

УДК 533.6

© 1995 г. В.У. Набиев, С.В. Утюжников, Н.К. Ямалеев

### ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ЧЕРЕЗ КРУПНОМАСШТАБНУЮ НЕОДНОРОДНОСТЬ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ АТМОСФЕРЕ

Исследуется свободное движение притупленного тела вращения большого удлинения через всплывающее в стратифицированной атмосфере крупномасштабное облако нагретого газа (термик). Предлагается эффективный численный метод определения траектории тела, основанный на одновременном решении задач обтекания и баллистики. При этом задача обтекания решается экономичным по затратам ресурсов ЭВМ численным методом, основанным на разложении по малому параметру [1, 2], которым является угол атаки, в сочетании с методом глобальных итераций [2, 3]. Определено влияние всплывающего крупномасштабного облака нагретого газа на траекторию, ориентацию в пространстве и устойчивость тела. Показано, что на некоторых режимах полета наличие на пути тела всплывающего облака пониженной плотности может приводить к опрокидыванию тела.

При исследовании движения тела в атмосфере необходимо определять траекторию, которая зависит от значений аэродинамических коэффициентов, определяемых при решении задачи обтекания. В то же время решение задачи обтекания зависит от ориентации тела в пространстве и параметров набегающего потока, определяемых траекторией. Как правило, для приближенного решения такой задачи решают только системы уравнений по определению движения тела в пространстве (задачу баллистики), а для определения текущих значений аэродинамических коэффициентов либо обращаются к банку данных, который насчитывается заранее, либо проводят расчеты по приближенным формулам.

Для решения рассматриваемой проблемы с высокой точностью нужно интегрировать одновременно и уравнения движения твердого тела, и уравнения, описывающие движение газа около тела. Такой подход требует больших затрат вычислительных ресурсов, так как на каждом шаге по времени приходится решать сложную систему уравнений по определению аэродинамических коэффициентов. При этом шаг интегрирования необходимо выбирать достаточно малым (порядка характерного времени изменения угла атаки). Последний подход можно значительно улучшить в случае сверхзвукового движения удлиненных тел вращения. Такое свободное движение сопровождается, как правило, малыми углами атаки.

Для решения уравнений движения газа около тела ниже предлагается применять метод малого параметра [1, 2], которым является угол атаки. При этом в случае фиксированных условий набегающего потока получается однопараметрическое семейство решений, соответствующих различным углам атаки. Другими словами, зависимость от угла атаки при таком подходе выделяется аналитически. В силу того что характерное время изменения угла атаки, как правило, существенно меньше характерного времени изменения параметров набегающего потока, предлагаемый подход позволяет решать задачу обтекания значительно реже. Предлагаемый метод отличается высокой степенью точности определения аэродинамических коэффициентов, траектории движения и ориентации тела, а также минимальными, для такой точности, затратами машинного времени.

**1. Постановка задачи.** Предполагается, что в начальный момент времени в стратифицированной атмосфере Земли образовалось облако нагретого газа со следующими параметрами:

$$T(z, r) = T_a(z) + (T_{\max} - T_a(z)) \exp\{-(R_T^{-1}l)^2\} \quad (1.1)$$

где  $R_T = 4$  км,  $T_{\max} = 10^4$  К,  $T_a(z)$  – температура невозмущенной атмосферы на высоте  $z$ ,  $l$  – расстояние от центра сферического объема. Положение максимума температуры соответствует высоте  $H = 20$  км.

Под действием архимедовой силы облако всплывает, образуя вихревое кольцо. Процесс вихреобразования сопровождается интенсивным турбулентным перемешиванием холодных и горячих слоев воздуха. Через 15 с после начала всплытия облака на высоте около 22 км в него влетает тело со скоростью 2000 м/с, имеющее форму затупленного по сфере конуса с радиусом затупления  $R_0 = 0,1$  м, углом полураствора  $15^\circ$ , длиной 2 м и массой 1 т, центр масс тела располагается на расстоянии  $L$  от вершины. Момент, в который тело находится на расстоянии 8300 м от оси симметрии термика, принимается за начало отсчета времени. Тело движется в плоскости, проходящей через ось симметрии термика и точку, в которой в начальный момент находилось тело.

К моменту влета тела газ свернулся в тороидальное вихревое кольцо, которое всплывает в атмосфере. В силу этого набегающий на тело поток имеет изменяющуюся пространственно-временную структуру. Предполагается, что тело не оказывает влияния на движение газа в термике.

**2. Численный метод решения задачи.** Численный метод расчета конвективно-диффузионного движения воздуха в области термика описан в [4], где исследовано также движение затупленного тела по заданной прямолинейной траектории.

Движение газа около тела описывалось системой полных уравнений вязкого ударного слоя. Предполагалось, что течение газа в ударном слое между поверхностями тела и ударной волны квазиустановившееся в каждой точке траектории, так как характерное время движения жидкой частицы в ударном слое много меньше характерного времени изменения параметров задачи.

