УДК 538.4

© 1995 г. В.А. Владимиров, Ю.Г. Губарев

УСЛОВИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКИХ И ВИНТОВЫХ МГД ТЕЧЕНИЙ

Изучается задача устойчивости стационарных течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости в магнитном поле. Рассматриваются только такие МГД течения, которые обладают одним из типов симметрии (трансляционной, осевой, вращательной или винтовой). Получены достаточные условия нелинейной устойчивости исследуемых течений по отношению к возмущениям той же симметрии. Доказательства этих условий проведены методом связки интегралов движения [1, 2] в форме [3–8], основанном на построении функционалов, имеющих абсолютные минимумы на заданных стационарных решениях. Каждый из построенных функционалов представляет собой сумму кинетической энергии, интеграла от произвольной функции лагранжевой координаты и некоторого другого интеграла, характерного именно для изучаемых течений. Использование в данной работе полей лагранжевых координат приводит к целому семейству новых определений устойчивости. Согласно этим определениям отклонения возмущенных течений от невозмущенных измеряются интегралами от квадратов возмущений полей скорости и лагранжевой координаты. Полученные условия устойчивости обобщают известные результаты [5–7, 9] на новые классы течений. Эти условия носят априорный характер, так как соответствующие теоремы существования решений не доказаны.

1. Постановка задачи. Рассматриваются пространственные движения идеальной несжимаемой жидкости, содержащей магнитное поле $\mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$, в области τ с неподвижной твердой идеально проводящей границей $\partial\tau$. Уравнения, описывающие такие движения, берутся в форме [10]

$$\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p - (4\pi)^{-1}[\mathbf{h}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{h}], \qquad \mathbf{h}_t = \mathrm{rot}[\mathbf{uh}], \;\; \mathrm{div}\,\mathbf{h} = 0, \;\; \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \tag{1.1}$$

Полагается, что на границе $\partial\tau$ выполняются условия

$$\mathbf{un} = 0, \quad \mathbf{hn} = 0 \tag{1.2}$$

где $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – единичная нормаль к $\partial\tau$. Начальные данные для системы уравнений (1.1) задаются в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{h}_0(\mathbf{x}) \tag{1.3}$$

так что функции $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ и $\mathbf{h}_0(\mathbf{x})$ соленоидальны всюду в области τ и удовлетворяют условиям (1.2) на ее границе $\partial\tau$. Все используемые функции вместе со своими производными, входящими в уравнения движения (1.1), считаются непрерывными.

В последующих разделах изучается устойчивость некоторых частных точных стационарных решений задачи (1.1) – (1.3) относительно специальных классов возмущений.

2. Течения с винтовой симметрией. В цилиндрической системе координат r, φ, z исследуются движения, все поля в которых зависят от r, $\mu = a\varphi - bz$ и t (здесь a – любое целое число, b – любое вещественное). Предполагается, что магнитное поле $\mathbf{h}$

имеет только угловую h_2 и осевую h_3 составляющие, связанные между собой соотношением

$$ah_2 - brh_3 = 0 \tag{2.1}$$

При помощи обозначений [6, 7]

$$\lambda = a\upsilon - brw, \quad \beta = aw + br\upsilon, \quad R = a^2 + b^2r^2, \quad K = 2abR^{-2}$$

$$p^* = p + (8\pi)^{-1}\left(h_2^2 + h_3^2\right), \quad p_1 = \beta^2, \quad g_1 = b^2rR^{-2}$$

$$\rho_2 = (4\pi)^{-1}(h_2 / r)^2, \quad g_2 = -r, \quad \rho_3 = h_3$$

и условия (2.1) уравнения движения (1.1) можно преобразовать к форме

$$Du - K\beta\lambda - r^{-1}(a\lambda)^2 R^{-2} = -p_r^* + \rho_1 g_1 + \rho_2 g_2 \tag{2.2}$$

$$D(r\lambda R^{-1}) + K\beta ru = -p_\mu^*, \quad D\rho_1 = 0, \quad D\rho_2 = 0, \quad Dp_3 = 0$$

$$u_r + u / r + r^{-1}\lambda_\mu = 0, \quad D = \partial / \partial t + u\partial / \partial r + r^{-1}\lambda\partial / \partial\mu$$

