УДК 539.3:534.26

© 1995 г. И.В. Андронов

ПРИМЕНЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛОВ НУЛЕВОГО РАДИУСА В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ НА МАЛЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ В УПРУГИХ ПЛАСТИНАХ

Предлагается процедура построения явно решаемых моделей малых неоднородностей в гранично-контактных задачах акустики. Процедура базируется на теории самосопряженных расширений симметричных операторов и позволяет свести задачу дифракции к двум более простым задачам. Первая задача соответствует абсолютно жесткой пластине, вторая – изолированной пластине. Асимптотический анализ этих задач в ряде случаев позволяет построить модель неоднородности в исходной гранично-контакной задаче. Указанная процедура применяется для исследования дифракции плоской акустической волны на пластине с круговым отверстием малого радиуса. Задача дифракции плоской волны на отверстии в абсолютно жесткой пластине и задача дифракции изгибной волны на отверстии в изолированной пластине допускают разделение переменных в эллипсоидальных и полярных координатах соответственно. Для исходной задачи получены асимптотики поля в дальней зоне.

Потенциалы нулевого радиуса были введены Ферми в 30-х годах при рассмотрении квантовомеханических объектов и сводились к заданию "граничного" условия на волновую функцию ψ в точке: $(r\psi)^{-1}\,\partial(r\psi)/\partial r|_{r\to 0}\to\alpha$, где r – расстояние от центра "потенциальной ямы", т.е. точки, где находится потенциал нулевого радиуса, α – вещественное число. Затем было показано [1], что с математической точки зрения задание логарифмической производной определяют самосопряженнос расширение некоторого симметричного оператора. К настоящему времени потенциалы нулевого радиуса активно применяются и стали уже классическими в квантовой механике [2], а также при моделировании узких щелей в жестких экранах и открытых резонаторах [3].

С физической точки зрения подход, основанный на применении теории расширений операторов к рассматриваемому кругу задач, позволяет путем учета малости размеров неоднородности упростить задачу еще на стадии ее постановки. Подобно тому, как пластина в теории гранично-контактных задач моделируется бесконечно тонкой плоскостью, а ребра жесткости – бесконечно тонкими линиями (или точками в случае двух измерений), неоднородности пластины заменяются некоторыми точечными рассеивателями специального вида. Для фиксирования условий на этих рассеивателях и применяется идея потенциалов нулевого радиуса. Основная проблема, возникающая в теории самосопряженных расширений операторов, состоит в выборе параметров расширения адекватно моделируемому объекту. В приведенной ниже процедуре такой выбор осуществляется при помощи разложения исходной задачи на более простые.

Анализируя публикации по гранично-контактным задачам акустики, легко установить их связь с соответствующими задачами для изолированной, сухой конструкции (ниже такие задачи названы вакуумными). Действительно, выделение объектов, отвечающих вакуумным задачам, осуществляет регуляризацию формально возникающих при применении преобразования Фурье интегралов и рядов[1], именно вакуумные объекты формируют сингулярные члены в интегральных уравнениях [4], к которым сводятся задачи дифракции.

[1] *Белинский Б.П.* О методе регуляризации в задачах дифракции на подкрепленных пластинах. Автореф. дисс. ... докт. физ.-мат. наук, Л.: ЛГУ, 1986. 29 с.

В рамках теории расширений указанная связь вакуумной и полной задач приводит к возможности конструирования потенциалов нулевого радиуса из двух компонент. Одна отвечает вакуумной задаче и описывает влияние неоднородности посредством воздействия на изгибное смещение пластины, а вторая соответствует задаче дифракции на абсолютно жестком экране и характеризует воздействие неоднородности на звуковое давление непосредственно. Таким образом, для выбора параметров расширения в полной задаче требуется найти параметры расширения для операторов, отвечающих вакуумной задаче и задаче для жесткого экрана, а для этого требуется построить асимптотики в соответствующих упрощенных задачах. После того как параметры расширения для компонент выбраны, полученные две модели объединяются методом теории расширений в модель точечного рассеивателя в исходной гранично-контактной задаче.

Описанным методом строится модель кругового отверстия малого радиуса в пластине и исследуется задача дифракции. Очевидно, что в указанной задаче переменные не делятся, в то время как для задач дифракции для изолированной и для жесткой пластин, которые приходится исследовать для выбора параметров компонент потенциала, такое разделение переменных осуществляется соответственно в элипсоидальных [5] и полярных координатах.

1. Постановка задачи дифракции. Задача дифракции акустической волны на тонкой упругой пластине с неоднородностью, занимающей произвольную область Ω, состоит в отыскании решения уравнения Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)\, u(x, y, z) = 0, \quad R^3_+ \backslash \Omega \tag{1.1}$$

с краевыми условиями

$$(\Delta^2 - k_0^4)\xi(x, y) + \nu u(x, y, 0) = 0, \quad \xi(x, y) = \partial u / \partial z|_{z=0}, \quad R^2 \setminus (\Omega \cap R^2) \tag{1.2}$$

и некоторыми условиями для $u(x, y, z)$ на $\partial\Omega$ и для $\xi(x, y)$ на $\partial\Omega \cap R^2$. Здесь u – акустическое давление, ξ – функция, пропорциональная изгибному смещению пластины. Условия на неоднородности фиксируют механический и акустический режимы и должны удовлетворять требованиям теоремы существования и единственности решения задачи рассеяния. При необходимости эти условия дополняются условиями Майкснера и аналогичными им условиям [6] для изгибного смещения.

Волновой процесс в системе возбуждется некоторой падающей волной. Для определенности будем считать, что это плоская акустическая волна

$$u^1 = \exp(i\, kr \cos\vartheta_0 \cos\varphi - i\, kz \sin\vartheta_0) \tag{1.3}$$

Полное поле в задаче может быть представлено в виде суммы трех слагаемых: падающего поля u^i, поля u^r, отраженного от однородной пластины, и рассеянного неоднородностью поля u^s ($u = u^i + u^r + u^s$). Поля u^r и u^s должны удовлетворять условию излучения.

Поскольку отраженное поле u^r легко находится

$$u^r = R(\vartheta_0)\exp(i\, kr \cos\vartheta_0 \cos\varphi + i\, kz \sin\vartheta_0) \tag{1.4}$$

$$R(\varphi) = (ik(k^4 \cos^4 \vartheta - k_0^4)\sin\vartheta - \nu)\ (ik(k^4 \cos^4 \vartheta - k_0^4)\sin\vartheta + \nu)^{-1}$$

задача состоит в нахождении поля u^s. Ниже будет построена асимптотика рассеянного поля в дальней зоне. Т.е. асимптотики при $R = (x^2 + e^2 + z^2)^{1/2} \to \infty$ и $\mathrm{diam}(\Omega) \to 0$.

