

УДК533.6.011

© 1995 г. А.Н. Крайко, Д.Е. Пудовиков

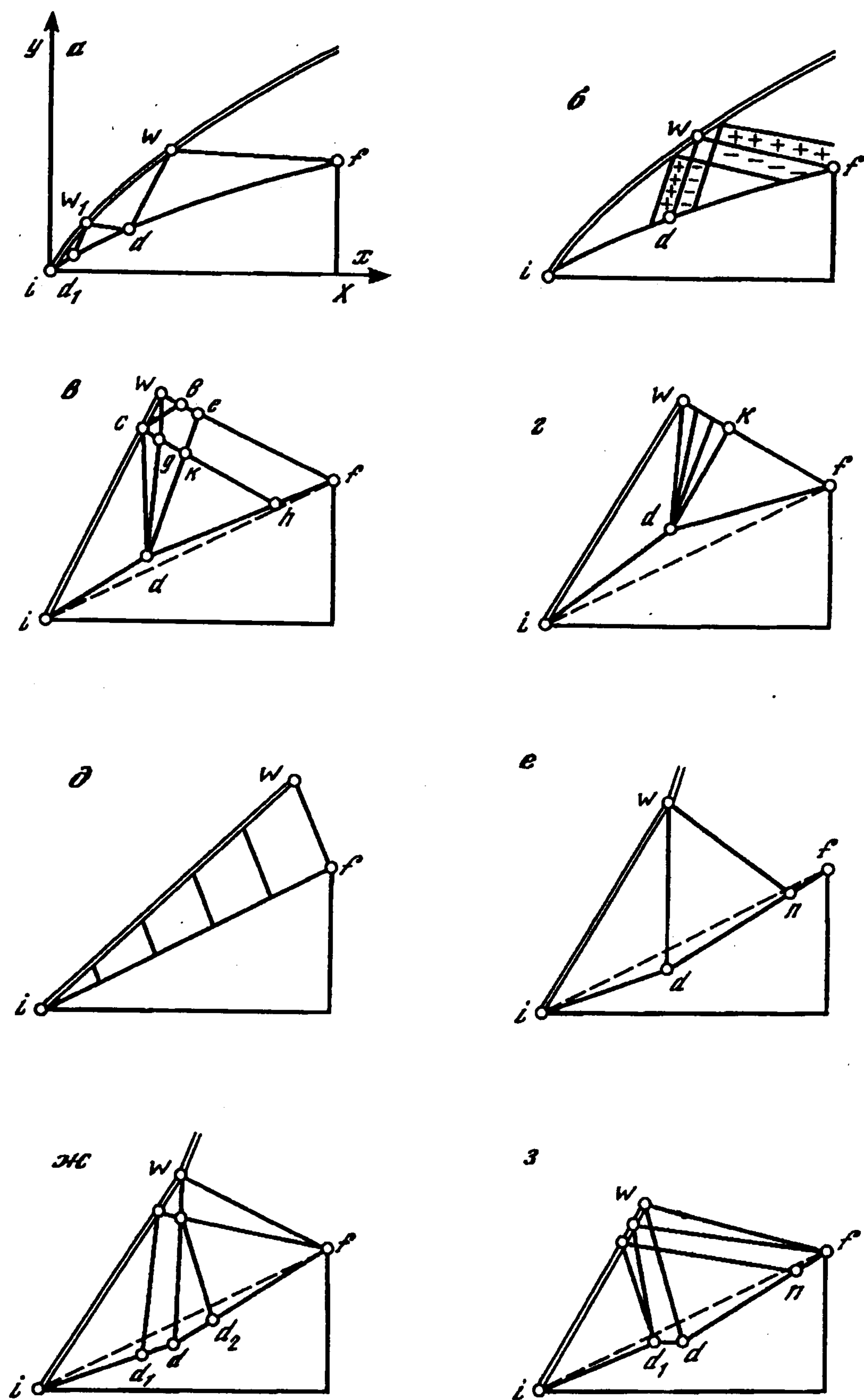
К ПОСТРОЕНИЮ ОПТИМАЛЬНОГО КОНТУРА ГОЛОВНОЙ ЧАСТИ ТЕЛА В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Рассматривается задача профилирования контура головной части плоского тела, который, соединяя фиксированные начальную и конечную точки, реализует минимум волнового сопротивления в равномерном сверхзвуковом потоке идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа. Согласно выполненным ранее исследованиям, в той части пространства D определяющих параметров задачи (числа Маха M_∞ или безразмерной скорости V_∞ набегающего потока, относительной толщины τ и т.п.), в которой искомый контур обтекается с присоединенной ударной волной; он близок к отрезку прямой. Использование этого обстоятельства позволило найти "главную поправку" к прямолинейной образующей в явном виде и представить характеристики практически оптимальных головных частей в форме изолиний в плоскости $V_\infty\tau$. Для прямолинейной оптимальной образующей (клина) развитый подход естественно дает точный результат. Как известно, клин – тело минимального сопротивления при нулевом коэффициенте отражения λ возмущений давления от возникающего при обтекании клина косоугольного скачка. Согласно выполненному исследованию, указанная возможность не единственна. В дополнение к случаю $\lambda(V_\infty, \tau) = 0$ прямолинейная образующая оптимальна и тогда, когда при $\lambda \neq 0$ поток за косым скачком звуковой.

1. Пусть x, y – декартовы координаты с осью x , направленной по вектору скорости V_∞ равномерного сверхзвукового потока (фиг. 1, a , где двойная линия – ударная волна, а тонкие линии – c^+ - и c^- -характеристики). Начало координат совместим с начальной точкой i искомой образующей if , в силу чего: $x_i = y_i = 0, x_f = X$, а $y_f = \tau X$ с заданными X и τ . Здесь и далее индекс ∞ приписывается параметрам набегающего потока, а буквы i, f, \dots – величинам в соответствующих точках. За масштабы скорости, плотности ρ и давления p возьмем $V_\infty^\circ, \rho_\infty^\circ$ и $\rho_\infty^\circ V_\infty^{\circ 2}$, где $V = |V|$, а индекс $^\circ$ приписан размерным величинам. Требуется найти такую образующую с уравнением $x = x^w(y) \geq 0$, которая, соединяя фиксированные точки i и f , реализует минимум волнового сопротивления

$$\chi = \int_0^{\tau X} (p - p_\infty) dy \tag{1.1}$$

В рамках приближенных подходов решение данной задачи известно и сравнительно просто. Так, для тонких тел ($\tau \ll 1$), когда при умеренных сверхзвуковых числах Маха M_∞ применима линейная теория, оптимальные образующие – прямые [1]. Если $\tau \ll 1$, то в приближении закона сопротивления Ньютона они также прямые [1–3]. Однако при $\tau > 1$ в том же приближении оптимальный контур состоит из торца $x \equiv 0$ и отрезка прямой, составляющего с осью x угол, равный $\pi/4$. Торцы появляются как участок краевого экстре-



Фиг 1

муна из-за ограничений на длину ($x \geq 0$) и из-за наличия границы справедливости приближения Ньютона – вдоль контура [2, 3] $dx''/dy \geq 0$. Если при фиксированном $M_\infty > 1$ относительная толщина τ настолько велика, что образующая if не может обтекаться с присоединенным скачком ($\tau > \tau^*$, где τ^* – функция M_∞), то появление в оптимальной образующей торца в силу ограничения на длину естественно ожидать и в рамках точных уравнений газовой динамики идеального газа, т.е. в рамках уравнений Эйлера. В осесимметричном случае без торца оптимальную головную часть фиксированной длины при любых $\tau > 0$ не удастся построить ни в приближении законов сопротивления Ньютона (или Буземана), ни в рамках уравнений Эйлера [2–5].