Вводится дополнительная скалярная функция $q(r, \mu, t)$, значения которой сохраняются в каждой жидкой частице [8]

$$Dq = 0 \tag{2.3}$$

Поскольку изучаемые движения происходят в фиксированной области, ее границы должны обладать требуемой симметрией, т.е. задаваться функциями двух переменных (α – номер компоненты границы)

$$s_\alpha(r, \mu) = 0 \tag{2.4}$$

В этом случае граничные условия (1.2) примут вид

$$u(s_\alpha)_r + (\lambda / r)(S_\alpha)_\mu = 0 \tag{2.5}$$

Предполагается, что область τ течения двусвязна ($\alpha = 1, 2$), а ее граница $\partial\tau$ (2.4) состоит из двух компонент: внутренней и внешней.

Начальные данные (1.3) для уравнений (2.2), (2.3) запишутся следующим образом:

$$u(r,\mu,0) = u_0(r,\mu), \quad \lambda(r,\mu,0) = \lambda_0(r,\mu) \tag{2.6}$$

$$\rho_1(r,\mu,0) = \rho_{10}(r,\mu), \quad \rho_2(r,\mu,0) = \rho_{20}(r,\mu)$$

$$\rho_3(r,\mu,0) = \rho_{30}(r,\mu), \quad q(r,\mu,0) = q_0(r,\mu)$$

Необходимо отметить, что соотношение (2.1) – следствие второго уравнения системы (1.1). В самом деле посредством простых преобразований из этого уравнения можно получить связь

$$D\big((a / r)h_2 - bh_3\big) = 0$$

которая показывает, что если выбрать начальные составляющие магнитного поля $h_{20}(r, \mu)$ и $h_{30}(r, \mu)$, удовлетворяющие условию (2.1), то это условие будет иметь место не только при $t = 0$, но и в любой последующий момент времени.

Для задачи (2.1) (2.6) справедлив интеграл энергии

$$\mathrm{E} = T + \Pi_1 + \Pi_2 = \mathrm{const}, \quad T = \frac{1}{2}\int_\tau \left(\lambda^2 R^{-1} + u^2\right)d\tau, \quad d\tau = rdrd\mu \tag{2.7}$$

$$\Pi_1 = \int_\tau \rho_1 U_1 d\tau, \quad U_1 = U_1(r) = (2R)^{-1} + C_1, \quad \Pi_2 = \int_\tau \rho_2 U_2 d\tau, \quad U_2 = U_2(r) = r^2 / 2 + C_2$$

где C_1 и C_2 – постоянные величины, представляющие собой значения функций U_1 и U_2 либо на внешней, либо на внутренней части границы $\partial\tau$ (2.4). Другой интеграл этой задачи определяется через произвольную функцию $\Phi(q)$:

$$I = \int_\tau \Phi(q)d\tau = \mathrm{const} \tag{2.8}$$

Задача (2.1) – (2.6) имеет точные стационарные решения

$$\lambda = u = 0; \quad \rho_i = \rho_i^0(r), \quad i = 1,2,3; \quad q = Q(r) \tag{2.9}$$

в которых $\rho_i^0(r)$ и $Q(r)$ – произвольные функции аргумента r. Если $dQ/dr \neq 0$ в τ [11], то из соотношений (2.7), (2.9) вытекает

$$\rho_i^0 = \rho_i^0(Q), \quad U_1 = U_1(Q), \quad U_2 = U_2(Q) \tag{2.10}$$

$$Q \in \left(Q^-, Q^+\right), \quad Q^- = \min Q(r), \quad Q^+ = \max Q(r) \text{ в } \tau$$