Для решения системы уравнений движения применялся метод малого параметра [1, 2]. Суть метода заключается в разложении искомого пространственного решения в асимптотический ряд по углу атаки. Затем коэффициенты разложения при степенях  $\alpha$  (где  $\alpha$  – угол атаки) раскладываются в формальный ряд Фурье по меридиональному углу. Удерживается лишь первый член разложения по  $\alpha$ . При этом искомые функции представляются в виде  $\Phi = \Phi_0 + \alpha\Phi_1 \cos\psi$ , где  $\psi$  – меридиональный угол.

В результате применения метода малого параметра получаются значения аэродинамических коэффициентов в следующем виде: коэффициент лобового сопротивления  $C_x = C_{x_0}$ , коэффициент подъемной силы  $C_y = \alpha C_{y_1}$ , момент тангажа  $M_z = \alpha M_{z_1}$ . Здесь  $C_{x_0}, C_{y_1}, M_{z_1}$  уже не зависят от  $\alpha$ .

Коэффициенты разложения Фурье  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$  определялись методом глобальных итераций [2, 3].

Траектория движения тела и его ориентация в пространстве определяется системой уравнений [5].

$$\frac{d}{dt} \xi = F(\xi, Q, A) \quad (2.1)$$

где

$$\xi = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ v \\ \theta \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \\ \rho \\ T \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} C_x \\ C_{y_1} \\ M_{z_1} \end{pmatrix}, \quad \gamma = \dot{\beta}$$

$$F = \begin{pmatrix} v \sin \theta \\ v r^{-1} \cos \theta \\ -g \sin \theta - \frac{S}{2m} \rho V^2 C_x \\ \left( \frac{v}{r} - \frac{g}{v} \right) \cos \theta + \frac{S}{2m} \rho V C_y \\ \gamma \\ -\frac{Sl^2}{2J_z} \rho V M_z^\omega \gamma - \frac{Sl}{2J_z} \rho V^2 M_z \end{pmatrix}$$

Здесь  $r, \varphi$  – полярные координаты центра масс тела; полюс системы координат совпадает с центром Земли, полярной осью является ось  $Y$  декартовой системы координат, плоскость  $X, Y$  которой совпадает с плоскостью движения центра масс тела, причем ось  $Y$  проходит через центр Земли и положение центра масс тела в начальный момент времени; отсчет угла  $\varphi$  происходит по часовой стрелке;  $v$  – модуль вектора скорости  $v$  центра масс тела;  $\theta$  – угол между векторами  $v$  и  $r_\varphi$ , отсчитываемый от последнего против часовой стрелки,  $r$  – радиус-вектор центра масс тела,  $r = |r|$ ; индекс  $z$  означает, что соответствующая величина вычисляется относительно оси, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости траектории движения;  $m, S, l, J_z$  – соответственно масса, максимальная площадь поперечного сечения, длина и момент инерции тела;  $V$  – модуль скорости набегающего потока относительно тела;  $\rho$  – плотность воздуха в набегающем потоке;  $C_x, C_y, M_z$  – аэродинамические коэффициенты, причем  $C_y = \alpha C_{y_1}, M_z = \alpha M_{z_1}; M_z^\omega$  – аэродинамический демпфирующий момент;  $\beta$  – угол, отсчитываемый против часовой стрелки между осью симметрии тела и направлением оси  $X$ .

Вектор  $\xi$  полностью описывает движение тела в пространстве, вектор  $Q$  имеет своими компонентами необходимые для расчета параметры термика ( $W_x, W_y$  – компоненты скорости потока в термике по осям координат  $X$  и  $Y$  соответственно,  $\rho$  – плотность,  $T$  – температура воздуха в рассматриваемой точке пространства и момент времени). При этом  $A = A(\xi, Q), Q = Q(\xi, t)$ ; зависимость вектора  $Q$  от времени обусловлена движением термика.

Угол атаки вычисляется по формуле

$$\alpha = \beta + \arcsin\{V_y V^{-1}\}$$

где  $V_y$  – проекция вектора скорости набегающего потока  $V$  на ось  $Y$ .

Значения величин  $\varphi, \theta, \beta, \dot{\beta}$  в момент  $t = 0$  для простоты полагаются равными нулю.

В настоящей постановке величиной  $M_z^\omega$  пренебрегали ввиду ее малости.

Решение всей системы определяющих уравнений осуществляется следующим образом.

В начальный момент времени решается система уравнений вязкого ударного слоя

при заданных параметрах набегающего потока. Затем, в течение времени  $\Delta t_g$ , интегрируется система уравнений баллистики по определению положения центра масс и ориентации тела в пространстве с фиксированными значениями  $C_{x0}$ ,  $C_{y1}$  и  $M_{z1}$ , которые зависят только от параметров набегающего потока, но с переменным значением угла атаки  $\alpha$ . Шаг  $\Delta t_g$  определяется характерным временем изменения параметров набегающего потока. При этом система уравнений баллистики интегрируется с шагом  $\Delta t_b \ll \Delta t_g$ . Это обусловлено тем, что характерное время изменения угла атаки много меньше характерного времени изменения параметров набегающего потока (тело совершает колебания около положения, соответствующего нулевому углу атаки). Через время  $\Delta t_g$  последовательность решения всей системы повторяется с, возможно, другими значениями  $\Delta t_b$  и  $\Delta t_g$ .