В приближении уравнений Эйлера первый точный результат, относящийся к плоским головным частям минимального волнового сопротивления, установлен в [6] (см. также [7]) при исследовании обтекания тел, близких к клину. При этом рассматривалась задача,

полученная линеаризацией соотношений на скачке, условия непротекания на теле и уравнений течения между слегка искривленными образующими тела и скачка. Ее решение зависит, в частности, от коэффициента отражения $\lambda = \delta p^- / \delta p^+$, где δp^+ – возмущение давления, приходящее на скачок по c^+ -характеристикам, а δp^- – возмущение p , уходящее от него по c^- -характеристикам. Хотя развитая в [6, 7] теория была линейной, из нее следовал точный вывод: при $\lambda = 0$ оптимальная головная часть – клин. Принципиальное отличие этого вывода от, казалось бы, аналогичного результата линейной теории или приближения Ньютона состоит в следующем. Коэффициент отражения – функция M_∞ , угла наклона скачка σ , для совершенного газа с постоянными теплоемкостями – показателя адиабаты k и т.п. Поэтому условие $\lambda(M_\infty, \sigma, \dots) = 0$ выполняется лишь в исключительных случаях.

Независимо от [6] аналогичный вывод как результат попытки решения сформулированной выше вариационной задачи в рамках уравнений Эйлера и метода контрольного контура был установлен в [8, 9]. Там же для совершенного газа с $k = 1,4$ в плоскости $V_\infty \sigma$ построены кривые $\lambda(V_\infty, \sigma) = 0$ и обнаружено, что в зависимости от V_∞ это уравнение (относительно σ) имеет от одного до трех корней. Кроме того, оно выполняется в тривиальном случае $\sigma = \alpha_\infty$, где α – угол Маха. Этот корень не представляет интереса, ибо отвечает "клину" с $\tau = 0$.

Решение линейной задачи, сформулированной в [6], позволило развить эффективный прием "варьирования в характеристических ϵ -полосках". Этот прием, распространенный на произвольные тела (см. [3]), стал важным инструментом исследования структуры оптимальных решений вариационных задач газовой динамики.

Применительно к обсуждаемой задаче при $\lambda \neq 0$ суть данного приема поясняет фиг. 1,б. На ней "подозреваемый на оптимальность" контур проварьирован только в ϵ -окрестности точки d . Если $\lambda < 0$, то возмущения давления, идущие от тела, отражаясь от скачка, меняют знак. На фиг. 1,б знаки плюс и минус отвечают $\delta p > 0$ и $\delta p < 0$. Благодаря специальному выбору участка варьирования контура на него после отражения приходит только ϵ -полоска с $\delta p < 0$, что, как можно показать, ведет к некомпенсированному уменьшению χ . Поэтому, если $\lambda < 0$ (в плоскости $V_\infty \sigma$ соответствующая точка принадлежит подобласти D^- области D), образующая типа изображенной на фиг. 1,б, не имеющая излома в точке d , не оптимальна. Более того, из данного рассмотрения следует, что при $\lambda < 0$ оптимальный контур имеет в точке d излом, обтекаемый с образованием пучка волн разрежения. Поскольку, однако, при $\lambda_w = 0$ излома нет, то естественно ожидать, что его величина пропорциональна λ_w . Аналогичное рассуждение, проведенное для точки d_1 , указывает на наличие излома и в ней. Излом в d_1 обтекается с образованием пучка волн разрежения при $\lambda_w \lambda_{w1} < 0$, а его величина пропорциональна этому произведению и т.д. Коэффициент отражения λ – величина, заметно меньшая единицы [6, 7]. Отсюда следует, что изломы в точках d_1, \dots будут много меньше "главного излома" в точке d . При положительных λ_w, λ_{w1} и т.д. соответствующие изломы обтекаются с образованием слабых скачков, а это, в свою очередь, ведет к "сгущению" изломов в окрестностях соответствующих точек.

Исключительная сложность получающихся на основе выполненного анализа оптимальных контуров (см. [3]) компенсируется отмеченной выше малостью коэффициентов отражения. Их произведения (особенно включающие коэффициенты отражения от слабых скачков, которые возникают при обтекании "вогнутых" изломов) столь малы, что сколь-нибудь существенное влияние на величину χ оказывает лишь "главный излом" (или изломы) вблизи точки d .

Приведенные выше рассуждения были возможны уже в начале 50-х годов, т.е. после опубликования работы [6]. Несмотря на это, история решения данной задачи крайне сложна, а порою и драматична. Важным ее этапом стала разработка в [10, 11] алгоритма решения сформулированной вариационной задачи в рамках "общего метода множителей

Лагранжа". В основе этого алгоритма лежит численный расчет методом характеристик обтекания контура, найденного из предыдущей итерации, и определение из решаемой против потока "сопряженной" задачи для множителей Лагранжа. Параметры течения и множители Лагранжа на искомой образующей, найденные в каждой итерации, подставляются затем в условия оптимальности, невязка которых используется в процедуре улучшения профилируемого контура. Реализованный в [10, 11] для параметров в точке w , принадлежащих области D^- плоскости $V_\infty \sigma$, численный алгоритм позволил построить несколько оптимальных плоских головных частей, обтекаемых равномерным потоком идеального совершенного газа с $\kappa = 1,4$. Их контуры состоят из двух пересекающихся в точке d , практически прямолинейных участков. Излом в точке d , обтекаемый с образованием пучка волн разрежения, мал, а изломы в окрестностях точек d_1, \dots в рамках численного алгоритма [10, 11] не учитывались.

Согласно результатам [10, 11] и анализу в рамках "варьирования в характеристических ϵ -полосках" с учетом малости коэффициента отражения λ , оптимальные головные части, обтекаемые с присоединенной ударной волной, близки к клиньям. Если при этом V_∞ и τ принадлежат области D^- , в которой коэффициент отражения λ в точке w отрицателен, то главное отличие оптимального контура от отрезка прямой состоит в изломе, обтекаемом с образованием пучка волн разрежения. Отмеченные обстоятельства позволяют в классе контуров из двух пересекающихся в d прямоугольных отрезков получить явные формулы, определяющие практически оптимальные плоские образующие, рассчитать их геометрические характеристики и χ , выполнить сравнение с результатами [10, 11] и оценить влияние неучтенных при таком подходе эффектов на форму построенных конфигураций. Это и сделано ниже.

2. На фиг. 1, в штрихами изображена прямолинейная образующая: $y = x \tan \sigma$. Отвечающий ей косой скачок дается уравнением прямой линии $y = x \tan \sigma$. Там же сплошными линиями показаны контур из двух прямолинейных отрезков, возникающие при его обтекании скачок ibw и пучок волн разрежения cde , а также замыкающая характеристика wf и линия тока bc . Как следует из описанного выше варьирования в характеристической полоске, контур с подобным изломом может быть близок к оптимальному только при отрицательных λ . Такой же вывод будет сделан и ниже, однако до его получения в рамках развиваемого далее анализа знак λ произволен.