Точные нестационарные решения задачи (2.1) – (2.6) записываются в виде

$$u = u(r,\mu,t), \quad \lambda = \lambda(r,\mu,t), \quad \rho_i = \rho_i^0(Q) + \sigma_i(r,\mu,t)$$

$$q = Q(r) + \kappa(r,\mu,t)$$

при этом u, λ, σ_i, κ рассматриваются как возмущения решений (2.9), (2.10). Предполагается, что при подходящем задании начальных данных (2.6) такие решения существуют, являются непрерывными и обладают непрерывными входящими в уравнения движения (2.2), (2.3) производными При помощи (2.10) строится вспомогательная функция двух переменных $V = V(X, Y)$:

$$V = \rho_1^{0\prime}(X)\left[U_1(Y) - U_1(X)\right] + \rho_2^{0\prime}(X)\left[U_2(Y) - U_2(X)\right], \quad X, Y \in \left(Q^-, Q^+\right) \tag{2.11}$$

Здесь и ниже штрихом обозначена производная по аргументу.

Утверждение 1. Пусть во всей области τ течения выполняется неравенство

$$0 \leqslant c_1^- \leqslant \partial V / \partial X \leqslant c_1^+ < +\infty \tag{2.12}$$

о постоянными c_1^- и c_1^+. Тогда в любой момент времени возмущения u, λ и κ оцениваются через свои начальные значения u_*, λ_* и κ_* следующим образом:

$$\int_\tau \left(\lambda^2 R^{-1} + u^2 + c_1^{-1}\kappa^2\right)d\tau \leqslant \int_\tau \left(\lambda_*^2 R^{-1} + u_*^2 + c_1^+\kappa_*^2\right)d\tau \tag{2.13}$$

Доказательство проводится методом связки интегралов движения (2.7), (2.8) [1–8].

Пусть начальные поля $\rho_{10}(r,\mu)$, $\rho_{20}(r,\mu)$ и $q_0(r,\mu)$ (2.6) могут быть получены из стационарных распределений $\rho_1^0(r)$, $\rho_2^0(r)$ и $Q(r)$ (2.9) посредством только взаимных перемещений частиц несжимаемой жидкости. Величины ρ_1, ρ_2 и q при таких перемещениях постоянны в каждой жидкой частице и равны своим значениям, принимаемым на решениях (2.9):

$$\rho_1 = \rho_1^0(q), \quad \rho_2 = \rho_2^0(q), \quad q \in \left(Q^-, Q^+\right)$$

$$\rho_1 \in \left(\rho_1^{0-}, \rho_1^{0+}\right), \quad \rho_1^{0-} = \min \rho_1^0(r), \quad \rho_1^{0+} = \max \rho_1^0(r) \text{ в } \tau \tag{2.14}$$

$$\rho_2 \in \left(\rho_2^{0-}, \rho_2^{0+}\right), \quad \rho_2^{0-} = \min \rho_2^0(r), \quad \rho_2^{0+} = \max \rho_2^0(r) \text{ в } \tau$$

т.е. связи между ρ_1, ρ_2 и q, интервалы определения этих величин те же, что и в (2.10). По существу здесь речь идет об условии "равнозавихренности" [12]. Ясно, что если связи (2.14) справедливы в начальный момент, то они останутся таковыми и в любой последующий момент времени.