2. О структуре оператора гранично-контактной задачи. Построение точечных моделей для задач дифракции на тонкой упругой пластине основано на теории расширений симметричных операторов и требует перехода к операторной формулировке задачи. Для этого введем в рассмотрение два пространства: внешнее $L_{\text{ext}} = L_2(R^3_+)$ и внутреннее $L_{\text{int}} = L_2(R^2)$. Первое из них – пространство акустических давлений ($u(x, y, z) \in L_{\text{ext}}$), второе – пространство изгибных смещений пластины ($\xi(x, y) \in L_{\text{int}}$). Во внешнем пространстве зададим оператор $H_{\text{ext}} = \Delta$ с областью определения

$D(H_{ext}) = W^4_{2,\,N}(R^3_+)$ (индекс N означает условие Неймана при $z = 0$), во внутреннем – оператор $H_{int} = \Delta^2$ с областью определения $D(H_{int}) = W^4_2 = W^4_2(R^2)$. Спектральные задачи для этих операторов соответствуют задаче дифракции акустических волн на абсолютно жесткой пластине и задаче распространения изгибных волн в изолированной пластине (пластине, помещенной в вакууме) соответственно

Рассмотрим оператор

$$K = \begin{Vmatrix} \kappa(H^0_{ext})^2 & \mathbb{O} \\ 1(*) & H_{int} \end{Vmatrix} \tag{2.1}$$

действующий в пространстве $L = L_{ext} \oplus L_{int}$ и определенный на парах функций $(u_{ext}, u_{int}) \equiv U$. В качестве скалярного произведения в L зададим сумму скалярных произведений компонент во внешнем и внутреннем пространствах

$$\langle U, V\rangle_L = \kappa^{-1} \langle u_{ext}, \upsilon_{ext}\rangle + \langle u_{int}, \upsilon_{int}\rangle$$

Постоянная κ в (2.1) введена для того, чтобы приравнять спектральные параметры внешней и внутренней задач $\kappa = k^4_0 k^{-2}$. Оператор $1(*)$ действует из L_{ext} в L_{int} по формуле: $l(u_{ext}) = \sqrt{\nu}\ \ u_{ext}|_{z=0}$.

Можно проверить, что оператор K с областью определения

$$D(k) = \{U\colon\ u_{ext} \in W^2_2(\mathbb{R}^3_+),\ \ u_{int} \in W^4_2(\mathbb{R}^2),\ \ u_{int} = \nu^{-1/2}\partial u_{ext} / \partial z|_{z=0}\}$$

отвечает задаче дифракции на однородной упругой пластине и является самосопряженным.

Таким образом, самосопряженный матричный оператор задачи дифракции на упругой пластине состоит из двух самосопряженных компонент, отвечающих задачам для абсолютно жесткой и для изолированной пластин. Очевидно, что замена этих компонент операторами, отвечающими задачам дифракции на неоднородности в жесткой и изолированной пластине, приведет к оператору задачи дифракции на упругой пластине с неоднородностью. Если же вместо точных задач дифракции взять моделирующие их потенциалы нулевого радиуса, то соответствующий матричный оператор будет, по-видимому, моделировать явление дифракции на неоднородности в упругой пластине.

Все это приводит к следующей процедуре. Сначала строятся самосопряженные расширения операторов H_{ext} и H_{int} и выбираются параметры этих расширений. Затем строятся расширения K и часть параметров этого расширения отождествляется с параметрами расширений H_{ext} и H_{int}.

3. Потенциалы нулевого радиуса для внешней компоненты. Потенциалы нулевого радиуса для оператора Гельмгольца в присутствии абсолютно жесткого экрана подробно исследованы [3]. Поэтому не будем повторять все выкладки, а приведем лишь окончательные формулы в принятых здесь обозначениях. Решение задачи рассеяния на потенциале нулевого радиуса удовлетворяет уравнению

$$(\Delta + k^2)\, u = 0,\ \ z > 0, r > 0 \tag{3.1}$$

условию Неймана

$$\partial u/\partial z|_{z=0} = 0,\ \ r > 0 \tag{3.2}$$

и некоторому условию в точке ($r = 0$, $z = 0$).

Для того чтобы указать условие в точке, рассмотрим асимптотику произвольного решения (3.1), (3.2) в окрестности начала координат

$$u \approx c^0/(4\pi R) + f^0 + o(1) \tag{3.3}$$

Теперь условие в точке ($r = 0$, $z = 0$) формулируется в виде соотношения между коэффициентами c^0 и f^0

$$c^0 = Af^0 \tag{3.4}$$

Параметр A в (3.3) принимает вещественные значения (допускается $A = \infty$, что означает $f^0 = 0$). Было установлено [3], что все отвечающие внешней задаче самосопряженные расширения в L_2, параметризуются условием (3.3).

Помимо условия (3.3) существуют другие способы описания самосопряженных расширений, однако указанный вариант выделен тем фактом, что A в (3.3) зависит лишь от неоднородности и не зависит ни от падающего поля, ни от свойств акустической среды. Для того чтобы выбрать параметр A, отвечающий конкретной неоднородности, необходимо построить асимптотику поля в дальней зоне для какой-либо модельной задачи.

4. Потенциалы нулевого радиуса во внутреннем пространстве. Во внутреннем пространстве действует бигармонический оператор, теория расширений для которого разработана в [7]. Рассмотрим оператор $\overset{0}{H}_{\text{int}} = \Delta^2$, определенный на функциях из $W^4_{2,\,0}(R^2)$. Здесь нижний нулевой индекс означает, что значения функций и их производных по x и y до второго порядка включительно обращаются в нуль в начале координат. Порядок производных, значения которых могут быть зафиксированы в отдельной точке, определяется теоремами вложения [8]. Было установлено [7], что индексы дефекта оператора $\overset{0}{H}_{\text{int}}$ равны (6,6), а дефектными элементами являются функция Грина

$$G(x,\ y,\ \mu) = \frac{i}{8\mu^2}\left\{H_0^{(1)}(\mu r) - H_0^{(1)}(i\mu r)\right\} \tag{4.1}$$

соответствующая комплексному спектральному параметру μ^4, и ее производные. Поскольку особенность G имеет вид $r^2 \ln r$, без выхода из L_2 можно выполнить лишь двукратное дифференцирование. Таким образом, имеем шесть дефектных элементов G, G_x, G_y, G_{xx}, G_{xy} и G_{yy}. Для упрощения формул зафиксируем значение спектрального параметра следующим образом: $\mu = \exp(i\pi/4)$.