Пусть φ – значение любого параметра при обтекании клина, а $\varphi + \Delta\varphi$ – при обтекании тела с изломом в d , $\Delta\vartheta_-$ и Δp_- – возмущения (приращения) ϑ – угла наклона вектора скорости к оси x и p на id и в idc , $\Delta\vartheta_+$ и Δp_+ – на dh и в dhk , и, наконец, Δp – возмущение p на hf . Тогда для приращения χ из (1.1) найдем

$$\Delta\chi = \tau X \Delta p_+ + y_d (\Delta p_- - \Delta p_+) + (\Delta p_- - \Delta p_+) \Delta y_d + \int_h^f (\Delta p - \Delta p_+) dy \quad (2.1)$$

где $y_d + \Delta y_d$ – ордината точки d контура с изломом, а y_d – соответствующая величина для клина, равная

$$y_d = \tau X \frac{\sin(\vartheta + \alpha - \sigma)}{\sin(\sigma - \vartheta + \alpha)}$$

Поскольку X и τ фиксированы, то искомый контур idf определяется двумя приращениями, например, $\Delta\vartheta_-$ и $\Delta\vartheta_+$, $\Delta\vartheta_-$ и Δx_d и т.п. Последние к тому же обязаны удовлетворять условию: одна из c^+ -характеристик пучка должна приходиться в точку w – точку пересечения "возмущенных" скачка и замыкающей c^- -характеристики. Формулировка данного условия несколько упрощается, если в качестве искомых приращений взять $\Delta\vartheta$ – приращение ϑ на dg и $\Delta\sigma$ – приращение σ на прямолинейном участке скачка ic . При этом для определения оптимальных значений $\Delta\vartheta^m$ и $\Delta\sigma^m$, реализующих минимум $\Delta\chi$, правую часть (2.1) необходимо представить с точностью

не менее чем до квадратичных членов по $\Delta\vartheta$ и $\Delta\sigma$ включительно. Формул линейного приближения [6, 7] для определения $\Delta\vartheta'''$ и $\Delta\sigma'''$ естественно недостаточно, за исключением особых случаев $\Delta\vartheta''' = \Delta\sigma''' = 0$, когда оптимален клин.

На id и в idc приращение любого параметра $\Delta\varphi_-$ в силу условий на косом скачке – известная функция $\Delta\sigma$, причем согласно сказанному выше и формуле (2.1) в разложениях для $\Delta\varphi_-$ необходимо сохранить линейные и квадратичные по $\Delta\sigma$ слагаемые, т.е. положить

$$\Delta\varphi_- = a_\varphi(1 + b_\varphi\Delta\sigma)\Delta\sigma \quad (2.2)$$

При заданном набегающем потоке коэффициенты a_φ и b_φ в (2.2) – известные функции σ или ϑ . Для их определения можно воспользоваться численным дифференцированием, вычисляя по соотношениям на косом скачке при каждом σ три значения φ : $\varphi(\sigma)$, $\varphi(\sigma + \delta\sigma)$ и $\varphi(\sigma - \delta\sigma)$ с $\delta\sigma \ll \sigma$. В настоящем исследовании эти коэффициенты для контроля находились и численным дифференцированием, и по явным формулам. В случае совершенного газа формулы для используемых далее коэффициентов a_φ и b_φ имеют вид

$$\begin{aligned} a_p &= \frac{2\sin 2\sigma}{\kappa+1}, \quad b_p = \text{ctg} 2\sigma, \quad a_\vartheta = 1 + b_1 - a_1 \\ a_1 &= \frac{(\kappa-1)\cos^2(\sigma-\vartheta)}{(\kappa+1)\cos^2\sigma}, \quad b_1 = \frac{8\text{ctg} 2\sigma \cos^2(\sigma-\vartheta)}{(\kappa+1)M_\infty^2 \sin 2\sigma} \\ b_\vartheta &= \frac{1}{a_\vartheta} \left[(b_1 - a_1)^2 \text{tg}(\sigma-\vartheta) - a_1 \text{tg}\sigma - b_1 \frac{3 + \cos 4\sigma}{\sin 4\sigma} \right] \\ a_p &= \frac{2(1-\varepsilon^2)\kappa M_\infty^2 \sin 2\sigma}{(\kappa+1)(1+\varepsilon\kappa M_\infty^2 p)^2}, \quad \varepsilon = \frac{\kappa-1}{\kappa+1}, \quad a_V = \frac{\kappa(\rho a_p - p a_p)}{(\kappa-1)\rho^2 V} \\ a_a &= \frac{\kappa(\rho a_p - p a_p)}{2\rho^2 a}, \quad a_M = \frac{a_V - M a_a}{a}, \quad a_\alpha = \frac{-a_M}{M\sqrt{M^2-1}} \\ a_S &= \frac{\kappa\rho a_p - \rho a_p}{\kappa\rho} S, \quad S = \rho p^{-1/\kappa} \end{aligned}$$

Входящие в правые части этих формул параметры за косым скачком: отнесенные к V_∞° модуль скорости V и скорость звука $a = \sqrt{\kappa p/\rho}$, число Маха $M = V/a$, угол Маха α , угол поворота потока в скачке ϑ , равный углу наклона вектора скорости к оси x , энтропийная функция S , плотность и давление, отнесенные соответственно к $(\rho_\infty^\circ V_\infty^{\circ 2})^{1/\kappa}/\rho_\infty^\circ$, к ρ_∞° и к $\rho_\infty^\circ V_\infty^{\circ 2}$, – функции M_∞ , σ и κ , определяемые по известным соотношениям.

Вдоль c^+ - и c^- -характеристик выполняются уравнения [12]

$$d\Delta\vartheta \pm A(p + \Delta p, S + \Delta S)d\Delta p = 0, \quad A(p, S) = \sqrt{M^2 - 1} / (\rho V^2) \quad (2.3)$$

Здесь и далее знаки плюс (минус) отвечают c^+ (c^-)-характеристикам. Отсюда с точностью до Δ^2 включительно, где Δ – малый параметр, характеризующий величину $\Delta\sigma$, $\Delta\vartheta$ или разность $\Delta\vartheta_d \equiv |\Delta\vartheta_+ - \Delta\vartheta_-|$, имеем

$$d\Delta\vartheta \pm A(1 + C_p\Delta p + C_S\Delta S)d\Delta p = 0 \quad (2.4)$$

$$C_p = \frac{4(M^2 - 1) - (\kappa + 1)M^4}{2\kappa M^2(M^2 - 1)p}, \quad C_S = \frac{4 + 2(\kappa - 2)M^2 - (\kappa - 1)M^4}{2(\kappa - 1)M^2(M^2 - 1)S}$$

Коэффициенты C_p и C_S выписанные в (2.4) для совершенного газа, как и a_φ и b_φ , можно находить также численным дифференцированием (что и делалось для контроля) соответственно по значениям $A(p \pm \delta p, S)$ и $A(p, S \pm \delta S)$ с $\delta p \ll p$ и $\delta S \ll S$.