Из интегралов (2.7), (2.8) составляется сохраняющийся функционал

$$F = F(u,\lambda,q) = \frac{1}{2}\int_\tau \left\{\lambda^2 R^{-1} + u^2 + 2\rho_1(q)U_1(Q) + 2\rho_2(q)U_2(Q) + 2\Phi(q)\right\}d\tau$$

который представляется в виде суммы трех слагаемых

$$F = F(u,\lambda,q) = F(0,0,Q) + F_1 + F_2 \tag{2.15}$$

$$F_1 = \int_\tau \left\{\kappa f_q(Q,Q)\right\}d\tau, \quad F_2 = \frac{1}{2}\int_\tau \left\{\lambda^2 R^{-1} + u^2 + 2f_1(q,Q)\right\}d\tau$$

$$f_1(q,Q) = f(q,Q) - f(Q,Q) - \kappa f_q(Q,Q)$$

$$f(q,Q) = \Phi(q) + U_1(Q)\rho_1(q) + U_2(Q)\rho_2(q), \quad f_q(q,Q) = \frac{\partial f(q,Q)}{\partial q}$$

Пользуясь произвольностью функции $\Phi(q)$, можно выбрать ее так, чтобы $f_q(Q, Q) = 0$, а именно

$$\Phi'(Q) = -U_1(Q)\rho_1^{0\prime}(Q) - U_2(Q)\rho_2^{0\prime}(Q) \tag{2.16}$$

Тогда из (2.15) следует, что $F_1 = 0$, а функционал F_2 не зависит от времени. Для функции V в силу (2.11), (2.16) получается

$$V(q, Q) = f_q(q, Q) \tag{2.17}$$

Соотношения (2.11), (2.17) дают неравенства

$$0 \leqslant c_1^- \leqslant f_{qq}(q,Q) \leqslant c_1^+ < +\infty \tag{2.18}$$

которые означают выпуклость f на интервале (Q^-, Q^+), т.е. во всей области значений аргумента q. Применяя формулу для остаточного члена в форме Лагранжа [13], функцию f_1 (2.15) можно преобразовать к виду

$$f_1(q,Q) = \tfrac{1}{2} f_{qq}(Q_*,Q)\kappa^2, \quad Q_* = Q + \vartheta\kappa, \quad 0 < \vartheta < 1, \quad \kappa = q - Q$$

В результате (2.18) переписывается следующим образом:

$$c_1^-\kappa^2 / 2 \leqslant f_1(q,Q) \leqslant c_1^+\kappa^2 / 2 \tag{2.19}$$

откуда при учете постоянства функционала F_2 (2.15) во времени и вытекает оценка (2.13).

Пусть теперь начальное поле лагранжевой координаты $q_0(r, \mu)$ произвольно, а начальные поля $\rho_{10}(r,\mu)$, $\rho_{20}(r,\mu)$ вычисляются по нему при помощи равенств (2.14). В этом случае возникает необходимость рассмотрения значений q, лежащих вне интервала (Q^-, Q^+). Для этого функция $f(q, Q)$ (2.15) доопределяется на всю ось q с сохранением неравенств (2.19). Понятно, что с использованием трех произвольных вне (Q^-, Q^+) функций $\Phi(q)$, $\rho_1^0(q)$ и $\rho_2^0(q)$ такое продолжение может быть выполнено бесконечным числом способов. Из (2.19), где уже $-\infty < q < +\infty$, и условия независимости F_2 от времени вновь следует требуемая оценка (2.13). Утверждение 1 доказано.

Задача нелинейной устойчивости винтовых стационарных течений однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости в отсутствие магнитного поля рассматривалась ранее [6, 7]. Достаточное условие устойчивости этих течений к конечным возмущениям того же типа симметрии было получено в виде

$$0 \leq c_3^- \leq g_1 / \left(p_1^0\right)_r \leq c_3^+ < +\infty \tag{2.20}$$

где c_3^- и c_3^+ – постоянные величины. Сравнение неравенств (2.12) и (2.20) показывает, что второе из них – частный случай первого, если $\mathbf{h} = 0$, $q = \rho_1$ (2.2).

Таким образом, для $q \neq \rho_1$, $\mathbf{h} = 0$ Утверждение 1 приводит к критериям устойчивости винтовых течений идеальной жидкости в рамках новых определений, отличных от предложенного в [6, 7]. Кроме того, при $h \neq 0$ Утверждение 1 следует трактовать как обобщение результата [6, 7] на МГД течения.