Оператор $(\overset{0}{H}_{\text{int}})^*$,сопряженный к $\overset{0}{H}_{\text{int}}$, определен на функциях, представимых в виде разложения

$$\xi(x,\ y) = \sum_{n+j<3} c^{nj}\frac{\partial^{n+j}G(x,\ y)}{\partial x^n \partial y^j} + \chi(x,\ y)\sum_{n+j<3} b^{nj}\frac{x^n y^j}{n!\,j!} + \xi_0(x,\ y) \tag{4.2}$$

Здесь $\xi_0(x, y)$ принадлежит области определения $\overset{0}{H}_{\text{int}}$, функция $\chi(x, y)$ – гладкая срезка, такая, что $\chi(x, y) = 1$ при $x^2 + y^2 < 1$, $\chi(x, y) = 0$ при $x^2 + y^2 > 2$. Первая сумма в (4.2) образует сингулярную компоненту ξ_s функции ξ, остальные члены не имеют особенностей и образуют регулярную компоненту ξ. Действие оператора $(\overset{0}{H}_{\text{int}})^*$ на $\xi(x, y)$ дается следующей формулой:

$$(\overset{0}{H}_{\text{int}})^*\xi(x,\ y) = \Delta^2\xi_r(x,\ y) - \xi_s(x,\ y) \tag{4.3}$$

т.е., на компоненту ξ_r оператор $(\overset{0}{H}_{\text{int}})^*$ действует как Δ^2, а на ξ_s – как оператор умножения на μ^4.

Оператор K_{int} (оператор рассеяния изгибных волн на потенциале нулевого радиуса в изолированной пластине) является сужением $(\overset{0}{H}_{\text{int}})^*$ на функции из такого множества $D(K_{\text{int}})$, что граничная форма $I(\xi,\ \eta) = ((\overset{0}{H}_{\text{int}})^*\xi,\ \eta) - (\xi,\ (\overset{0}{H}_{\text{int}})^*\eta)$ обращается в нуль на $D(K_{\text{int}})$. Было показано [7], что

$$I(\xi,\ \eta) = \sum_{i+j<3}\left(b^{ij}(\xi)\bar{c}^{ij}(\eta) - c^{ij}(\xi)\bar{b}^{ij}(\eta)\right) \tag{4.4}$$

Для того чтобы выражение в правой части равенства (4.4) обратилось в нуль, необходимо задать линейное соотношение между векторами $\mathbf{c}_{\text{int}} = \{c^{00}, c^{10}, c^{01}, c^{20}, c^{11}, c^{02}\}$ и $\mathbf{b}^{\text{int}} = \{b^{00}, b^{10}, b^{01}, b^{20}, b^{11}, b^{02}\}$, образованными из коэффициентов разложения (4.2) для ξ и η

$$\mathbf{c}^{\text{int}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{b}^{\text{int}} \tag{4.5}$$

($\tilde{\mathbf{A}}$ – произвольная эрмитова матрица). Для параметризации всех самосопряженных расширений оператора $\overset{0}{H}_{\text{int}}$ в форме (4.5) требуется допустить обращение коэффициентов $\tilde{\mathbf{A}}$ в бесконечность, аналогично тому, как это было сделано для A в (3.4).

Условие (4.5) неудовлетворительно для дальнейшей процедуры построения матричного потенциала нулевого радиуса, поскольку матрица $\tilde{\mathbf{A}}$ содержит зависимость от падающего поля и свойств пластины. Для устранения этой зависимости сформулируем условие, аналогичное (4.5), для коэффициентов асимпототического разложения функций из $D(K_{\text{int}})$

$$\xi = \frac{c^{00}}{8\pi} r^2 \ln r + \frac{c^{10}}{4\pi} r \ln r \ \cos\varphi + \frac{c^{01}}{4\pi} r \ln r \ \sin\varphi + \frac{c^{20}}{4\pi}(2\ln r + 1 + 2\cos^2\varphi) +$$
$$+ \frac{c^{11}}{4\pi}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{c^{02}}{4\pi}(2\ln r + 1 + 2\sin^2\varphi) + f^{00} - f^{10} r\cos\varphi - f^{01} r\sin\varphi +$$
$$+ \frac{f^{20}}{2} r^2\cos^2\varphi + f^{11} r^2 \cos\varphi\sin\varphi + \frac{f^{02}}{2} r^2 \sin^2\varphi + o(r^2), \ \ r \to 0 \tag{4.6}$$

Коэффициенты c^{nj} в (4.5) совпадают с соответствующими коэффициентами в (4.2). Вектор $\mathbf{f}^{\text{int}} = \{f^{00}, f^{10}, f^{01}, f^{20}, f^{11}, f^{02}\}$, очевидно, отличаются от $\mathbf{b}^{\text{int}}$ слагаемым $\mathbf{B}(\mu)\mathbf{c}^{\text{int}}$, порожденным асимптотикой сингулярной компоненты, причем

$$\mathbf{B} = \begin{Vmatrix} i/(8\mu) & 0 & 0 & g & 0 & g \\ 0 & 1/(8\pi) - g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(8\pi) - g & 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 & 3i\mu/64 & 0 & i\mu/64 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i\mu/32 & 0 \\ g & 0 & 0 & i\mu/64 & 0 & 3i\mu/64 \end{Vmatrix}$$

$$g = [\ln(\mu/2) + \gamma_E - 1 - i\pi/4]/(4\pi)$$

где γ_E – постоянная Эйлера.

Для $\mu = \exp(i\pi/4)$ матрица $\mathbf{B}$ – эрмитова, и, следовательно, условие (4.5) может быть записано в виде

$$\mathbf{c}^{\text{int}} = \mathbf{A}\mathbf{f}^{\text{int}} \tag{4.7}$$

Здесь эрмитова матрица $\mathbf{A}$ уже не зависит от падающего поля и свойств пластины вдали от неоднородности.