Уравнения характеристик (2.3) или (2.4), записанные в линейном приближении (с точностью до Δ включительно), после интегрирования через характеристические ϵ -полоски в окрестности точки отражения от скачка (фиг. 1,б) ведут к весьма простой формуле для коэффициента отражения λ . Прделав с результатами такого интегрирования (уравнение для c^+ -характеристики интегрируется через c^- -полоску и наоборот) несложные преобразования и учтя определение a_p и a_ϑ в (2.2), найдем, что

$$\lambda = (Aa_p - a_\vartheta) / (Aa_p + a_\vartheta) \quad (2.5)$$

Для скачков слабого семейства, когда $M \geq 1$, и давление, и угол ϑ растут с ростом σ . Поэтому в рассматриваемых случаях a_p и a_ϑ , как и A , положительны и в нуль в (2.5) может обращаться только числитель. Согласно (2.5) $|\lambda| < 1$, что отмечалось, например, в [6, 7]. Наконец, из приведенных ранее выражений для a_p и a_ϑ следует, что $\lambda = 0$ при $\vartheta = 0$.

Согласно сказанному выше, Δp_- и Δp_+ в двух первых слагаемых правой части (2.1) нужно определить с точностью до Δ^2 включительно. Воспользовавшись для этого формулой (2.2), проинтегрировав (2.4) вдоль любой c^- -характеристики от скачка до стенки и учтя, что ΔS под линией тока bc постоянно и определяется той же формулой (2.2), получим

$$\begin{aligned} \Delta p_+ = \Delta p_- + \frac{1}{A} \{ \Delta \vartheta_+ - a_\vartheta (1 + b_\vartheta \Delta \sigma) \Delta \sigma + (a_\vartheta \Delta \sigma - \Delta \vartheta_+) \times \\ \times \left[\frac{C_p}{2A} (\Delta \vartheta_+ - a_\vartheta \Delta \sigma) + (a_p C_p + a_S C_S) \Delta \sigma \right] \} \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\Delta p_- = a_p (1 + b_p \Delta \sigma) \Delta \sigma$$

Если в первой формуле из (2.6) и Δp_+ и $\Delta \vartheta_+$ убрать индекс, то получится выражение, дающее Δp на dg через $\Delta \sigma$ и $\Delta \vartheta$ с точностью до Δ^2 .

Условие того, что контур с изломом соединяет точки i и f , с точностью до Δ^2 включительно сводится к равенству

$$x_d (1 + \Delta \vartheta_- \operatorname{tg} \vartheta) \Delta \vartheta_- + (X - x_d) (1 + \Delta \vartheta_+ \operatorname{tg} \vartheta) \Delta \vartheta_+ + \Delta x_d (\Delta \vartheta_- - \Delta \vartheta_+) = 0,$$

$$x_d = X \frac{\sin(\vartheta + \alpha - \sigma)}{\sin(\sigma - \vartheta + \alpha)}$$

Выразив отсюда $\Delta \vartheta_+$ с той же точностью, ибо (2.6) содержит $\Delta \vartheta_+$ и в первой, и во второй степенях, получим

$$\Delta \vartheta_+ - \Delta \vartheta_- = \Theta_\sigma \Delta \sigma + \Theta_{\sigma\sigma} (\Delta \sigma)^2 + \Theta_{\sigma x} \Delta \sigma \Delta x_d \quad (2.7)$$

$$\Theta_\sigma = -a_\vartheta \frac{\sin(\sigma - \vartheta + \alpha)}{2 \sin(\sigma - \vartheta) \cos \alpha}, \quad \Theta_{\sigma x} = -\frac{a_\vartheta \sin^2(\sigma - \vartheta + \alpha)}{4X \sin^2(\sigma - \vartheta) \cos^2 \alpha}$$

$$\Theta_{\sigma\sigma} = b_\vartheta \Theta_\sigma - a_\vartheta^2 \operatorname{tg} \vartheta \frac{\sin(\vartheta + \alpha - \sigma) \sin(\sigma - \vartheta + \alpha)}{4 \sin^2(\sigma - \vartheta) \cos^2 \alpha}$$

Подставим $\Delta \vartheta_+$ из (2.7) в (2.6) и сохраним, имея в виду последующее использование в (2.1), члены до Δ^2 включительно. В результате придем к выражению

$$\Delta p_+ = \Delta p_- + P_\sigma \Delta \sigma + P_{\sigma\sigma} (\Delta \sigma)^2 + P_{\sigma x} \Delta \sigma \Delta x_d \quad (2.8)$$

$$P_\sigma = \frac{\Theta_\sigma}{A}, \quad P_{\sigma\sigma} = \frac{\Theta_{\sigma\sigma}}{A} - \frac{\Theta_\sigma}{A} \left(\frac{C_p \Theta_\sigma}{2A} + a_p C_p + a_S C_S \right), \quad P_{\sigma x} = \frac{\Theta_{\sigma x}}{A}$$

В (2.1) Δy_d умножается на $\Delta p_- - \Delta p_+ = O(\Delta)$. Поэтому, ограничившись в выражении для Δy_d через $\Delta\sigma$ и Δx_d только линейной частью, найдем, что

$$\Delta y_d = \Delta x_d \operatorname{tg} \vartheta + \frac{a_\vartheta X \sin(\vartheta + \alpha - \sigma)}{\cos^2 \vartheta \sin(\sigma - \vartheta + \alpha)} \Delta\sigma \quad (2.9)$$

Если (2.8) с Δp_- из (2.6) и (2.9) подставить во внеинтегральные члены правой части (2.1), то она примет вид

$$\Delta\chi = \chi_\sigma \Delta\sigma + \chi_{\sigma\sigma} (\Delta\sigma)^2 + \int_h^f (\Delta p - \Delta p_+) dy \quad (2.10)$$

$$\chi_\sigma = \frac{\lambda X}{A} (A a_p + a_\vartheta) \operatorname{tg} \vartheta, \quad \chi_{\sigma\sigma} = X \left[a_p b_p \operatorname{tg} \vartheta + 2 P_{\sigma\sigma} \frac{\sin(\sigma - \vartheta) \cos \alpha}{\sin(\sigma - \vartheta + \alpha)} \operatorname{tg} \vartheta + \right. \\ \left. + \frac{a_\vartheta^2 \sin(\vartheta + \alpha - \sigma)}{2 A \cos^2 \vartheta \sin(\sigma - \vartheta) \cos \alpha} \right]$$

Видно, что χ_σ обращается в нуль одновременно с коэффициентом отражения, а также независимо от величины λ – для скачка, выродившегося в характеристику ($\vartheta = 0$). Поскольку согласно (2.5) и формулам для a_p и a_ϑ в последнем случае одновременно $\lambda = 0$, то на оси V_∞ плоскости $V_\infty \tau$ коэффициент χ_σ обращается в нуль с более высоким порядком, чем на других линиях D^0 этой плоскости, где $\lambda(V_\infty, \tau) = 0$.