В случае $a = 0$ все полученные в этом разделе результаты непосредственно переносятся на вращательно-симметричные движения.

3. Плоские течения. В декартовых координатах x, y, z изучаются движения, все поля в которых не зависят от координаты z, причем поле скорости $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, t) = (u, \upsilon, 0)$, а магнитное поле $\mathbf{h} = \mathbf{h}(x, y, t) = (0, 0, h_3)$. В результате исходные уравнения движения (1.1) принимают форму

$$Du = -p_x^*, \quad D\upsilon = -p_y^*, \quad Dh_3 = 0, \quad u_x + \upsilon_y = 0 \tag{3.1}$$

$$D = \partial / \partial t + u\partial / \partial x + \upsilon\partial / \partial y$$

где $p^* = p + (8\pi)^{-1} h_3^2$ – модифицированное давление. Предполагается, что жидкость движется в пределах фиксированной области τ, компоненты границы которой имеют форму цилиндрических поверхностей с параллельными оси z образующими и определяются соотношениями

$$S_\alpha(x, y) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, m \tag{3.2}$$

Здесь α – номер составляющей границы области. На плоскости x, y область τ течения ограничивается кривыми $\partial\tau_\alpha$ (3.2), так что для ее границы $\partial\tau$ справедлива связь

$$\partial\tau = \bigcup_{\alpha=1}^{m} \partial\tau_\alpha \tag{3.3}$$

Граничные условия непротекания (1.2) на $\partial\tau$ (3.3) дают

$$u(s_\alpha)_x + \upsilon(s_\alpha)_y = 0 \tag{3.4}$$

Начальные данные (1.3) для уравнений (3.1) преобразуются к виду

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad \upsilon(x, y, 0) = \upsilon_0(x, y) \tag{3.5}$$

$$h_3(x, y, 0) = h_{30}(x, y)$$

Вводятся функция тока ψ и поле вихря ω, такие, что

$$u = -\psi_y, \quad \upsilon = \psi_x, \quad \omega = \upsilon_x - u_y = \Delta\psi \tag{3.6}$$

Исключение модифицированного давления p^* в первых двух уравнениях системы (3.1) при помощи (3.6) приводит к уравнению переноса вихря

$$D\omega = 0 \tag{3.7}$$

Из (3.1), (3.7) вытекает сохранение в каждой жидкой частице как магнитного поля, так и завихренности. Следовательно, можно рассмотреть произвольное скалярное поле q (x, y, t), которое при движениях жидкости также переносится каждой из жидких частиц [8]

$$Dq = 0 \tag{3.8}$$

В связи с этим ниже исследуется задача (3.1) – (3.4), (3.7), в которой третье из уравнений (3.1) заменено на уравнение (3.8). При этом начальные данные (3.5) запишутся в таком виде:

$$\psi(x,y,0)=\psi_0(x,y), \quad q(x,y,0)=q_0(x,y) \tag{3.9}$$

Интеграл энергии для задачи (3.1) – (3.4), (3.7) – (3.9) выглядит следующим образом:

$$2E=\int\limits_{\tau}\left(u^2+v^2\right)d\tau=\text{const}, \quad d\tau=dxdy \tag{3.10}$$

В силу (3.8) имеет место интеграл движения

$$I=\int\limits_{\tau}\Phi(q)d\tau=\text{const} \tag{3.11}$$

где $\Phi(q)$ – произвольная функция аргумента q. Кроме того, сохраняются величины

$$\Gamma_\alpha=\int\limits_{\partial\tau_\alpha}\left(\mathbf{n}\nabla\psi\right)dl=\text{const}, \quad dl=\left(dx^2+dy^2\right)^{1/2} \tag{3.12}$$

имеющие смысл циркуляций скорости по контурам $\partial\tau_\alpha$ границы $\partial\tau$ (dl – элемент длины контура $\partial\tau_\alpha$).