5. Потенциалы нулевого радиуса для оператора K. Сузим оператор K на вектор-функции U, такие, что их внешняя компонента u_{ext} обращается в нуль в точке (0, 0, 0), а внутренняя компонента u_{int} принадлежит $W^4_{2,0}(R^2)$, т.е. произведем сужение внешней и внутренней компонент аналогично тому, как это делалось в разд. 3 и 4. Дефектные элементы полученного оператора K^0 – решения задач

$$-(\kappa\Delta + \lambda)G^0_{\text{ext}}(x,\ y,\ z) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$$
$$\sqrt{\nu}G^0_{\text{ext}}(x,\ y,\ 0) + (\Delta^2 - \lambda)G^0_{\text{int}}(x,\ y) = 0 \tag{5.1}$$
$$-(\kappa\Delta + \lambda)G^{nj}_{\text{ext}}(x,\ y,\ z) = 0$$
$$\sqrt{\nu}G^{nj}_{\text{ext}}(x,\ y,\ 0) + (\Delta^2 - \lambda)G^{nj}_{\text{int}}(x,\ y) = \frac{\partial^n \delta(x)}{\partial^n x}\frac{\partial^j \delta(y)}{\partial^j y} \tag{5.2}$$

Функция G^0 – возмущение дефектного элемента внешнего оператора, а функции G^{nj} – возмущения дефектных элементов внутреннего оператора. Решения задач (5.1) и (5.2) можно получить в форме интегралов Фурье

$$G^0_{\text{ext}} = -\frac{k^2}{8\pi k_0^4}\int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(\tau r)e^{-m(\tau)z}\frac{\tau(\tau^4-\lambda)d\tau}{l(\tau)}$$

$$G^0_{\text{int}} = \frac{\sqrt{\nu}k^2}{8\pi k_0^4}\int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(\tau r)\frac{\tau d\tau}{l(\tau)} \tag{5.3}$$

$$l(\tau) = \nu-(\tau^4-\lambda)m(\tau),\quad m(\tau)=\sqrt{\tau^2-\lambda k^2 k_0^{-4}}$$

Здесь исключена δ-функция из $f=\nu^{-1/2}\partial G^0_{\text{ext}}/\partial z|_{z=0}$, поскольку внутренняя компонента u_{int} равна f всюду, кроме точки (0, 0). Дифференцирование G^0 невозможно, так как при этом внешняя компонента G^0_{ext} выходит из $L_2(R^3_+)$. Имеем

$$G^{nj}_{\text{int}} = -\frac{\sqrt{\nu}}{4\pi}\frac{\partial^{n+3}}{\partial x^n\partial y^j}\int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(\tau r)e^{-m(\tau)z}\frac{\tau d\tau}{l(\tau)} \tag{5.4}$$

$$G^{nj}_{\text{int}} = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial^{n+j}}{\partial x^n\partial y^j}\int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(\tau r)m(\tau)\frac{\tau d\tau}{l(\tau)}$$

Значения индексов n и j ограничены требованием $n+j\le 2$, соответствующим условию $G^{nj}\in L_2(R^3_+)\oplus L_2(R^2)$. Индексы дефекта K^0, таким образом, равны (7, 7).

Область определения сопряженного оператора $(K^0)^*$ составляют функции, представимые в виде следующего разложения:

$$u = u_0+\chi\left\{c^0G^0+\sum_{n,\,j}c^{nj}G^{nj}+b^0\begin{Vmatrix}1\\0\end{Vmatrix}+\sum_{n,\,j}b^{nj}\frac{x^ny^j}{n!j!}\begin{Vmatrix}0\\1\end{Vmatrix}\right\},\quad u_0\in D(K^0) \tag{5.5}$$

Здесь χ – гладкая срезающая функция. Вычисляя граничную форму оператора $(K^0)^*$, получим

$$I(u,\ \upsilon)=\frac{k^2}{2k_0^4}\left(b^0(u)\overline{c^0}(\upsilon)-c^0(u)\overline{b^0}(\upsilon)\right)+\sum_{n,\,j}\left(b^{nj}(u)\overline{c^{nj}}(\upsilon)-c^{nj}(u)\overline{b^{nj}}(\upsilon)\right)$$

Для дальнейшего изложения удобно ввести следующие векторы:

$$\mathbf{c}=(k/(k_0^2\sqrt{2})c^0,\quad \mathbf{c}^{\text{int}})^{\text{т}},\quad \mathbf{b}=(k/(k_0^2\sqrt{2})b^0,\quad \mathbf{b}^{\text{int}})^{\text{т}} \tag{5.6}$$

В терминах $\mathbf{c}$ и $\mathbf{b}$ условие самосопряженности записывается в виде

$$\mathbf{b}=\mathbf{Mc} \tag{5.7}$$

где M – произвольная эрмитова матрица из $\{C+\infty\}^7$. Она зависит от всех параметров задачи, поэтому условие (5.7) необходимо переписать в инвариантных терминах, так чтобы матрица в условии зависела бы только от неоднородности (размеров, формы Ω, типа граничных условий). Для этого получим асимптотику функций (5.5). Из (5.3), (5.4) удобно выделить дефектные элементы внешнего и внутреннего операторов:

$$G^0\ \frac{k^2}{4\pi k_0^4R}\exp\left\{i\sqrt{\lambda k^2k_0^{-4}}R\right\}\begin{Vmatrix}1\\0\end{Vmatrix}+g^0$$

$$G^{nj}\ \frac{\partial^{n+j}}{\partial x^n\partial y^j}\left\{\frac{i}{8\sqrt{\lambda}}\left(H_0^{(1)}(\sqrt{\lambda}r)-H_0^{(1)}(i\sqrt{\lambda}r)\right)\begin{Vmatrix}0\\1\end{Vmatrix}+g^{00}\right\}$$

Здесь g^0 и g^{00} – двукомпонентные функции

$$g^0_{\text{ext}} = -\frac{\nu k^2}{8\pi k_0^4}\int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(\tau r)e^{-m(\tau)z}\frac{\tau m(\tau)}{l(\tau)}d\tau, \quad g^0_{\text{int}} = G^0_{\text{int}}$$

$$g^{00}_{\text{ext}} = G^{00}_{\text{ext}}, \quad g^{00}_{\text{int}} = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H_0^{(1)}(\tau r)\frac{\tau}{l(\tau)}\frac{d\tau}{(\lambda-\tau^4)}$$