Присутствующие в (2.1) и (2.8) слагаемые с $\Delta\sigma \Delta x_d$ после подстановки (2.8) и (2.9) в (2.1) сократились, что упрощает определение оптимальных $\Delta\sigma$ и $\Delta\vartheta$. Благодаря отсутствию в (2.10) этого произведения, теперь остается найти с точностью до Δ^2 входящий в (2.10) интеграл по hf . Разность $y_f - y_h = O(\Delta)$. Поэтому для вывода требуемой формулы изменение подынтегрального выражения от нуля при $y = y_h$ до $\Delta p_f - \Delta p_+$ при $y = y_f$ достаточно аппроксимировать прямой. В результате получим

$$\int_h^f (\Delta p - \Delta p_+) dy = \frac{1}{2} (\Delta p_f - \Delta p_+) (y_f - y_h) \quad (2.11)$$

Разность $y_f - y_h$ найдем как ширину характеристической полосы, получающейся из-за отражения от скачка части cdw пучка волн разрежения. Все c^+ -характеристики этого пучка, искривленные только в малой окрестности скачка (правее c^- -характеристики ck), расходятся веером из точки d . В dch – течение типа простой волны. Следовательно, здесь с точностью до Δ включительно

$$\Delta\alpha = \Delta\alpha_- + \alpha_\vartheta (\Delta\vartheta - \Delta\vartheta_-) = (a_\alpha - a_\vartheta \alpha_\vartheta) \Delta\sigma + \alpha_\vartheta \Delta\vartheta \quad (2.12)$$

Производную α_ϑ можно найти, дифференцируя формулы, описывающие простую волну. Проще это делать численно, вычисляя по ним $\alpha(\sigma, \vartheta \pm \delta\vartheta)$ с $\delta\vartheta \ll \vartheta$. Такой способ использовался ниже.

Отраженные от скачка c^- -характеристики ch и wf , как и c^+ -характеристики пучка, прямолинейны почти всюду. Исключение – окрестности точки c для ch и точек w и f для wf . Вне этих окрестностей в отраженной характеристической полоске реализуется течение типа простой волны с прямолинейными c^- -характеристиками, которые расходятся при $\lambda > 0$ и сходятся при $\lambda < 0$. Связанное с этим изменение ширины полосы пропорционально $\lambda(\Delta\vartheta_- - \Delta\vartheta)$. Учтем отмеченные обстоятельства, равенства (2.2) и

(2.12) и условия совместности (2.4), удерживая всюду необходимое число членов. В результате найдем, что с требуемой точностью

$$\Delta p_f - \Delta p_+ = 2\lambda(\Delta\vartheta - \Delta\vartheta_-) / A, \quad y_f - y_h = \zeta(\Delta\vartheta_- - \Delta\vartheta) \quad (2.13)$$

$$\zeta = X \left[1 + \lambda \frac{\sin(\vartheta + \alpha - \sigma)}{\sin(\sigma - \vartheta + \alpha)} \right] \frac{(1 + \alpha_\vartheta) \operatorname{tg} \vartheta \sin(\sigma - \vartheta)}{\sin \alpha \sin(\vartheta + \alpha - \sigma)}$$

Отличие выражения в квадратных скобках формулы для ζ от единицы характеризует расширение или сужение характеристической полосы. Это выражение всегда положительно. При $\lambda < 0$ данное утверждение получается, если учесть, что $|\lambda| < 1$. Подставив (2.13) в (2.11), а результат – в (2.10), придем к искомому выражению

$$\Delta\chi = \chi_\sigma \Delta\sigma + \chi_{\sigma\sigma} (\Delta\sigma)^2 + \chi^f (\Delta\vartheta - \Delta\vartheta_-)^2, \quad \chi^f = -\lambda \zeta / A \quad (2.14)$$

За независимые геометрические параметры в (2.14) удобнее взять не $\Delta\sigma$ и $\Delta\vartheta$ заменой $\Delta\vartheta_-$ на $a_\vartheta \Delta\sigma$, а $\Delta\sigma$ и разность $\Delta\vartheta - \Delta\vartheta_-$. В таком случае необходимые и достаточные условия минимума $\Delta\chi$ (равенство нулю первых производных и положительность вторых сразу) дают

$$\Delta\sigma^m = -\chi_\sigma / (2\chi_{\sigma\sigma}), \quad \Delta\vartheta^m = \Delta\vartheta_-^m = a_\vartheta (1 + b_\vartheta \Delta\sigma^m) \Delta\sigma^m \quad (2.15)$$

$$\chi_{\sigma\sigma} > 0, \quad \chi^f > 0$$

где индексом m отмечены величины, реализующие минимум χ .

В формуле для χ^f отрицательным может быть только λ . Действительно, о положительности квадратной скобки писалось выше. Неотрицательность входящих в χ^f тригонометрических функций и коэффициента A очевидна. Положительна и сумма $1 + \alpha_\vartheta$, ибо уменьшению ϑ при обтекании излома отвечает уменьшение α . Таким образом, согласно второму неравенству из (2.15) схема фиг. 1,в может быть оптимальной только при $\lambda < 0$, т.е. в области D^- плоскости $V_\infty \tau$. Этот вывод (но не формулы для определения $\Delta\sigma^m$ и $\Delta\vartheta^m$) тождествен утверждению, сделанному в рамках "варьирования в ϵ -полоске".

Расчеты для совершенного газа с разными k показали, что $\chi_{\sigma\sigma} > 0$ всюду в D . Согласно (2.10), знаки χ_σ и λ совпадают. Поэтому при $\lambda < 0$ и $M \neq 1$ в силу первого равенства (2.15) $\Delta\sigma^m > 0$, как и должно быть для оптимальных контуров исследуемого типа. Понятен смысл и второго условия (2.15): положение главного излома оптимального контура при $\lambda < 0$ таково, что в точку w пересечения скачка и замыкающей c^- -характеристики wf приходит начальная c^+ -характеристика пучка волн разрежения (фиг. 1,г). Благодаря этому волны разрежения, отражающиеся от скачка как волны сжатия, не попадают на концевой участок образующей и не увеличивают χ . Оптимальные контуры, построенные с помощью итерационной процедуры, созданной в [10, 11] на основе общего метода множителей Лагранжа и метода характеристик, не обладают таким свойством. Несмотря на это, они, как показано ниже, обеспечивают лишь слегка больший выигрыш по сравнению с клином, чем близкие к оптимальным образующие данной работы. Причина такого отличия и порядок его величины объясняются в следующем разделе.

Согласно (2.14) и (2.15), величина χ для контура, оптимального в рассматриваемом приближении, меньше величины χ для прямолинейной образующей, т.е. для клина, на

$$\Delta\chi^m = -\chi_\sigma^2 / (4\chi_{\sigma\sigma}) \quad (2.16)$$

Сделанная выше оговорка о $M \neq 1$ связана с неограниченным ростом при $M \rightarrow 1$ коэффициентов χ_σ и $\chi_{\sigma\sigma}$. В силу приведенных выше формул, при M , близких к еди-

нице, $\chi_\sigma \sim (M-1)^{-1/2}$, а $\chi_{\sigma\sigma} \sim (M-1)^{-5/2}$. Отсюда согласно (2.15) и (2.16) при $M \approx 1$ имеем

$$\Delta\sigma^m \sim \lambda(M-1)^2, \quad \Delta\chi^m \sim \lambda^2(M-1)^{3/2}$$

Следовательно, $\Delta\sigma^m = 0$ при $M = 1$, т.е. клин – тело минимального волнового сопротивления, не только если $\lambda = 0$, но и на границе области D , которая отвечает звуковой скорости за ударной волной и $\lambda \neq 0$. Данный результат представляется столь неожиданным, что требует дополнительного объяснения. При звуковом (по числу Маха за скачком) обтекании клина (фиг. 1,д) c^+ - и c^- -характеристики совпадают и перпендикулярны его поверхности. Поэтому даже в рамках чисто линейного подхода, на самом деле неприменимого при $M = 1$, варьирование в характеристической полоске в отличие от ситуации, изображенной на фиг. 1,б, в случае фиг. 1,д не "бракует" прямолинейную образующую при $\lambda \neq 0$.