Полагается, что существуют точные стационарные решения задачи (3.1) – (3.4), (3.7) – (3.9)

$$\psi=\Psi(x,y), \quad \omega=\Omega(x,y), \quad q=Q(x,y) \tag{3.13}$$

причем поля Ψ, Ω и Q удовлетворяют соотношениям

$$[\Psi,\Omega]=0, \quad [\Psi,Q]=0 \tag{3.14}$$

Равенства (3.14) отвечают наличию функциональных зависимостей

$$f_0(\Psi,\Omega)=0, \quad f_1(\Psi,Q)=0, \quad f_2(\Omega,Q)=0$$

которые при $\nabla Q\neq 0$ внутри потока [11] разрешаются в виде

$$\Psi=\Psi(Q), \quad \Omega=\Omega(Q), \quad Q\in(Q^-,Q^+), \tag{3.15}$$

$$Q^-=\min Q(x,y), \quad Q^+=\max Q(x,y) \text{ в } \tau$$

Далее изучаются нестационарные решения задачи (3.1) – (3.4), (3.7) – (3.9)

$$\psi=\Psi(Q)+\varphi(x,y,t) \tag{3.16}$$

$$\omega=\Omega(Q)+\sigma(x,y,t), \quad q=Q(x,y)+\kappa(x,y,t)$$

где поля φ, σ, κ рассматриваются как возмущения решений (3.13), (3.15). Предполагается, что при соответствующем задании начальных данных (3.9) решения (3.16) существуют, непрерывны и обладают непрерывными входящими в (3.1) – (3.4), (3.7) – (3.9) производными.

Пусть поля ω и q зависят друг от друга по одному из следующих двух законов.

1°. Поля $q(x, y, 0)$ и $\omega(x, y, 0)$ в (3.6), (3.9) получаются из $Q(x, y)$ и $\Omega(x, y)$ (3.13) при помощи одного поля взаимных перемещений частиц несжимаемой жидкости. Величины q и ω при таких перемещениях постоянны в каждой жидкой частице и равны своим значениям в невозмущенном течении (3.13). При этом

$$\omega=\Omega(q), \quad q\in(Q^-,Q^+), \quad \omega\in(\Omega^-,\Omega^+) \tag{3.17}$$

$$\Omega^-=\min\Omega(x,y), \quad \Omega^+=\max\Omega(x,y) \text{ в } \tau$$

Из (3.17) следует, что связь между q и ω, интервалы определения этих величин такие же, как и в (3.15).

2°. Какое-либо из полей $\omega(x, y, 0)$ или $q(x, y, 0)$ считается произвольным, а второе получается из него при помощи соотношения $\omega = \Omega(q)$ (3.17). Функция $\Omega(q)$ при $q \in (Q^-, Q^+)$ берется из (3.15) и произвольным (достаточно гладким) образом продолжается за этот интервал на всю ось q. Ограничения на этот произвол возникнут позже.

Для обоих случаев ясно, что связь $\omega = \Omega(q)$, выполненная в начальный момент, остается справедливой в любой последующий момент времени.

Условие 1° накладывает ограничение на начальное поле вихря, условие 2° – нет. Естественно, что условие 1° содержится в 2° как частный случай.

С учетом соотношений (3.15) строится вспомогательная функция двух переменных $V = V(X, Y)$:

$$V = \Omega'(X)[\Psi(X) - \Psi(Y)]; \quad X, Y \in (Q^-, Q^+) \tag{3.18}$$

Утверждение 2. Если во всей области τ течения справедливо неравенство

$$0 \leqslant c_2^- \leqslant \partial V / \partial X \leqslant c_2^+ < +\infty \tag{3.19}$$

с постоянными c_2^- и c_2^+, то в любой момент времени возмущения φ, κ оцениваются через свои начальные значения φ_*, κ_* следующим образом:

$$\int\limits_\tau \left\{(\nabla\varphi)^2 + c_2^-\kappa^2\right\} dxdy \leqslant \int\limits_\tau \left\{(\nabla\varphi_*)^2 + c_2^+\kappa_*^2\right\} dxdy \tag{3.20}$$

Доказательство. Полагается, что выполнено условие 1° (3.17) отсутствия лагранжевых возмущений поля q (3.8).