Система уравнений (2.1) интегрируется следующим образом.

Рассмотрим систему (2.1) на отрезке времени  $[t^n, t^{n+1}]$ , где  $t^{n+1} = t^n + (\Delta t_g)^n$ . Предположим, что в момент  $t^n$ , известны значения всех величин (3.2) и производные по времени векторов  $\xi$  и  $Q$ .

На отрезке  $[t^n, t^{n+1}]$  систему (2.1) заменим системой

$$\frac{d}{dt} \xi = F(\xi, G^n(t), U^n(t)) \quad (2.2)$$

$$U^n(t) = A^n + \frac{A^{n+1} - A^n}{(\Delta t_g)^n} (t - t^n), \quad A^{n+1} = A(\xi_0^{n+1}, Q(\xi_0^{n+1}, t^{n+1}))$$

где  $G^n(t)$  – локальный сплайн, аппроксимирующий функцию  $Q(t)$  на отрезке  $[t^n, t^{n+1}]$ , построенный по значениям функции  $G(t)$  и ее производных в точках  $t^n$  и  $t^{n+1}$ ;  $\xi_0^{n+1}$  находится из решения задачи Коши

$$\frac{d}{dt} \xi_0 = F(\xi_0, Q_0^n(t), A^n), \quad \xi_0(t^n) = \xi(t^n)$$

$$Q_0^n(t) = Q^n + \frac{d}{dt} G^{n-1}(t^n) \cdot (t - t^n) + \frac{d^2}{dt^2} G^{n-1}(t^n) \cdot (t - t^n)^2$$

в точке  $t^{n+1}$ .

Решение системы (2.2) с точностью  $O(\Delta t_g^2)$  дает решение исходной системы (2.1). Решение системы (2.2) осуществляется методом последовательных приближений, который реализуется за 2–4 итерации с погрешностью менее 1%. На каждой итерации метода последовательных приближений система уравнений (2.2) интегрировалась методом Рунге–Кутты третьего порядка точности по  $\Delta t_b$ . При этом характерное отношение  $\Delta t_b/\Delta t_g$  составляло  $10^{-2} - 10^{-3}$ . Шаг по времени  $\Delta t_g$  принимал значения 0.2–1 с.

Характерное время расчета промежутка физического времени  $\Delta t_g$  составляло несколько десятков минут на IBM 386/387.

**3. Результаты.** Газ в области термика под действием архимедовой силы сворачивается в вихревое кольцо. При этом термик, как целое, всплывает, а поле скоростей в нем образует подобие тора.

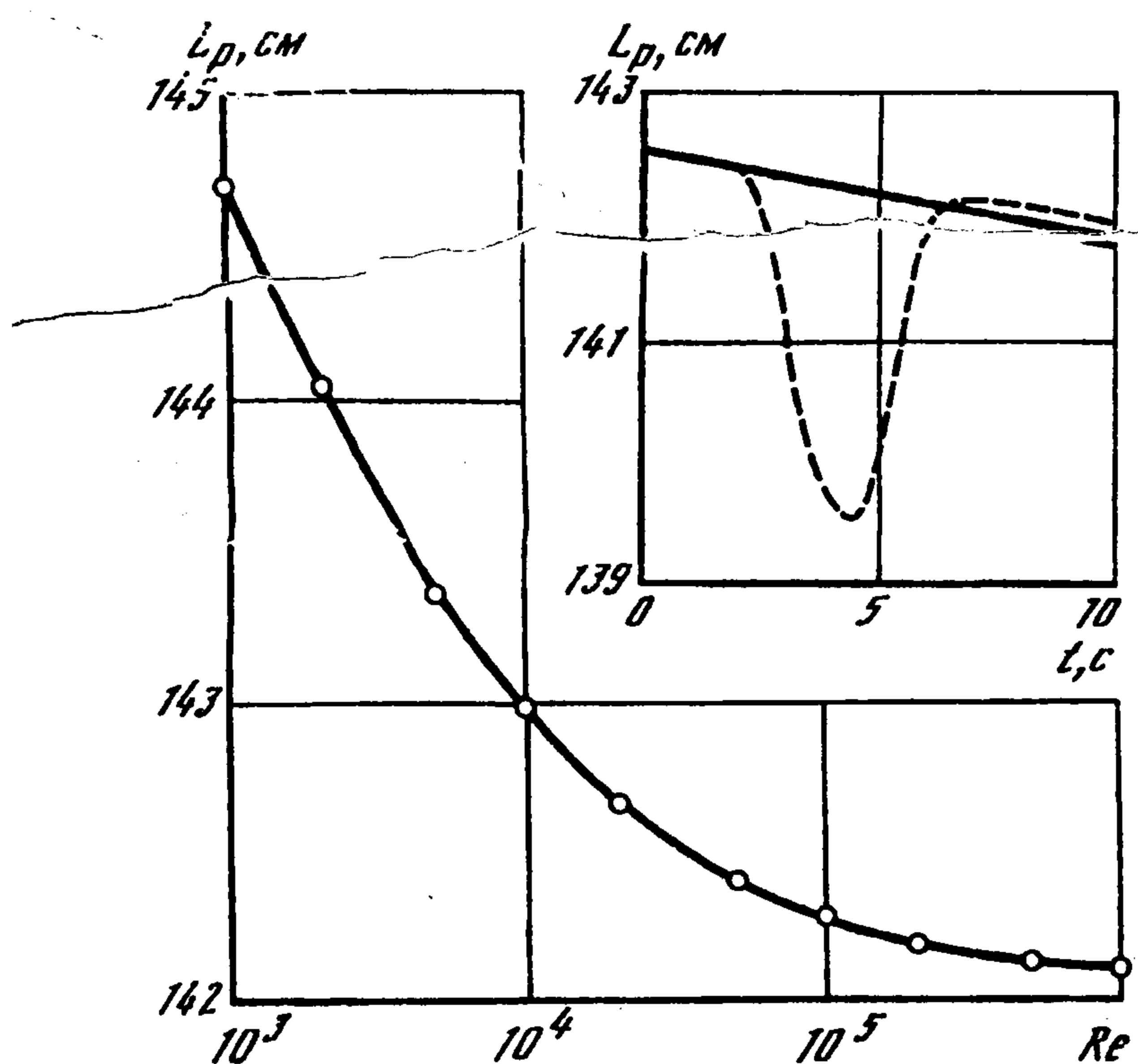
В невозмущенной атмосфере центр давления оказывается сзади центра масс, и движение тела является устойчивым. При движении тела к центру термика плотность набегающего потока быстро падает, а температура растет, что приводит к уменьшению чисел Маха  $M_\infty$  и Рейнольдса  $Re_\infty$ . Ниже приведены данные по температуре газа  $T_\infty$ , скорости потока газа в термике  $W$  и углу  $\vartheta$  наклона вектора  $W$  к оси симметрии термика в нескольких точках траектории (угол отсчитывается от ориентированной вверх оси симметрии термика против часовой стрелки); по параметрам набегающего потока определены значения  $M_\infty$  и  $Re_\infty$ , которые также даны ниже.