Еще одно объяснение оптимальности звукового клина получается из рассмотрения эволюции фиг. 1,а при $\delta = M - 1 \rightarrow 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $n > 1$ фиксированы, а d_n – соответствующая точка "отражения". Тогда для любых $n < \infty$ и $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое $\delta = \delta(n, \varepsilon)$, что все точки d_k с $k \leq n$ окажутся в ε -окрестности точки f , а при $\delta = 0$ сольются с ней. Фиг. 1,д объясняет также причину неприменимости в этом случае "метода контрольного контура". Обязательным условием применимости этого метода [3] является наличие на искомой образующей двух участков: начального, определяющего форму ударной волны iw , и конечного, определяющего распределение параметров на замыкающей характеристике wf . На фиг. 1,б это участки id и df . В случае фиг. 1,д участок df вырождается в точку f .

В силу [6, 7] для близкой к прямой образующей if главный член $\delta\chi$ приращения ("вариации") χ дается формулой

$$\delta\chi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta x_{dn}, \quad a_n \sim \lambda^{n+1}$$

в которой δx_{dn} – вариация (приращение при фиксированном y) x в точке d_n , а $d_0 \equiv d$. Как уже отмечалось, в работах [6, 7] при выводе данной формулы предполагалось, что $M > 1$. С другой стороны, согласно [3], к такому же выражению, но теперь и для "звукового" клина ($M = 1$) сводится при малом варьировании его образующей формула для первой вариации χ , получающаяся "общим методом множителей Лагранжа" (ММЛ). Так как при $M = 1$ множество точек d_n с $\delta x_{dn} \neq 0$ пустое, то в рамках ММЛ звуковой клин удовлетворяет необходимому условию экстремума χ . Конечно в ММЛ упомянутое выше "малое варьирование" образующей if должно обеспечивать малость вариаций всех параметров. При $M = 1$ это накладывает весьма жесткие ограничения на гладкость проварьированного контура. Произвольное варьирование if , вызывая разрушение звукового потока, создает проблемы с применением любых методов оптимизации, предполагающих малость вариаций. Так, если бы из (2.15) при $M \rightarrow 1$ получались конечные положительные $\Delta\sigma^m$, то этими результатами нельзя было пользоваться. Напротив, $\Delta\sigma^m = 0$ при $M = 1$ свидетельствует о согласованности найденного результата и способа его получения.

В развитом подходе расчет $\Delta\chi^m$ и уменьшения коэффициента волнового сопротивления (в процентах)

$$\delta c_x = \frac{\Delta c_x}{c_x} \times 100 = -\frac{\Delta\chi^m}{\chi} \times 100 \quad (2.17)$$

не требует знания координат точки излома d . Для известной схемы обтекания (фиг. 1,з) с $\Delta\sigma^m$ и $\Delta\vartheta^m$ из (2.15) несложно построить численную процедуру расчета ее координат. Так

как, однако, в (2.1) и в (2.9) Δx_d входит только умноженным на величины порядка Δ , а (2.10) Δx_d вообще не содержит, находить его достаточно с первым порядком.

Принципиальная схема получения линейной связи между Δx_d и $\Delta \sigma^m$ для оптимальной образующей такова. Сначала из рассмотрения прямолинейного участка скачка iw и прямолинейной характеристики dw через $\Delta \sigma^m$ и Δx_d выражаются Δx_w и Δy_w . При этом используется равенство (2.9), а в конечных формулах сохраняются лишь линейные по $\Delta \sigma^m$ и Δx_d слагаемые. С другой стороны, $\Delta x_f = \Delta y_f = 0$, и точки f и w соединены характеристикой, искривленной только вблизи точек w и f . Это дает линейную связь между Δx_w , Δy_w , $\Delta \vartheta_+$ и $\Delta S = a_S \Delta \sigma^m$. Подставим в нее $\Delta \vartheta_+$, определенное линейной частью (2.7) с $\Delta \vartheta_- = a_\vartheta \Delta \sigma^m$, и найденные до этого выражения для Δx_w и Δy_w через $\Delta \sigma^m$ и Δx_d . В итоге с требуемой точностью получим

$$\Delta x_d = x_\sigma \Delta \sigma^m \quad (2.18)$$

$$x_\sigma = X \{ a_\vartheta [\sin 2\alpha \sin(\sigma - \vartheta + \alpha) \cos(\sigma - 2\vartheta - \alpha) + \cos \vartheta \sin^2(\vartheta + \alpha - \sigma)] + \\ + a_\alpha \cos \vartheta \sin 2\alpha \sin 2(\sigma - \vartheta) - a_\vartheta \alpha_\vartheta \cos \vartheta \sin(\vartheta + \alpha - \sigma) \sin(\sigma - \vartheta + \alpha) - \cos \vartheta \sin^2 2\alpha \} \times \\ \times [\cos \vartheta \sin 2\alpha \sin^2(\sigma - \vartheta + \alpha)]^{-1}$$

3. В той части D^+ области D плоскости $V_\infty \tau$, где $\lambda > 0$, контуры с выпуклым главным изломом не могут быть близки к оптимальным. Вместо них естественно исследовать конфигурации с изломом, обтекаемым с образованием слабого скачка dw . При $\lambda > 0$ он отражается от головной ударной волны iw также слабым скачком уплотнения, как показано на фиг. 1,е. На ней и далее слабые скачки даны жирными линиями. Если перепад давления на dw равен $[p]^+ \equiv \Delta p_+ - \Delta p_-$, то для отраженного скачка $[p]^- = \lambda [p]^+$, а в случае его отражения от стенки df за скачком (на hf)

$$\Delta p - \Delta p_+ = 2\lambda [p]^+ = 2\lambda (\Delta \vartheta_+ - \Delta \vartheta_-) / A > 0 \quad (3.1)$$

Здесь учтено, что в слабых скачках и в простых волнах ("того же семейства", для фиг. 1,е – в простой волне с прямолинейными c^+ -характеристиками) связи между приращениями p и ϑ различаются на величины порядка Δ^3 . Благодаря этому сохраняется, в частности, связь (2.6) между $\Delta p_+ - \Delta p_-$ и $\Delta \vartheta_+ - \Delta \vartheta_-$, а также выражение (2.10) для $\Delta \chi$ с прежними коэффициентами χ_σ и $\chi_{\sigma\sigma}$. Теперь, однако, с учетом (3.1) вместо (2.11) будем иметь

$$\Delta \chi = \chi_\sigma \Delta \sigma + \chi_{\sigma\sigma} (\Delta \sigma)^2 + 2\lambda (\Delta \vartheta_+ - \Delta \vartheta_-) \Delta y_{fh} / A = \\ = \chi_\sigma \Delta \sigma + \chi_{\sigma\sigma} (\Delta \sigma)^2 + 2\lambda \Theta_\sigma \Delta \sigma \Delta y_{fh} / A \quad (3.2)$$

Разность $\Delta y_{fh} = y_f - y_h$, как и ранее, – величина порядка Δ , а второе выражение получено из первого в силу справедливой для любых малых изломов формулы (2.7). Так как согласно ей $\Theta_\sigma < 0$, а $\Delta y_{fh} \geq 0$, то для исследуемых теперь образующих с $\Delta \sigma < 0$ последнее слагаемое в (3.2) либо положительно (при $y_h < y_f$), либо равно нулю. Вторая возможность реализуется, если отраженный от iw слабый скачок не приходит на отрезок df или в крайнем случае приходит в его концевую точку f . Контур, близкий к оптимальному, отвечает именно этой крайней ситуации (фиг. 1,ж).