Вычисляя асимптотические разложения для g^0 и g^{nj}, можно установить, что сингулярные члены в асимптотике u определяются дефектными элементами H_{ext} и H_{int}, а функции g^0 и g^{00} вносят поправки только в регулярные члены. Таким образом, асимптотическое разложение внутренней компоненты u_{int} повторяет разложение (4.6), а разложение u_{ext} отличается от (3.3) множителем к:

$$u_{\text{ext}} = c^0k^2/(4\pi k_0^4 R) + \tilde{b}^0 + O(R) \tag{5.8}$$

Асимптотики g^0 и $g^{nj} = \partial^{n+j}g^{00}/\partial x^n\partial y^j$ имеют вид

$$\begin{gathered}
g^0_{\text{ext}} = -\frac{\nu k^2}{4\pi k_0^4}\int_0^{\infty}\frac{\tau d\tau}{m(\tau)l(\tau)} + o(l), \quad g^0_{\text{int}} = \frac{k^2}{2k_0^4}\upsilon_0 - \frac{k^2r^2}{8\pi k_0^4}\upsilon_2 + o(r^2)\\
g^{00}_{\text{ext}} = \sqrt{\nu}\upsilon_0 + o(l), \quad g^{10}_{\text{ext}} = g^{01}_{\text{ext}} = g^{11}_{\text{ext}} = o(l), \quad g^{20}_{\text{ext}} = g^{02}_{\text{ext}} = -\frac{\sqrt{\nu}}{2}\upsilon_2 + o(l)\\
g^{00}_{\text{int}} = I_0 - \frac{I_2}{4}r^2 + o(r^2), \quad g^{10}_{\text{int}} = \frac{I_2}{2}x + o(r^2), \quad g^{01}_{\text{int}} = \frac{I_2}{2}y + o(r^2)\\
g^{20}_{\text{int}} = -I_2 + \frac{3I_4}{8}x^2 + o(r^2), \quad g^{11}_{\text{int}} = \frac{I_4}{4}xy + o(r^2), \quad g^{02}_{\text{int}} = -I_2 + \frac{3I_4}{8}y^2 + o(r^2)\\
\upsilon_j = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\tau^{l+j}}{l(\tau)}d\tau, \quad I_j = -\frac{\nu}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\tau^{l+j}}{l(\tau)}(\tau^4-\lambda)^{-1}d\tau
\end{gathered} \tag{5.9}$$

При вычислении асимптотик (5.9) было использовано свойство функций Ганкеля $H_0^{(1)}(-p) = -H_0^{(2)}(p)$, что позволяет переписать интегралы для g^0 и g^{00} в виде интегралов по полуоси. Затем под знаком этих интегралов можно произвести дифференцирование по x и по y требуемое число раз, а затем положить $r = 0$ и $z = 0$.

Учитывая асимптотики (5.9), получим

$$\mathbf{f} = \mathbf{b} + \mathbf{Gc}$$

$$\mathbf{G} = \begin{Vmatrix} B & \mathbf{V} \\ \mathbf{V}^t & \mathbf{B}+\mathbf{B}' \end{Vmatrix}$$

$$B = \frac{ik^2}{4\pi k_0^4}\sqrt{\lambda k^2 k_0^{-4}} - \frac{\nu k^2}{4\pi k_0^4}\int_0^{\infty}\frac{\tau d\tau}{m(\tau)l(\tau)}$$

$$\mathbf{V} = \frac{k}{\sqrt{2k_0^2}}\{\upsilon_0,\ 0,\ 0,\ \upsilon_2,\ 0,\ \upsilon_2\}$$

$$\mathbf{B}' = \begin{Vmatrix} I_0 & 0 & 0 & -I_2 & 0 & I_2 \\ 0 & I_2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2/2 & 0 & 0 & 0 \\ -I_2 & 0 & 0 & 3I_4/8 & 0 & I_4/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_4/4 & 0 \\ -I_2 & 0 & 0 & I_4/8 & 0 & 3I_4/8 \end{Vmatrix} \tag{5.10}$$

Матрица **B** определена в разд. 4.

Для отрицательных значений спектрального параметра задачи λ матрица $\mathbf{G}$ в (5.10) – эрмитова, и условие (5.7) может быть переписано в виде

$$\mathbf{c} = \mathbf{Z}\mathbf{f};\quad \mathbf{Z} = \mathbf{Z}^* = \begin{Vmatrix} \kappa A & \mathbf{a}^* \\ \mathbf{a} & \mathbf{A} \end{Vmatrix} \tag{5.11}$$

Матрица $\mathbf{Z}$ параметризует самосопряженные расширения оператора K^0. Элемент A соответствует задаче рассеяния на неоднородности в абсолютно жестком экране, а матрица $\mathbf{A}$ параметризует потенциал нулевого радиуса в задаче для изолированной пластины. Вектор $\mathbf{a}$ характеризует дополнительное взаимодействие акустического давления и изгибных смещений пластины, возникающее вследствие присутствия неоднородности. Параметр A и матрицу $\mathbf{A}$ можно выбрать на основании сравнения асимптотик характеристик поля в дальней зоне, вычисляемых в задачах для жесткой и изолированной пластин, с характеристиками, соответствующими тому или иному потенциалу нулевого радиуса.

6. Постановка задачи дифракции на круговом отверстии. Задача дифракции акустической волны на тонкой упругой пластине с круговым отверстием малого радиуса состоит в отыскании решения уравнения Гельмгольца (1.1) с краевыми условиями

$$(\Delta^2 - k_0^4)\xi(x,\ y) + \nu u(x,\ y,\ 0) = 0,\quad \xi(x,\ y) = \partial u/\partial z|_{z=0},\quad r = \sqrt{x^2+y^2} > R_0 \tag{6.1}$$

$$u(x, y, 0) = 0,\quad r < R_0 \tag{6.2}$$

Механический режим на краю отверстия фиксируется при помощи контактных условий

$$M\xi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \sigma\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \sigma\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\varphi^2}\right)\xi|_{r=R_0} = 0 \tag{6.3}$$

$$F\xi = \left(\frac{\partial^3}{\partial r^3} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2-\sigma}{r^2}\frac{\partial^3}{\partial r\partial\varphi^2} - \frac{3+\sigma}{r^3}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\xi|_{r=R_0} = 0 \tag{6.4}$$

означающих отсутствие изгибающих моментов и перерезывающих сил на окружности.

Волновой процесс в системе возбуждается падающей плоской волной (1.3). Отраженное поле u^r вычисляется по формуле (1.4). Задача заключается в построении асимптотики рассеянного поля u^s в дальней зоне.

7. Задача дифракции на абсолютно жесткой пластине. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу дифракции на круглом отверстии в абсолютно жестком экране:

$$(\Delta + k^2)\,u = 0,\quad z > 0 \tag{7.1}$$

$$\partial u/\partial z|_{z=0} = 0,\quad r > R_0;\quad u|_{z=0} = 0,\quad r < R_0$$

На краях отверстия фиксируются условия Майкснера.