$t, c$	2,0	3,2	3,8	4,2	4,7	5,3	6,6
$T, K$	220,2	420,5	623,8	663,0	614,4	440,2	219,0
$W, m/c$	15,4	60,1	184,1	235,6	199,1	79,2	17,6
$\vartheta$	108,1°	26,7°	4,4°	0,0°	-3,2°	-15,3°	-145,6°
$M_\infty$	6,44	4,53	3,81	3,74	3,88	4,61	6,18
$Re_\infty \cdot 10^5$	8,33	2,41	1,41	1,34	1,56	2,82	8,50

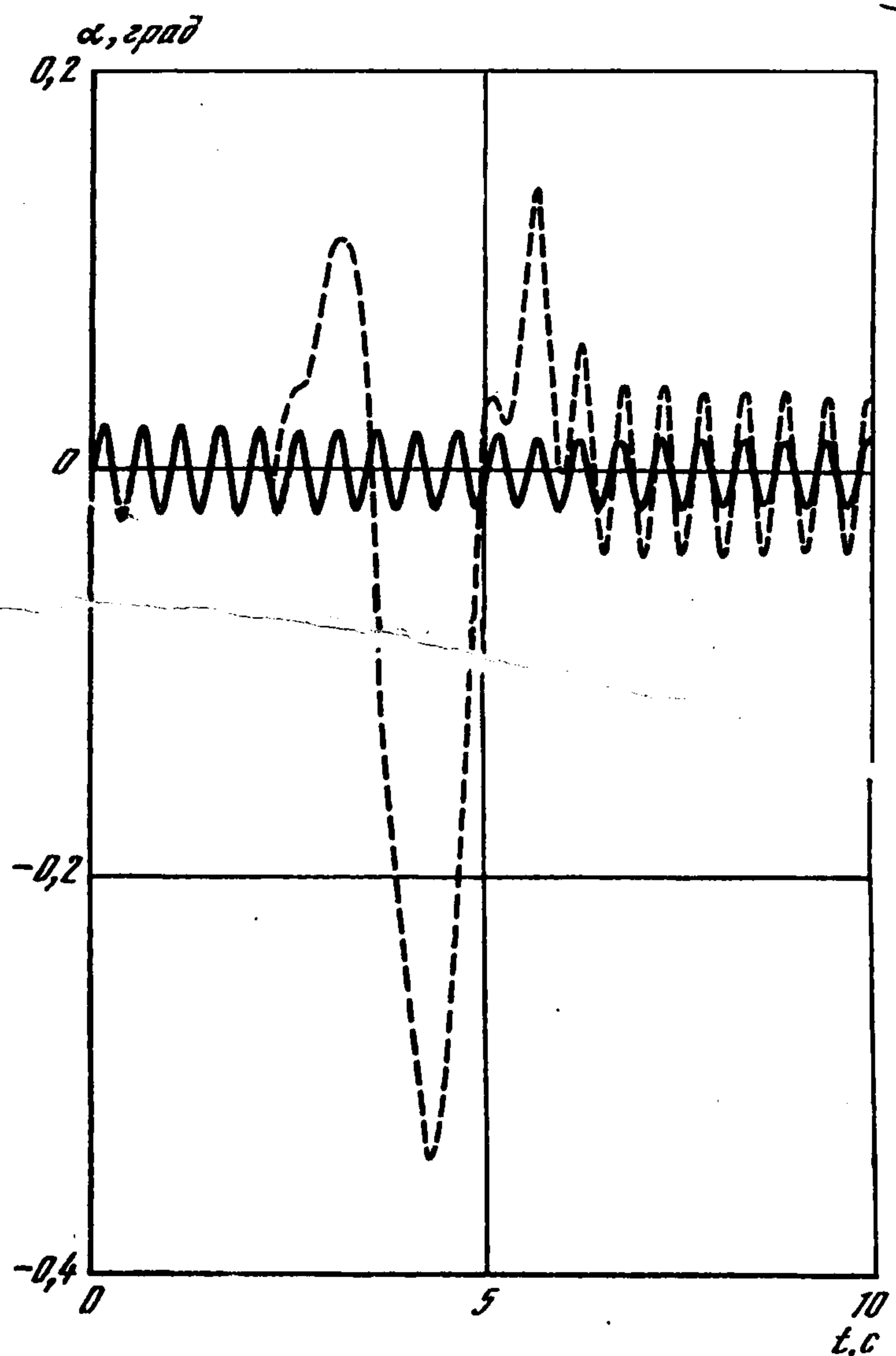
Уменьшение числа  $M_\infty$  при фиксированном числе  $Re_\infty$ , должно приводить к смещению центра давления в сторону вершины конуса. В то же время уменьшение  $Re_\infty$  при фиксированном  $M_\infty$  вызывает смещение центра давления в противоположную сторону, что видно из фиг. 1. Тем не менее суммарное влияние изменения  $M_\infty$  и  $Re_\infty$  вдоль траектории приводит к перемещению центра давления к вершине конуса, что понижает его устойчивость.