Из интегралов (3.10) – (3.12) задачи (3.1) – (3.4), (3.7) – (3.9) составляется сохраняющийся функционал [5, 8, 9]

$$R(\psi, q) = \frac{1}{2}\int\limits_\tau \left\{(\nabla\psi)^2 + 2\Phi(q)\right\} dxdy + \sum_{\alpha=1}^{m} b_\alpha \Gamma_\alpha = R(\Psi, Q) + R_1 + R_2$$

$$R_1 = \sum_\alpha \left(\Phi_\alpha + b_\alpha\right) \int\limits_{\partial\tau_\alpha} \mathbf{n}\nabla\varphi dl + \int\limits_\tau f_q(Q, Q)\kappa dxdy \tag{3.21}$$

$$R_2 = \frac{1}{2}\int\limits_\tau \left\{(\nabla\varphi)^2 + 2f_3(q, Q)\right\} dxdy$$

$$f_3(q, Q) = f(q, Q) - f(Q, Q) - \kappa f_q(Q, Q)$$

$$f(q, Q) = \Phi(q) - \Psi(Q)\Omega(q), \quad f_q(q, Q) = \partial f(q, Q) / \partial q$$

где b_α – произвольные постоянные величины, Ψ_α – значения стационарной функции тока Ψ (3.13) на контурах $\partial\tau_\alpha$ (3.2). Произвольная функция $\Phi(q)$ и постоянные b_α выбираются таким образом, чтобы имели место соотношения

$$\Phi'(Q) = \Psi(Q)\Omega'(Q), \quad b_\alpha = -\Psi_\alpha \tag{3.22}$$

после чего, в силу (3.21), оказывается, что $R_1 = 0$, а функционал R_2 не зависит от времени. Функция V, как это видно из (3.18), (3.22), удовлетворяет следующей связи:

$$V(q, Q) = f_q(q, Q) \tag{3.23}$$

Тогда при помощи (3.19), (3.23) получаются неравенства

$$0 \leqslant c_2^- \leqslant f_{qq}(q, Q) \leqslant c_2^+ < +\infty \tag{3.24}$$

Из (3.24) вытекает, что функция f выпукла на всем интервале изменения аргумента q (3.17). Используя выражение для остаточного члена в форме Лагранжа [13], функцию f_3 (3.21) можно записать в виде

$$f_3(q,Q)=\frac{1}{2}f_{qq}(Q_*,Q)\kappa^2,\quad Q_*=Q+\vartheta\kappa \tag{3.25}$$

$$0<\vartheta<1,\quad \kappa=q-Q$$

Соотношения (3.24), (3.25) приводят к следующему двойному неравенству

$$c_2^-\kappa^2/2\leqslant f_3(q,Q)\leqslant c_2^+\kappa^2/2 \tag{3.26}$$

из которого при учете независимости R_2 (3.21) от времени и следует оценка (3.20).

Если же выполняется условие 2°, то появляется необходимость рассмотрения значений q вне интервала (Q^-, Q^+). Для этого функция $f(q, Q)$ (3.21) доопределяется на всю ось q так, чтобы сохранялась истинность неравенств (3.26). Несомненно, что с помощью двух произвольных вне (Q^-, Q^+) функций $\Phi(q)$ и $\Omega(q)$ такое продолжение может быть осуществлено бесконечным числом способов. В результате из (3.26), где теперь $-\infty<q<+\infty$, и условия постоянства функционала R_2 во времени опять получается требуемая оценка (3.20). Утверждение 2 доказано.

