\in S} W[\gamma, \sigma, \upsilon(\cdot)]$$

Здесь γ и σ – m-мерные векторы с компонентами $\{\gamma_j\}$ и $\{\sigma_j\}$.

Для построения приближенного решения ограничимся конечным числом N уравнений в системе (3.2). В дальнейшем удобно такую систему записать в векторной форме:

$$T^{\cdot\cdot} + B^N T^{\cdot} + C^N T = R^N \upsilon(t) \tag{3.3}$$

T – вектор-столбец с компонентами $\{T_1,..., T_N\}$; B^N и C^N – $(N \times N)$ – симметрические матрицы, элементы которых $b_{\mu\nu}^N$ и $c_{\mu\nu}^N$ определяются следующим образом:

$$b_{\mu\nu}^N = b\lambda_\nu \delta_{\mu\nu} + \sum_{j=1}^{m} Q_{\mu j} Q_{\nu j} \gamma_j, \quad c_{\mu\nu}^N = \lambda_\mu \delta_{\mu\nu} + \sum_{j=1}^{m} Q_{\mu j} Q_{\nu j} \sigma_j$$

где $\delta_{\mu\nu}$ – символ Кронекера, R^N – $(N \times k)$-матрица, каждая строка которой равна

$$R_\mu^{\mathrm{T}} = \int_\Omega f_\mu(x) r^{\mathrm{T}}(x) dx, \quad \mu = 1,2,...,N$$

Переходя в системе (3.3) к изображениям по Фурье и повторяя рассуждения, аналогичные проведенным выше, получим

$$W_S[\gamma,\sigma] = \sup_{\upsilon(\cdot)\in S} W[\gamma,\sigma,\upsilon(\cdot)] = S_0^2 \max_{\omega\in(-\infty,\infty)} \max_{l\in(1,k)} \Psi_l^0(\omega)$$

где $\Psi_l^0(\omega)$ – диагональные элементы диагональной матрицы $\Psi^0(\omega)$, полученной из матрицы $A(\omega)$ путем одновременного приведения эрмитовых форм $V^{\mathrm{T}}A(\omega)V^*$ и $V^{\mathrm{T}}P_0V^*$ к сумме квадратов и каноническому виду. Здесь

$$A(\omega) = (R^N)^{\mathrm{T}} \Gamma_0^{\mathrm{T}}(\omega) L_0(\omega) \Gamma_0^*(\omega) R^N$$

$$\Gamma_0^{-1}(\omega) = (-\omega^2 E + i\omega B^N + C^N), \quad L_0(\omega) = \omega^2 E + L_1$$

(E – единичная матрица, L_1 – диагональная матрица с элементами λ_μ, $\mu = 1, 2,..., N$).

Таким образом, построена функция $W_S[\gamma, \sigma]$ параметров γ, σ. Для решения задачи 2 эту функцию требуется минимизировать по γ, σ. Заметим, что функция $W_S[\gamma, \sigma]$ является негладкой, поэтому для минимизации целесообразно воспользоваться методами недифференцируемой оптимизации [12]. Обозначим

$$W_S^0 = \inf_{\gamma,\, \sigma \geqslant 0} W_S[\gamma,\sigma]$$

и введем отношение

$$\alpha_0 = W_S^0 / W^0 \geqslant 1$$

которое показывает, в какой степени показатель гарантированного качества, обеспечиваемый управлением вида (3.1), близок к предельно возможному значению W^0.

Другой случай связан с управлением вида:

$$u = \chi\upsilon \tag{3.4}$$

где χ – постоянная $(m \times k)$-матрица. После перехода от краевой задачи к уравнениям типа (2.1) получим

$$T_\mu^{\cdot\cdot} + b\lambda_\mu T_\mu^{\cdot} + \lambda_\mu T_\mu = (Q_\mu^{\mathrm{T}}\chi + R_\mu^{\mathrm{T}})\upsilon(t) \tag{3.5}$$

Задача 2 принимает вид: найти элементы матрицы χ^0, такие, что

$$\sup_{\upsilon(\cdot)\in S} W[\chi^0,\upsilon(\cdot)] = \inf_{\chi} \sup_{\upsilon(\cdot)\in S} W[\chi,\upsilon(\cdot)]$$

Для построения приближенного решения, как и в предыдущем случае, ограничимся конечным числом N уравнений в системе (3.5). Переходя в укороченной системе к изображениям по Фурье и повторяя рассуждения, аналогичные проведенным выше, будем иметь

$$W_+[\chi] = S_0^2 \sup_{\upsilon(\cdot)\in S} W[\chi,\upsilon(\cdot)] = S_0^2 \max_{\omega\in(-\infty,\infty)} \max_{l\in(1,k)} \Psi_l^+(\omega)$$