Пусть падающее поле является плоской волной (1.3). Полное поле u состоит из геометрической части u^g, образованной падающей волной u^i и волной

$$u^r = \exp(ikr\cos\vartheta_0\cos\varphi + ikz\sin\vartheta_0)$$

отраженной от экрана без отверстия, и дифракционной поправки (рассеянного поля) u^s. Рассеянное поле должно удовлетворять условию излучения.

Задаче (7.1) посвящена обширная литература (обзор см., например в [9]). С одной стороны, эта задача допускает разделение переменной в эллипсоидальных координатах, и, следовательно, ее решение может быть получено в виде бесконечных рядов, содержащих эллиптические функции [5]. С другой стороны, ввиду сложности анализа точного решения к задаче (7.1) применялись асимптотические подходы как для высокочастотного, так и для низкочастотного случая.

Воспользуемся известным результатом [9] для старшего члена асимптотики u^s в дальней зоне ($R \to \infty$) при $R_0 \ll 1$

$$u^s \approx -2kR_0 \exp(ikR)/(\pi kR)$$

Для диаграммы рассеяния это дает

$$\Psi \approx -2i\pi^{-2}kR_0 \tag{7.2}$$

Теперь построим решение задачи рассеяния на потенциале нулевого радиуса. Рассеянное поле ищется в виде

$$u^s = c^0 \exp(ikR)/(4\pi R)$$

Вычисляя асимптотику

$$u \approx c^0 / (4\pi R) + f^0 + o(1), \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

и требуя выполнения условия $c^0 = Af^0$, получим

$$u^s = \frac{A}{1 - ikA/(4\pi)}(u^i(0,\ 0,\ 0) + u^r(0,\ 0,\ 0))\frac{\exp(ikR)}{4\pi R}$$

Для того чтобы получить диаграмму направленности, совпадающую с (7.2) в старшем по R_0 порядке, значение A должно быть выбрано равным – $8R_0$.

8. Задача дифракции для изолированной пластины. Рассмотрим задачу дифракции изгибных волн в изолированной пластине. Изгибные колебания описываются уравнением

$$(\Delta^2 - k_0^4)\xi(r,\ \psi) = 0, \quad r > R_0$$

и удовлетворяют краевым условиям (6.1, 6.3) на краю отверстия. Пусть поле в пластине возбуждается плоской падающей изгибной волной $\xi^i = \exp(ikr\cos\varphi)$.

Для построения рассеянного поля разделим переменные в полярной системе координат (r,ψ). Рассеянное поле будем искать в виде разложения

$$\xi^s = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\alpha_j H_j^{(1)}(k_0 r) + \beta_j H_j^{(1)}(ik_0 r)\right)\cos j\psi \tag{8.1}$$

Учитывая асимптотики функций Ганкеля, находим

$$\xi^s \approx \sqrt{2\pi/(k_0 r)}\exp(ik_0 r - i\pi/4)\Psi(\varphi) + o\left(1/(k_0 r)\right)$$

что приводит к следующей формуле для диаграммы направленности:

$$\Psi(\varphi) - \frac{1}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \cos j\varphi \exp\left(-\frac{i\pi j}{2}\right) \tag{8.2}$$

Таким образом, диаграмма направленности определяется коэффициентами α_j разложения (8.1). Для определения этих коэффициентов подставим (8.1) в граничные условия (6.1, 6.2) и приравняем выражения при одинаковых функциях полярного угла ψ. После разложения функций Ганкеля по малому параметру k_0R_0 получим старшие члены асимптотических разложений коэффициентов α_0, α_1 и α_3.

Остальные коэффициенты имеют более малый порядок по k_0R_0 и их асимптотики не потребуются. Получаем

$$\Psi(\varphi)-\frac{i}{2}\left(\ln\frac{k_0R_0}{2}+\gamma_E-\frac{i\pi}{4}+\frac{\sigma-2}{\sigma(\sigma-1)}\right)^{-1}\cos\varphi+\frac{i}{4}\chi_-(k_0R_0)^2+o(k_0^2R_0^2)$$

$$\chi_\pm=\frac{\sigma}{1-\sigma}\pm\frac{(1-\sigma)(3-5\sigma)}{5\sigma^2-9} \tag{8.3}$$

Теперь можем выбрать матрицу $\mathbf{A}$, параметризующую потенциалы нулевого радиуса для задачи об изолированной пластине. При построении этой матрицы необходимо учесть независимость решения задачи от выбора системы координат, т.е. в случае, если угол падения волны ξ^1 равен φ_0, то в формуле (8.3) угол φ должен быть заменен на $\varphi-\varphi_0$.

Решение задачи рассеяния на потенциале нулевого радиуса (см. разд. 4) ищем в виде мультипольного разложения.

$$\xi^{(s)}=\sum_{n+j<3}c^{nj}\frac{\partial^{n+j}}{\partial x^n\partial y^j}G(x,\ y,\ k_0) \tag{8.4}$$

причем функция Грина G дается формулой (4.1). Коэффициенты c^{nj} выбираются из условия на рассеивателе (4.7). Вектор $\mathbf{f}^{\text{int}}$ определяется падающим полем ξ^i и коэффициентами c^{nj}:

$$\mathbf{f}^{\text{int}}=\{\xi^i,\ -\xi^i_x,\ -\xi^i_y,\ \xi^i_{xx},\ \xi^i_{xy},\ \xi^i_{yy}\}(0,\ 0)+\mathbf{B}(k_0)\mathbf{c}$$

Вычисляя асимптотику функции Грина при $r\to\infty$, получим выражение для диаграммы направленности

$$\Psi=\frac{i}{8\pi k_0^2}\{c^{00}+ik_0c^{10}\sin\varphi+ik_0c^{01}\cos\varphi-k_0^2c^{20}\cos^2\varphi-$$

$$-k_0^2c^{11}\cos\varphi\ \sin\varphi-k_0^2c^{02}\sin^2\varphi\} \tag{8.5}$$

Сравнивая выражения (8.5) с (8.3), несложно определить матрицу $\mathbf{A}$, отвечающую задаче рассеяния на круглом отверстии в изолированной пластине. При вычислении элементов матрицы $\mathbf{A}$ требуется их независимость от падающего поля, т.е. от угла падения φ_0 и волнового числа k_0^4. Получаем

$$a_{22}=a_{33}=2\left(\ln R_0+\frac{1}{2}+\frac{(\sigma-2)}{\sigma(1-\sigma)}\right)^{-1},$$

$$a_{44}=a_{66}=\chi_+R_0^2,\quad a_{46}=a_{64}=\chi_-R_0^2$$

Остальные элементы равны нулю.