На фиг. 1 также приведена зависимость положения центра давления  $L_p$ , отсчитываемого от вершины конуса, как функция времени полета. Здесь и далее сплошная линия соответствует пролету через невозмущенную атмосферу, а штриховая – пролету через термик. Увеличение  $L_p$  после вылета из термика по отношению к невозмущенному случаю объясняется относительным возрастанием скорости тела, так как тело летело через менее плотную среду.

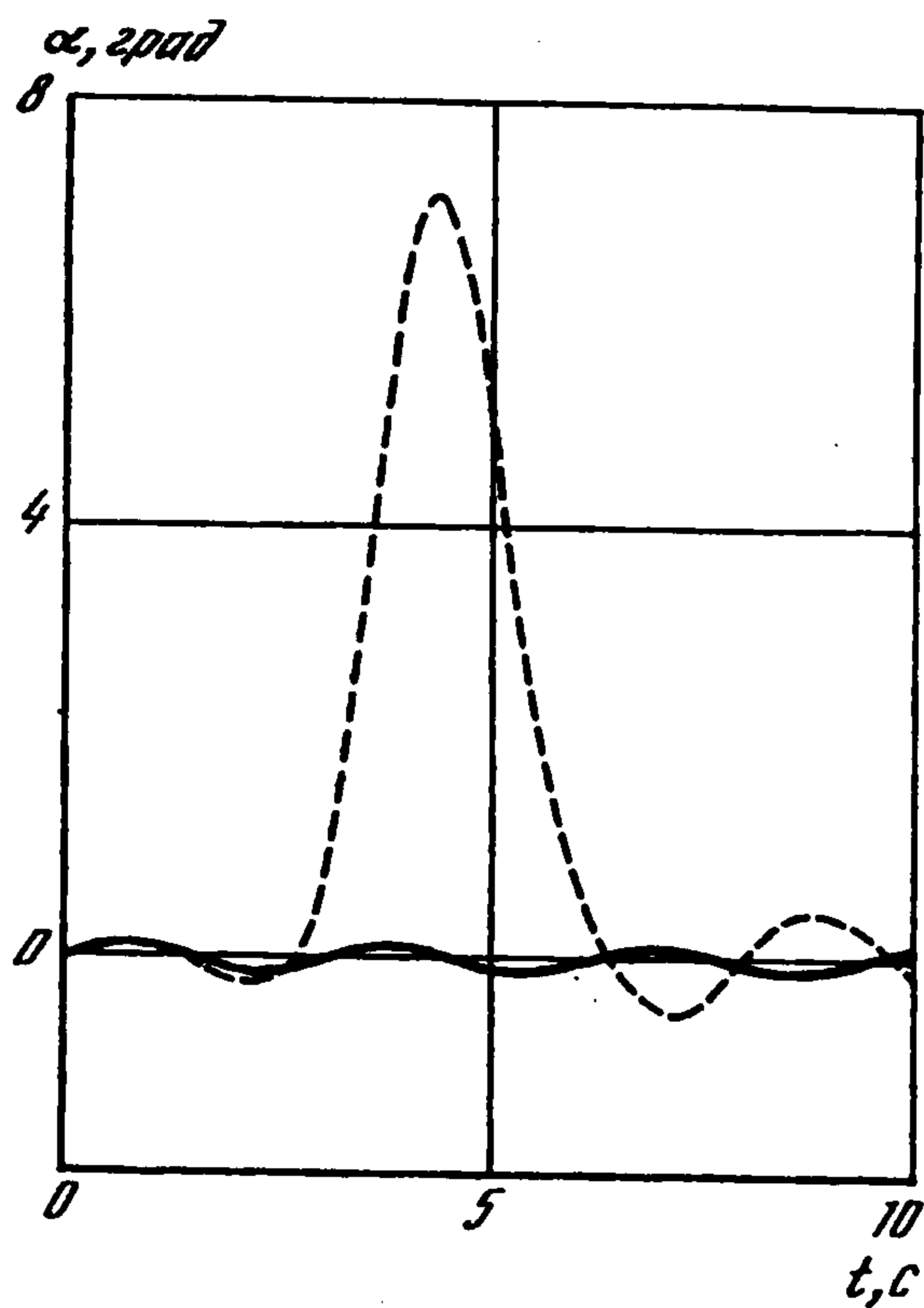
В процессе движения тело совершает колебания около положения, соответствующего нулевому углу атаки. При пролете через невозмущенную атмосферу амплитуда колебаний угла атаки невысокая (фиг. 2). Рассматривались два случая положения центра масс:  $L = 50$  см (фиг. 2) и  $L = 140$  см (фиг. 3). При  $L = 50$  см тело