где $\Psi_l^+(\omega)$ – диагональные элементы матрицы $\Psi^+(\omega)$, полученной из матрицы $A_+(\omega)$ путем одновременного приведения эрмитовых форм $V^{\text{т}}A_+(\omega)V^*$ и $V^{\text{т}}P_0V^*$ к сумме квадратов и каноническому виду. При этом

$$A_+(\omega) = (R_+^N)^{\text{т}}\Gamma_+^{\text{т}}(\omega)L_0(\omega)\Gamma_+^*(\omega)R_+^N,$$

$\Gamma_+^{-1}(\omega)$ – диагональная матрица с элементами, равными $-\omega^2 + i\omega b\lambda_\mu + \lambda_\mu$, ($\mu = 1, 2,\ldots, N$), R_+^N – ($N\times k$)-матрица, каждая строка которой – вектор-строка $Q_\mu^{\text{т}}\chi + R_\mu^{\text{т}}$, ($\mu = 1, 2,\ldots, N$). Итак, построена функция $W_+[\chi]$. Для решения задачи 2 требуется провести минимизацию по элементам матрицы χ. Обозначим

$$W_+^0 = \inf_{\chi} W_+[\chi]$$

и введем отношение

$$\alpha_+ = W_+^0 / W^0 \geqslant 1$$

имеющее такой же смысл, как и α_0.

Отметим, что два рассмотренных типа управления (3.1) и (3.4) отвечают двум принципиально различным подходам к проблеме снижения виброактивности объектов, известных в теории виброзащитных систем, как пассивная и активная виброизоляция. Очевидно, возможны и другие способы задания управления.

Далее приводить подобные примеры не будем, заметим лишь, что по характеру зависимости управления от деформации, скорости деформации упругого объекта и внешнего возмущения все возможные виды управляющих воздействий можно разделить на линейные и нелинейные. В случае линейных управлений применима схема решения задачи 2, изложенная выше. В случае же нелинейных управлений решить задачу 2 в исходной постановке не удается. Однако можно поступить следующим образом. Вместо исходного класса воздействий S выберем конечный набор S_q внешних возмущений, удовлетворяющих условиям (1.4). Такой прием часто встречается в инженерной практике, когда исследуются нелинейные системы. Возмущения из конечного набора S_q обычно называются расчетными.

Итак, если задано параметрическое семейство нелинейных управлений, то способ решения задачи 2 состоит в численном определении функционала на множестве S_q с последующей минимизацией получаемой таким образом функции параметров, определяющих управление. Подчеркнем, что после приведения уравнения в частных производных к конечномерной системе будем иметь нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому вычисление функционала придется проводить путем численного интегрирования этой системы. Такая оптимизационная задача при достаточно большом числе расчетных возмущений, составляющих S_q, становится трудоемкой в вычислительном отношении. Однако следует иметь в виду, что в данном случае можно легко найти предельно возможное значение оптимума.

В самом деле, определяя для любого расчетного возмущения из S_q его фурье-образ и используя изложенный выше подход, можно решить задачу о предельных возможностях управления на классе возмущений S_q.

Конечно, наличие такой оценки не снимает вычислительных трудностей решения оптимизационной задачи. Тем не менее оценка служит определенным ориентиром и позволяет более эффективно организовать процесс оптимизации.

Заметим, что полученные в результате решения задач 1, 2 величины W^0, W_S^0, W_+^0 зависят от точек x_j ($j = 1, 2,..., m$) упругого тела, на которые действует управление. Таким образом, наряду с рассмотренными выше задачами можно дополнительно поставить задачу об оптимальном расположении управляющих устройств. В сочетании, например, с задачей 1 она будет иметь вид: найти x_j^0, такие, что

$$W^0(x_j^0) = \min_{x_j \in \Omega} W^0(x_j^0)$$

4. Пример. Рассмотрим однородную упругую струну с внутренним демпфированием. Один конец струны закреплен на некотором твердом теле (называемом далее основанием), движущемся прямолинейно по заданному закону. Второй конец струны свободный. Кроме того, одна из точек струны с координатой x_0 соединена посредством управляющего устройства с основанием. Будем исследовать поперечные колебания струны. В этом случае дифференциальный оператор $C = -c\partial^2/\partial x^2$, а уравнения поперечных колебаний струны имеют вид

$$\rho\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - b\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2 \partial t} - c\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = q(x)u + \rho\upsilon$$