Для доказательства данного утверждения существенно следующее обстоятельство: если положение точки d таково, что отраженный слабый скачок не попадает на df , то в (3.2), как и в (2.11), нет членов порядка Δ и Δ^2 , содержащих Δx_d . Благодаря этому при фиксированном $\Delta \vartheta_-$ или, что то же, при фиксированном $\Delta \sigma$ малое смещение точки d вдоль id изменяет $\Delta \chi$ в

более высоких порядках. Выполнив необходимые выкладки, в таком случае вместо (3.2) получим

$$\Delta\chi = \chi_\sigma \Delta\sigma + \chi_{\sigma\sigma} (\Delta\sigma)^2 + \chi_{\sigma\sigma x} (\Delta\sigma)^2 \Delta x_d \quad (3.3)$$

$$\chi_{\sigma\sigma x} = \frac{a_\vartheta^2 \sin(\sigma - \vartheta + \alpha)}{4A \sin^2(\sigma - \vartheta) \cos^2 \vartheta \cos^2 \alpha} \left[\sin(\vartheta + \alpha - \sigma) - \left(\frac{C_p}{2A} \cos \vartheta + \sin \vartheta \right) \sin \vartheta \sin(\sigma - \vartheta + \alpha) \right]$$

Коэффициент $\chi_{\sigma\sigma x}$ не только в D^+ , но и всюду в D по крайней мере для совершенного газа положителен. Поэтому для фиксированного $\Delta\sigma$ уменьшение Δx_d уменьшает $\Delta\chi$. Уменьшению Δx_d отвечает смещение влево точек d и w , а вместе с ними – отраженного слабого скачка. При некотором Δx_d этот скачок придет в точку f . При дальнейшем уменьшении Δx_d разность $y_f - y_h \equiv \Delta y_{fh}$ становится положительной. После этого в (3.3) необходимо добавить последнее слагаемое из (3.2). При фиксированном $\Delta\sigma$ отвечающее такому $\Delta y_{fh} > 0$ изменение приращения Δx_d , как можно показать, равно $\delta\Delta x_d = (\delta\Delta y_d) \operatorname{ctg} \vartheta = -\Delta y_{fh} \operatorname{ctg} \vartheta$, а связанное с этим изменение прироста $\Delta\chi$ дается формулой

$$\delta\Delta\chi = \chi_y \Delta y_{fh}, \quad \chi_y = \Delta\sigma^m (2\lambda\Theta_\sigma - A\chi_{\sigma\sigma x} \Delta\sigma^m \operatorname{ctg} \vartheta) / (2A) \quad (3.4)$$

с $\Delta\sigma^m$ из (2.15).

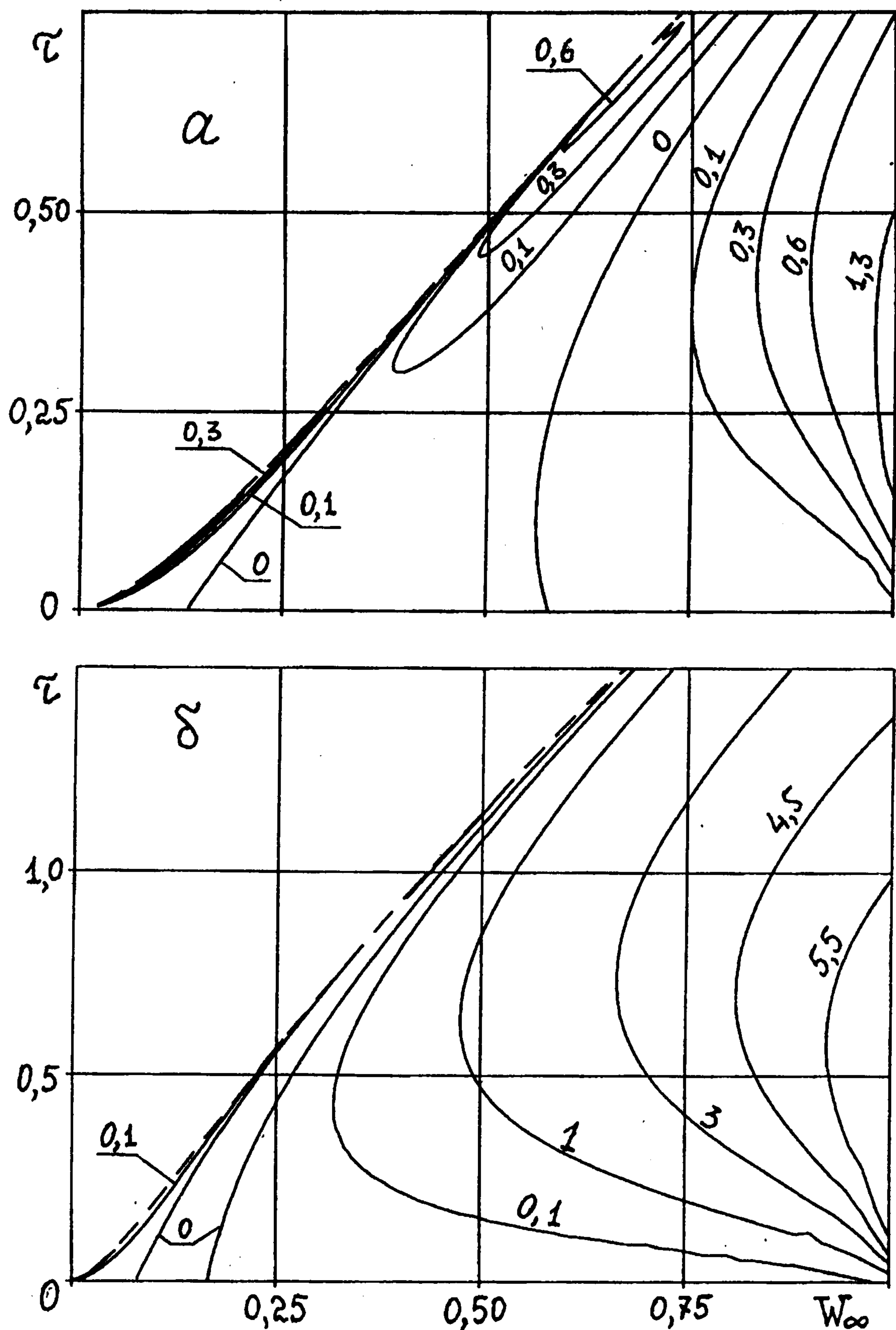
Согласно выполненным расчетам, множитель χ_y в D^+ положителен, что и доказывает сделанное выше утверждение о близости к оптимальному контуру с отраженным скачком, приходящим в точку f . Более того, множитель χ_y неотрицателен всюду в D , обращаясь в нуль лишь на D^0 , т.е. на линиях, где равен нулю коэффициент отражения. Положительность χ_y не только в D^+ , но и в D^- естественна. Действительно, если обтекание выпуклого излома рассматривать в линейном приближении, то пучок волн разрежения на фиг. 1,в и г заменится слабым скачком разрежения, отражающимся от головной ударной волны слабым скачком уплотнения (в D^- коэффициент отражения $\lambda < 0$). В результате для $\delta\Delta\chi$ вновь придем к выражению (3.4), а условие оптимальности образующей, изображенной на фиг. 1,г, сведется к неравенству $\chi_y > 0$.