В задаче о нелинейной устойчивости плоских стационарных течений однородной по плотности идеальной жидкости в магнитном поле, перпендикулярном плоскости движения, было найдено [9] достаточное условие устойчивости рассматриваемых течений относительно конечных возмущений той же симметрии, совпадающее с более ранним результатом [5] и имеющее вид

$$0\leqslant c_4^-\leqslant d\Psi/d\Omega\leqslant c_4^+<+\infty \tag{3.27}$$

где c_4^- и c_4^+ – постоянные величины. Сравнение (3.27) с (3.19) показывает, что первое – частный случай последнего, если $q=\omega$ (3.6).

Итак, Утверждение 2 дает при $q\neq\omega$ критерии устойчивости исследуемых течений идеальной жидкости в рамках новых определений, отличных от предложенного в [5, 9].

4. Пример. Рассматриваются винтовые стационарные течения однородной по плотности идеальной несжимаемой жидкости в магнитном поле:

$$\mathbf{u}^0=\left(0,\ \upsilon^0,\ \frac{a\upsilon^0}{br}\right)^0,\quad \mathbf{h}^0=\left(0,\ h_2^0,\frac{ah_2^0}{br}\right),\ \upsilon^0=c_5\frac{r}{R},\ h_2^0=c_6r \tag{4.1}$$

где c_5 и c_6 – произвольные постоянные величины. Если в качестве Q выбрать координату r, то из достаточного условия нелинейной устойчивости (2.12) для течений (4.1) будут следовать равенства

$$\sum_{i=1,2}\left\{-\rho_i^{0'}(r)U_i'(r)+\rho_i^{0''}(r)\left[U_i(r_0)-U_i(r)\right]\right\}=0,\quad c_1^-=0$$

В этом случае оценка устойчивости (2.13) примет вид

$$\int_\tau\left(\lambda^2R^{-1}+u^2\right)d\tau\leqslant\int_\tau\left(\lambda_*^2R^{-1}+u_*^2+c_1^+\kappa_*^2\right)d\tau$$

Отметим, что достаточное условие нелинейной устойчивости (2.20) [6, 7] неприменимо к течениям (4.1), поскольку не существует таких неотрицательных констант c_3^- и c_3^+, которыми можно было бы ограничить соответственно снизу и сверху величину $g_1/(\rho_1^0)_r$.

Авторы благодарят Б.А. Луговцова и К.И. Ильина за внимание к работе и обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: Наука, 1965. 207 с.
2. *Моисеев Н.Н., Румянцев В.В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 439 с.
3. *Fjortoft R.* Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminal flows and for the baroclinic circular vortex // Geofys. Publ. 1950. V. 17. № 6. P. 4–52.
4. *Арнольд В.И.* Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости // Докл. АН СССР. 1965. Т. 162. № 5. С. 975–978.
5. *Арнольд В.И.* Об одной априорной оценке теории гидродинамической устойчивости // Изв. вузов. Математика. 1966. № 5. С. 3–5.
6. *Владимиров В.А.* Условия нелинейной устойчивости течений идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 1986. № 3. С. 70–78.
7. *Vladimirov V.A.* On nonlinear stability of incompressible fluid flows // Arch. Mech. 1986. V. 38. № 5/6. P. 689–696.
8. *Губарев Ю.Г.* К нелинейной устойчивости гидродинамических и МГД течений // Материалы 28-й Всесоюз. науч. студ. конф. "Студент и научно-технический прогресс". Физика / Новосибирск: Изд-во НГУ, 1990. № 6. С. 85–91.
9. *Holm D.D., Marsden J.E., Ratiu T., Weinstein A.* Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria // Physics Reports. 1985. V. 123. № 1/2. P. 1–116.
10. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
11. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 1. М.: Наука, 1965. 479 с.
12. *Арнольд В.И.* Вариационный принцип для трехмерных стационарных течений идеальной жидкости // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 5. С. 846–851.
13. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. М.: Наука, 1970. 607 с.

Новосибирск

Поступила в редакцию
7.VI.1994