Как показано выше, матрица $\mathbf{Z}$, параметризующая потенциалы нулевого радиуса в гранично-контактных задачах, имеет блочную структуру. Элемент A и матрица $\mathbf{A}$ определены выше. Вектор $\mathbf{a}$, характеризующий дополнительное взаимодействие акустического давления и изгибных смещений пластины, возникающее вследствие присутствия отверстия, равен нулю, поскольку в условиях на отверстии (6.2–6.4) в классической формулировке задачи такое взаимодействие отсутствует (u и ξ не присутствуют в условиях одновременно). Таким образом, параметры модели нулевого радиуса для круглого отверстия в упругой пластине полностью определены.

9. Рассеяние на потенциале нулевого радиуса в исходной задаче. Сформулируем задачу рассеяния на матричном потенциале нулевого радиуса, параметризуемом построенной матрицей $\mathbf{Z}$. Задаче без неоднородности отвечает поле u^g, образованное падающей u^i (1.3) и отраженной u^r (1.4) волнами. Задача рассеяния состоит в вычислении функций u^s, которая удовлетворяет условиям (1.1, 1.2) всюду за исключением точки (0, 0, 0) и в сумме с заданной функцией u^g имеет асимптотику (4.6), а $\xi = \partial(u^g + u^s)/\partial z|_{z=0}$ – асимптотику (5.8) с коэффициентами, удовлетворяющими системе (5.11) при

$$\mathbf{Z} = \mathrm{diag}(\kappa A, \mathbf{A})$$

Рассеянное поле ищется в виде разложения

$$u^s = c^0 G^0_{\text{ext}} + \sum_{n+j<3} c^{nj} G^{nj}_{\text{ext}} \tag{9.1}$$

в котором функции G^0 и G^{nj} (см. разд. 5) взяты при $\lambda = k_0^4$. Очевидно, что представление (9.1) удовлетворяет уравнению (1.1) и условию (6.1). Для того чтобы удовлетворить условию (5.11), воспользуемся произволом в выборе коэффициентов c^0 и c^{nj}.

Введем в рассмотрение вектор, образованный коэффициентами асимптотических разложений u^g и $\partial u^g/\partial z|_{z=0}$:

$$\mathbf{d} = (d^0, d^{00}, d^{10}, d^{01}, d^{20}, d^{11}, d^{02})^t$$

где

$$d^0 = 2^{-1/2} k k_0^{-2} \{1 + R(\vartheta_0)\}$$

$$d^{nj} = ik\nu^{-1/2} \sin\vartheta_0 \{R(\vartheta_0) - 1\}(-ik\cos\varphi_0 \cos\vartheta_0)^n (-ik\sin\varphi_0 \cos\vartheta_0)^j$$

В результате условие (5.11) перепишется в виде

$$\mathbf{d} + \mathbf{Gc} = \mathrm{diag}(\kappa A, \mathbf{A})\, \mathbf{c} \tag{9.2}$$

причем матрица $\mathbf{G}$ дается второй формулой (5.10).

Решив систему (9.2), определим рассеянное поле u^s_{ext}. Для построения асимптотики рассеянного поля в случае отверстия малого радиуса ($R_0 \to 0$) в тонкой пластине получим асимптотику матрицы $\mathbf{G}$. Для тонкой пластины корни дисперсионного уравнения

$$l(\tau) = 0 \tag{9.3}$$

приближаются к следующим величинам [10]:

$$\tau_j = \nu^{1/5} \exp\{(2\pi i/5)\, j\}, \quad 0 \leqslant j \leqslant 4 \tag{9.4}$$

Используя асимптотики (9.4), вычислим интегралы, содержащиеся в $\mathbf{G}$. Для этого заметим, что, вводя новую переменную интегрирования $t = (\tau^2 - k^2)^{1/2}$, можно свести интегралы к форме интегралов от рациональных дробей, которые явно выражаются через корни дисперсионного уравнения. Отметим, что поскольку дисперсионное уравнение сводится к алгебраическому уравнению пятой степени, его корни, а следовательно, и интегралы вычисляются лишь асимптотически. Окончательно имеем:

$$G_{00} = -\frac{k^2 \nu^{1/5} \operatorname{ctg}(\pi/5)}{20 k_0^4}, \quad G_{00} = G_{01} = -\frac{k \operatorname{tg}(\pi/10)}{10\sqrt{2} k_0^2 \nu^{1/10}}$$

$$G_{40} = G_{04} = G_{60} = G_{06} = -\frac{k \operatorname{ctg}(\pi/10)}{20\sqrt{2} k_0^2 \nu^{3/10}}, \quad G_{11} = \frac{\nu^{-2/5}}{10\cos(\pi/10)}$$

$$G_{14} = G_{41} = G_{16} = G_{61} = \frac{\ln(\nu^{1/5}/2) + \gamma_E - 1}{4\pi}$$

$$G_{22} = G_{33} = \frac{\frac{1}{2} - \ln(\nu^{1/5}/2) - \gamma_E}{4\pi}$$

$$G_{44} = \frac{2}{3} G_{55} = G_{66} = 3G_{46} = 3G_{64} = -\frac{3\nu^{2/5}}{80\cos(\pi/10)}$$

Решив систему (9.2), находим асимптотики коэффициентов разложения (9.1)

$$c^0 \approx i\frac{16k_0^8}{k\nu} R_0\mu_0 \sin\vartheta_0, \;\; c^{00} = c^{01} = c^{11} = 0, \;\; c^{10} \approx -\frac{8\pi k^2}{\nu^{1/2}}\mu_1 \sin\vartheta_0 \cos\vartheta_0$$

$$c^{20} \approx 4\pi i \frac{k^3 R_0^2}{\nu^{1/2}} \sigma(\chi_+ - 2\chi_-)\sin\vartheta_0 \cos^2\vartheta_0, \;\; c^{02} \approx -4\pi i \frac{k^3 R_0^2}{\nu^{1/2}} \sigma\chi_- \sin\vartheta_0 \cos^2\vartheta_0$$

$$\mu_0 = 1 + \frac{2}{5}\nu^{1/5} R_0 \operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}, \;\; \mu_1 = \left(\ln\left(\frac{1}{2}\nu^{1/5} R_0\right) + \gamma_E + \frac{\sigma - 2}{\sigma(1-\sigma)}\right)^{-1}$$