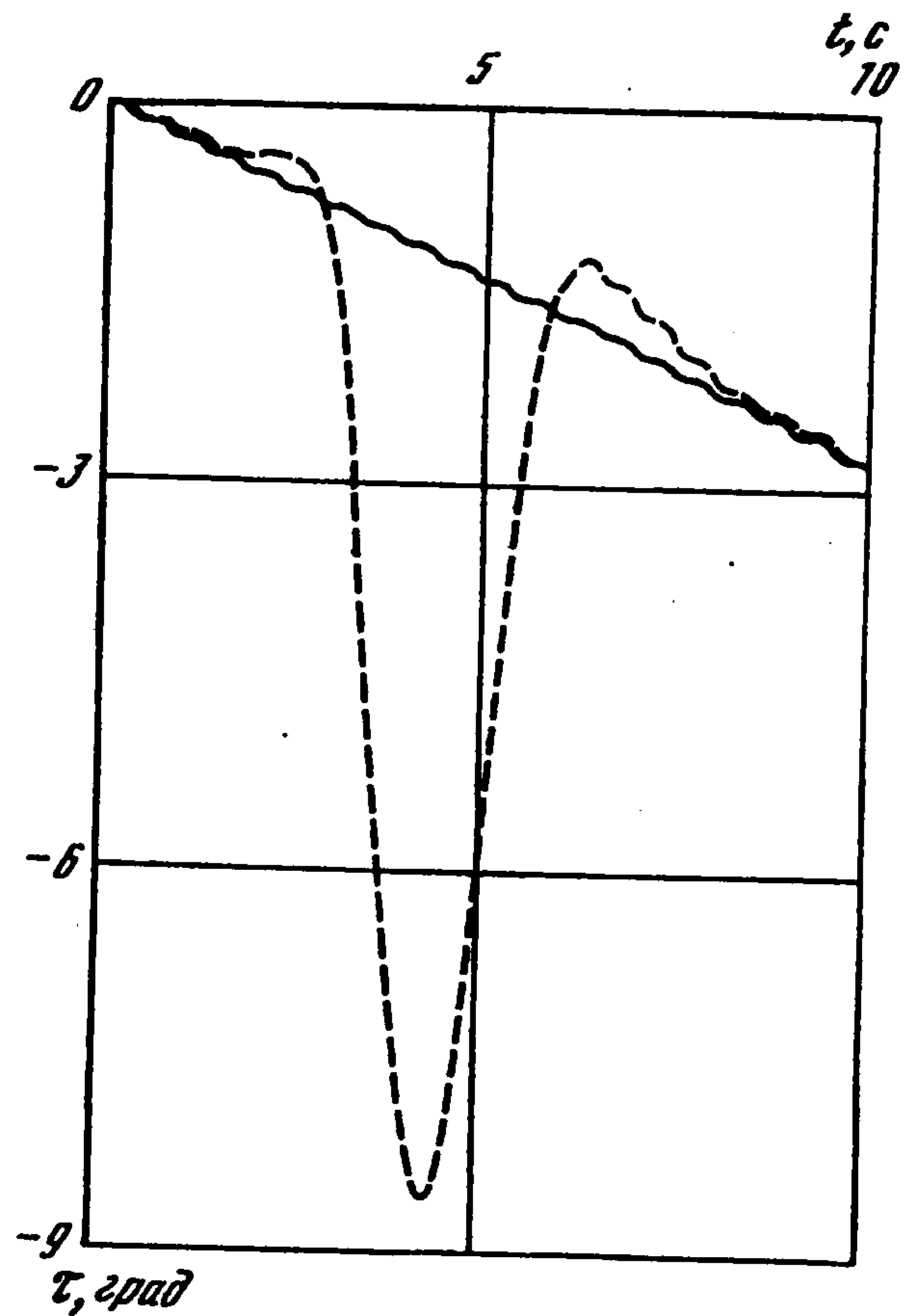
Фиг. 1



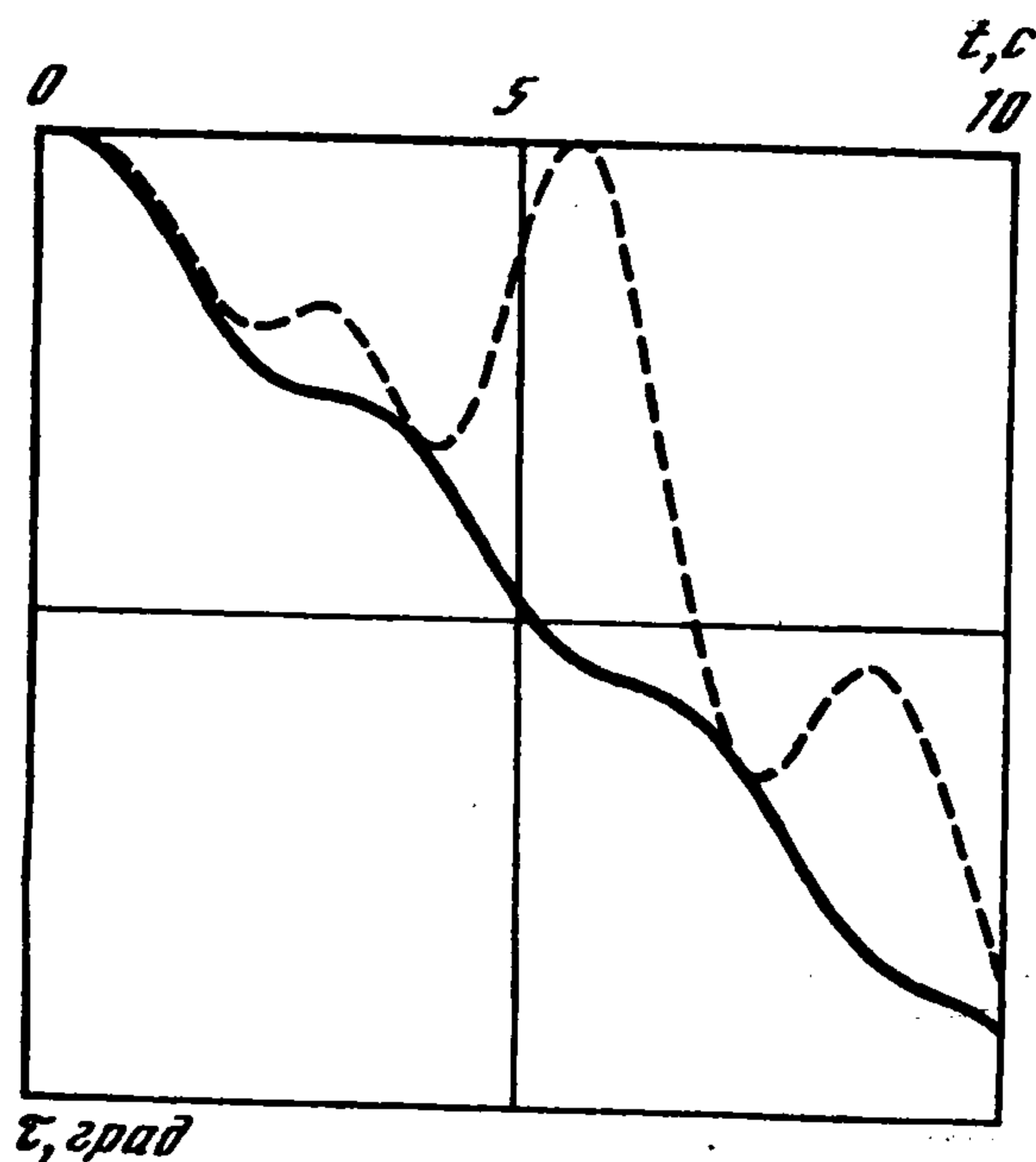
Фиг. 2



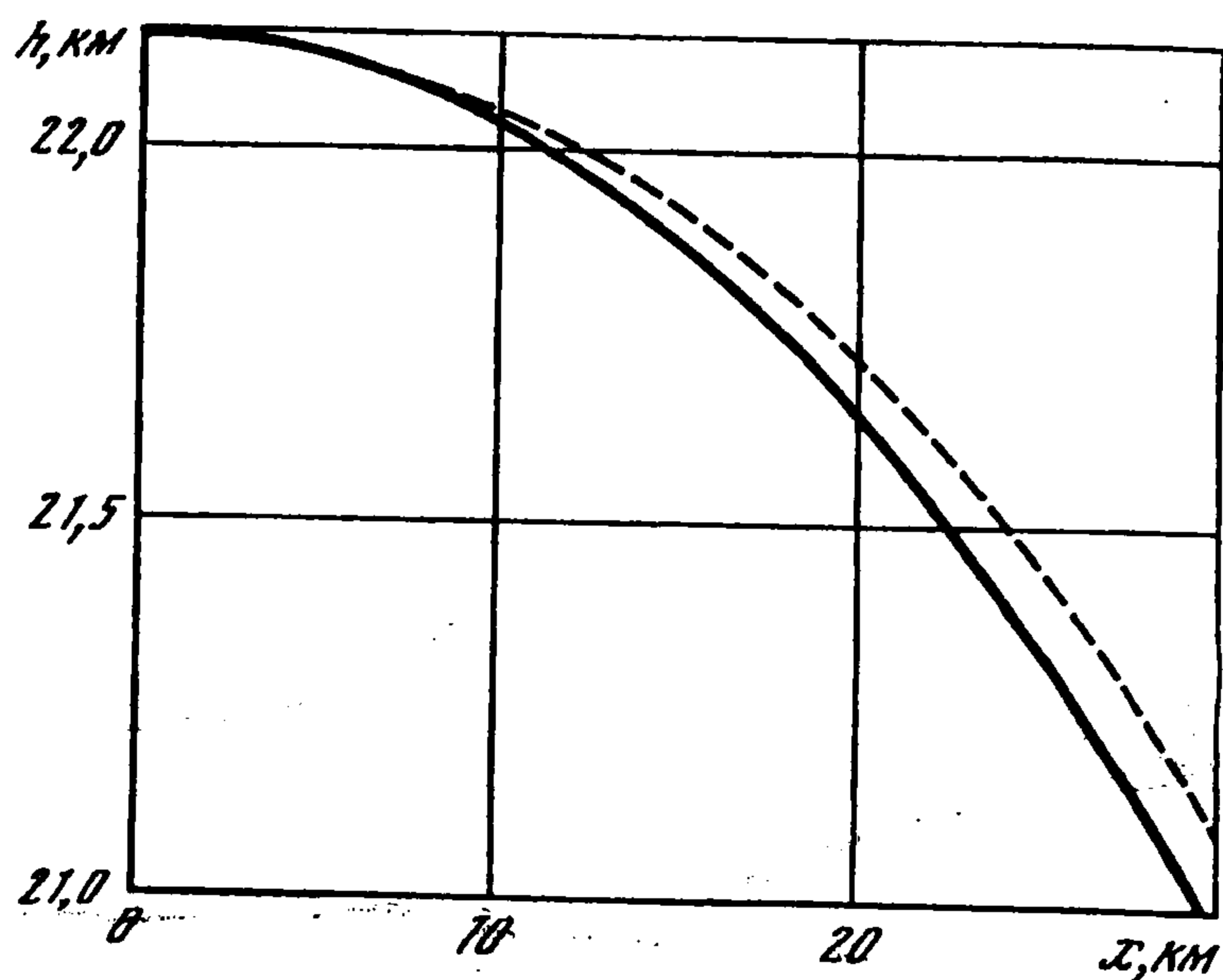
Фиг 3



Фиг. 4



Фиг 5



Фиг. 6

имеет большой запас устойчивости, и колебания угла атаки происходят с относительно небольшой амплитудой. В случае  $L = 140$  см угол атаки изменяется с периодом и амплитудой в несколько раз большими, чем при  $L = 50$  см. В окрестности центра термика, где максимальна скорость движения газа, максимален угол атаки. В этой области, как видно из фиг. 1, центр давления оказывается впереди центра масс, и положение тела становится неустойчивым. Последнее обстоятельство может привести к перевороту тела.