Здесь $Z(x, t)$ – величина поперечного смещения точки струны с координатой x в момент времени t, ρ – плотность струны, положительные параметры b и c характеризуют внутреннее демпфирование и упругость струны; $q(x) = \delta(x - x_0)$ ($x_0 \in (0, L]$, L – длина струны); $\upsilon = \upsilon(t)$ – внешнее возмущение, с точностью до знака совпадающее с ускорением основания. Краевые условия имеют вид: $Z(0, t) = Z_x'(L,t) = 0$. Матрица P_0, фигурирующая в (1.4), имеет единственный элемент, равный единице.

Заменой переменных

$$Z = LZ^{\sim}, \quad x = Lx^{\sim}, \quad t = (\rho / c)^{1/2} Lt^{\sim}$$

с последующим опусканием индекса ~ уравнения движения приведем к виду

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \beta\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + q(x)u + \upsilon(t), \quad Z(0,t) = Z_x'(1,t) = 0.$$

Неравенство (1.4) запишется следующим образом:

$$\int_0^\infty \upsilon^2(t)dt \leqslant \eta_0^2, \quad \beta = b(\rho c)^{-1/2} L^{-1}, \quad \eta_0^2 = S_0^2 L\left(\frac{\rho}{c}\right)^{3/2}$$

Подынтегральная функция $w(t)$ из (1.5) будет иметь вид

$$w(t) = \int_0^1 [(Z^{\cdot}(x,t))^2 + (Z_x'(x,t))^2]dx$$

а функционал

$$W[u(\cdot),\upsilon(\cdot)] = \kappa_0 \int_{-\infty}^{\infty} w(t)dt, \quad \kappa_0 = L^2(\rho c)^{1/2}$$

Приведем результаты численного решения задачи 1. Без ограничения общности положим $\eta_0^2\kappa_0 = 1$. Считая, что $\beta = 0{,}1$, приведем значения W^0 в зависимости от параметра x_0:

x_0	0	0,01	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
W_0	26,6	9,23	1,12	0,475	0,123	0,0466	0,0975	0,146

Значения $x_0 = 0$ отвечает отсутствию управления в системе.

Как следует из приведенных результатов, минимальное значение W^0 достигается при $x_0 \in [0{,}6;\ 0{,}8]$. Уточнение значения минимума дает $x_0^0 = 0{,}61$ и $W^0(x_0^0) = 0{,}0444$.

Приведем численное решение задачи 2 в случае, когда используется линейное управление (3.1). Решение задачи двухпараметрической оптимизации при $x_0 = 0{,}61$ дает следующий результат: оптимальные значения параметров $\gamma^0 = 3{,}85$, $\sigma^0 = 0{,}878$, а соответствующее оптимальное значение показателя гарантированного качества и введенное выше отношение таковы:

$$W_S^0 = W_S[\gamma^0, \sigma^0] = 0{,}163, \quad \alpha_0 = W_S^0 / W^0 = 3{,}67$$

Использование управления вида (3.4) в задаче 2 при $x_0 = 0{,}61$ дает следующий результат: $\chi^0 = -0{,}76$, $W_+^0 = 0{,}0565$, а соответствующее значение отношения такое:

$$\alpha_+ = W_+^0 / W^0 = 1{,}27$$

Таким образом, управление (3.4) в данном случае предпочтительнее управления (3.1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-01-16282, 95–01–00138) и Международного Научного фонда.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Комков В.* Теория оптимального управления демпфированием простых упругих систем. М.: Мир, 1975. 158 с.
2. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975. 568 с.
3. *Акуленко Л.Д.* Конструктивное управление движением колебательных систем с дискретными и распределенными параметрами // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 4. С. 596–607.
4. *Акуленко Л.Д.* Оптимальное управление простыми движениями однородного упругого тела // Изв. АН МТТ. 1992. № 3. С. 200–207.
5. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985. 520 с.
6. *Баничук Н.В., Братусь А.С.* Об оптимальном проектировании конструкций, оснащенных актюаторами // Изв. АН. Техн. кибернетика. 1993. № 1. С. 24–31.
7. *Федоров В.В.* Численные методы максимина. М.: Наука, 1979. 280 с.
8. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.
9. *Баландин Д.В.* Предельные возможности управления линейной системой // Докл. РАН. 1994. Т. 334. № 5. С. 571–573.
10. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 831 с.
11. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
12. *Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.

Нижний Новгород

Поступила в редакцию
17.V.1994