Теперь найдем асимптотику рассеянного поля в дальней зоне. Вычисляя интегралы (5.3) и (5.4) по методу стационарной фазы, можно показать, что рассеянное поле при больших R является суммой сферической волны (вклад точки стационарной фазы)

$$u_{\text{sph}} \approx \frac{2\pi}{kR}\exp\left(ikR - \frac{i\pi}{2}\right)\Psi_{\text{sph}}(\vartheta_0, \;\varphi_0, \;\vartheta, \;\varphi)$$

и поверхностной волны (вычет в полюсе $\tau = \tau_0$)

$$u_{\text{sur}\,f} \approx \sqrt{\frac{2\pi}{\tau_0 r}}\exp\left(i\tau_0 r - \frac{i\pi}{4}\right)\exp\left(-\sqrt{\tau_0^2 - k^2 z}\right)\Psi_{\text{sur}\,f}(\vartheta_0, \;\varphi_0, \;\varphi)$$

Диаграммы направленности сферической и поверхностных волн даются формулами

$$\begin{aligned}\Psi_{\text{sph}} \approx {} & \frac{2i}{\pi^2}\left(\frac{k_0^4 k}{\nu}\right)^2 kR_0\mu_0 \sin\vartheta\sin\vartheta_0 + \frac{2}{\pi}\frac{k^6\mu_1}{\nu^{6/5}}\sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos\vartheta\cos\vartheta_0\cos\varphi + \\ & + \frac{k^5}{\pi\nu}(kR_0)^2\sigma\sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos^2\vartheta\cos^2\vartheta_0(\chi_+ - 2\chi_-)\cos^2\varphi - \chi_-\sin^2\varphi)\end{aligned} \qquad (9.5)$$

$$\begin{aligned}\Psi_{\text{sur}\,f} \approx {} & -\frac{4}{5\pi}\frac{k_0^4}{\nu^{4/5}} kR_0\mu_0 \sin\vartheta_0 - \frac{4}{5}\frac{k^2}{\nu^{2/5}}\mu_1 \sin\vartheta_0\cos\vartheta_0\cos\varphi - \\ & -\frac{2}{5}\frac{k}{\nu^{1/5}}(kR_0)^2\sigma\sin\vartheta_0\cos^2\vartheta\cos^2\vartheta_0((\chi_+ - 2\chi_-)\cos^2\varphi - \chi_-\sin^2\varphi)\end{aligned} \qquad (9.6)$$

При выводе формул (9.5), (9.6) учитывалась малость толщины пластины, что позволило воспользоваться асимптотикой корня τ_0 дисперсионного уравнения. Кроме того, приведенные формулы являются асимптотическими по малому радиусу отверстия, поскольку моделирование отверстия потенциалом нулевого радиуса корректно только при $R_0 \ll 1$.

Диаграмма Ψ_{sph} симметрична по углам падения и наблюдения, и обе диаграммы удовлетворяют оптической теореме[2]. Эти свойства следуют из самосопряженности оператора и показывают, что точечная модель малого отверстия математически корректна.

---

[2] *Андронов И.В.* Низкочастотные асимптотики в гранично-контактных задачах математической физики и теория расширений симметричных операторов. Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук, Л.: ЛГУ, 1991. 13 с.

Обоснование получаемых асимптотических разложений диаграмм сферической и поверхностной волн в данной работе не проводится, т.е. не доказывается справедливость моделей нулевого радиуса. Однако процедура построения составной модели из моделей для внешней и внутренней компонент может быть обоснована в ряде случаев путем сравнения поля в модельной задаче с асимптотиками, построенными классическими методами и допускающими обоснование. Такое сравнение, проведенное для случая короткой прямолинейной трещины в упругой пластине, показало справедливость подхода.

10. Заключение. Предложенный подход к построению старших членов асимптотического разложения рассеянного на неоднородности поля позволил найти асимптотики поля в достаточно сложной гранично-контактной задаче, не проводя громоздких выкладок. Для получения этих асимптотик требовалось лишь подобрать параметры расширений в двух вспомогательных задачах. В рассматриваемом случае эти задачи были явно разрешимы, и их асимптотическое исследование оказалось элементарным. В более сложных ситуациях, например для отверстий неправильной формы, переменные во внешней и внутренней задачах не разделятся, однако для асимптотического исследования соответствующих задач существует детально разработанный метод сращиваемых асимптотических разложений [11].

Важным свойством построенной модели является то, что число A и матрица $\mathbf{A}$ зависит лишь от радиуса отверстия и не зависят от свойств акустической среды и пластины. Свойства же среды и пластины учитываются посредством функции Грина задачи без неоднородности. Все это позволяет надеяться, что построенная модель нулевого радиуса будет справедлива в случае плавно неоднородных акустической среды и пластины, а также в случае искривленной пластины.

Выше расширения операторов проводились без выхода из L_2. Для получения более точных моделей, описываемых матрицами $\mathbf{Z}$ большей размерности и позволяющих получить большее число членов в асимптотических разложениях полей, процедура может быть обобщена на случай расширений операторов в более широких, чем L_2, пространствах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д.* Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. № 5. С. 1011–1014.
2. *Демков Ю.Н., Островский В.Н.* Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. Л.: Изд. ЛГУ, 1975.
3. *Павлов Б.С., Попов И.Ю.* Модель дифракции на бесконечно узкой щели и теория расширений // Вестн. ЛГУ. 1984. № 19. С. 36–44.
4. *Белинский Б.П.* Интегральные уравнения стационарных задач дифракции коротких волн на препятствиях типа отрезка // Журн. выч. матем. и матем. физики, 1973. Т. 13. № 2. С. 373–384.
5. *Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю.* Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М.: Наука, 1976. 320 с.
6. *Андронов И.В., Белинский Б.П.* О потоках энергии в окрестности конца трещины в изгибно колеблющейся пластине // Изв. АН СССР МТТ. 1990. № 3. С. 184–187.
7. *Карпешина Ю.Е., Павлов Б.С.* Взаимодействие нулевого радиуса для бигармонического и полигармонического уравнений // Матем. заметки. 1986. Т. 40, № 1. С. 49–59.
8. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики, Т. 5. М.: Мир, 1959.
9. *Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. М.: Мир, 1964. 428 с.
10. *Коузов Д.П.* Дифракция плоской гидроакустической волны на трещине в упругой пластине // ПММ, 1963. Т. 27. Вып. 6. С. 1037–1043.
11. *Ильин А.М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989. 336 с.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
8.VI.1993