На фиг. 4, 5 приведены также зависимости угла  $\tau$  наклона оси тела к горизонту (угла тангажа) для  $L = 50$  см и  $L = 140$  см соответственно. Максимум  $\tau$  на фиг. 4 обусловлен тем, что тело, в этом случае обладающее хорошей устойчивостью, быстро разворачивается по набегающему потоку, который в окрестности центра термика имеет максимальный угол наклона к горизонту.

На фиг. 6 изображены графики траектории тела при  $L = 140$  см. В случае  $L = 50$  см

наличие на пути тела термика почти не оказывает влияния на траекторию, и на графике ее изменение не видно; во втором случае, при  $L = 140$  см, изменение траектории оказывается значительно более существенным.

Авторы благодарят Г.А. Тирского за внимание к работе и обсуждение результатов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Карякин В.Е.* Расчет сверхзвукового обтекания тел вращения вязким газом при малых углах атаки. // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1981. Т. 21. № 1. С. 150–156.
2. *Тирский Г.А., Утюжников С.В., Ямалеев Н.К.* Применение метода малого параметра к задаче пространственного обтекания тел потоком вязкого газа // ПММ. 1992. Т. 56. № 6. С. 1023–1032.
3. *Васильевский С.А., Тирский Г.А., Утюжников С.В.* Численный метод решения уравнений вязкого ударного слоя // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1987. Т. 27. № 5. С. 741–750.
4. *Музафаров И.Ф., Тирский Г.А., Утюжников С.В., Ямалеев Н.К.* Численное моделирование течения вязкого газа около тела, пролетающего через облако нагретого газа // Матем. моделирование. 1992. Т. 4. № 9. С. 55–68.
5. *Мартин Дж.* Вход в атмосферу. М.: Мир, 1969. 320 с.

Москва

Поступила в редакцию  
25.VI.1993