Максимальное уменьшение коэффициента волнового сопротивления в рассматриваемом случае, как и при $\lambda < 0$, определяется по (2.17) с $\Delta\chi^m$ из (2.16). При этом по-прежнему не требуется знать величину Δx_d , которая для $\lambda > 0$ дается формулой

$$\begin{aligned} \Delta x_d = X \left\{ \frac{a_\alpha \sin 2(\sigma - \vartheta - \sin 2\alpha)}{\sin^2(\sigma - \vartheta + \alpha)} + \frac{a_\vartheta (1 + \alpha_\vartheta)}{2 \sin 2\alpha} \left[(2 + \lambda) \frac{\sin(\sigma - \vartheta - \alpha)}{\sin(\sigma - \vartheta + \alpha)} - 1 \right] + \right. \\ \left. + \frac{a_\vartheta \sin \alpha}{\cos \vartheta \cos(\vartheta + \alpha)} \left[\frac{\sin^2(\sigma - \vartheta - \alpha)}{\sin^2(\sigma - \vartheta + \alpha)} + \frac{\sin 2\vartheta \sin(\sigma - \vartheta - \alpha)}{\sin 2\alpha \sin(\sigma - \vartheta + \alpha)} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{\cos(\sigma - 2\vartheta - \alpha)}{\sin^2(\sigma - \vartheta + \alpha)} \cos \alpha \cos \sigma \right] \right\} \Delta\sigma^m \quad (3.5) \end{aligned}$$

С учетом различия схем течения фиг. 1,ж и 1,з вывод формулы (3.5) подобен выводу (2.18). Главное отличие вывода (3.5) связано с тем, что слабый скачок dw , заменяющий здесь пучок характеристик, идет по биссектрисе c^+ -характеристик до и после него, а слабый скачок wf – по биссектрисе аналогичных c^- -характеристик.

4. Приведенные выше формулы дают образующие близких к оптимальным головных частей с одним "главным" изломом, который обтекается с образованием либо пучка волн разрежения (в D^- , т.е. при $\lambda < 0$), либо слабого скачка (в D^+ , т.е. при $\lambda > 0$). Расчет тысяч таких образующих требует нескольких минут на РС АТ 486. В результате для всех скоростей V_∞ сверхзвукового набегающего потока ($M_\infty > 1$), отнесенных к его критической скорости, и относительных толщин τ , отвечающих обтеканию искомым образующим с

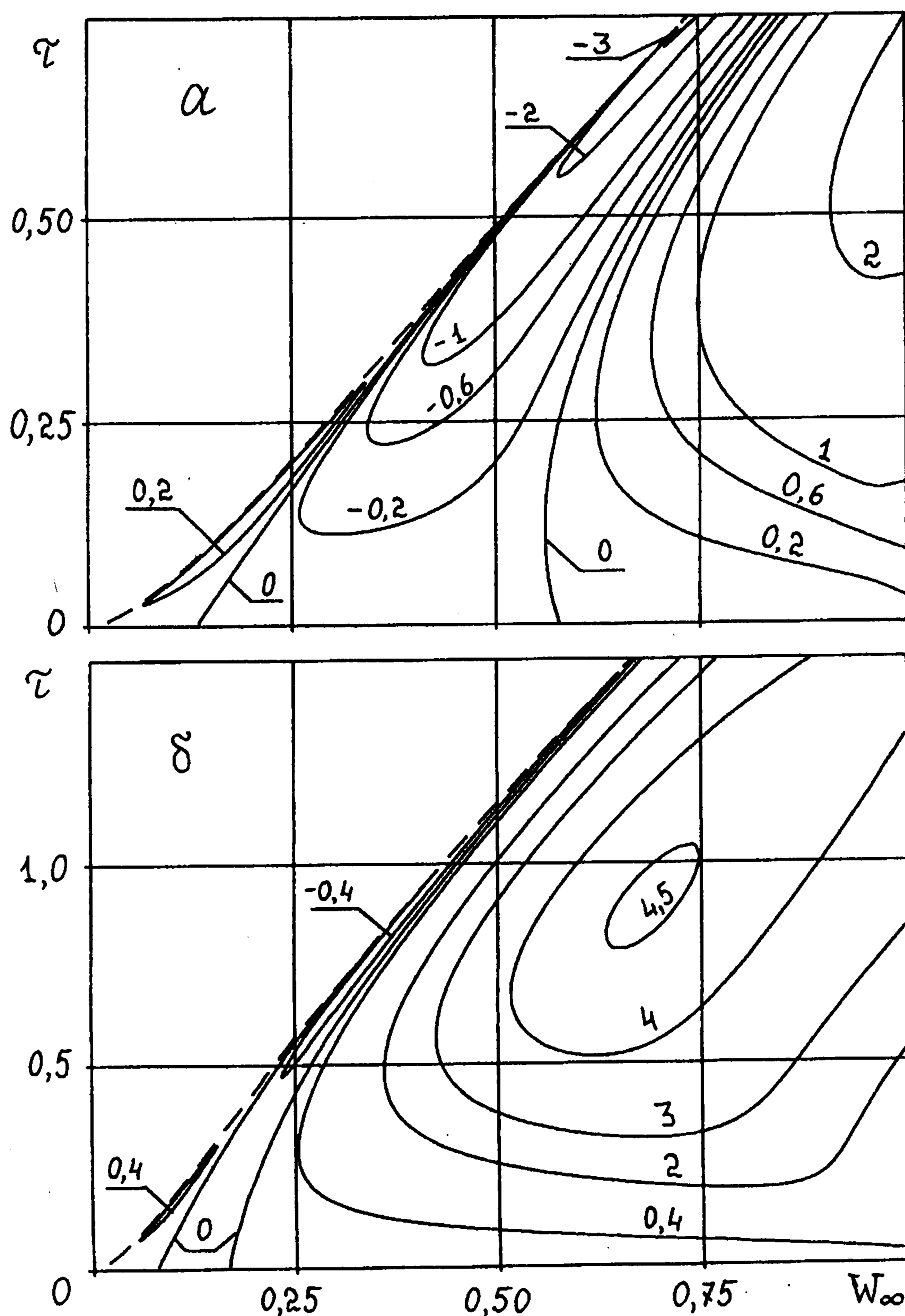


Фиг. 2

присоединенной ударной волной, стало возможно построение изолиний любых их локальных и интегральных характеристик.

Как иллюстрация сказанного на фиг. 2-4,а для сверхзвукового газа с $\kappa = 1,4$ в плоскости $W_\infty\tau$ представлены изолинии δc_x , $\Delta\vartheta_-$ и $\Delta\vartheta_d \equiv |\Delta\vartheta_+ - \Delta\vartheta_-|$, построенные по 6400 точкам.

Здесь $W_\infty = (V_\infty - 1)/(V_\infty^m - 1)$ с максимальной скоростью $V_\infty^m = \sqrt{(\kappa + 1)/(\kappa - 1)} \approx 2,45$. Линиями нулевого уровня являются ось W_∞ , две изолинии, входящие в нее под конечными углами, и "звуковая" штриховая кривая – граница области D , соответствующая звуковым клиньям. Согласно сказанному ранее, результаты, относящиеся к этим изолиниям, в частности, их форма в плоскости $W_\infty\tau$, точные. "Нетривиальные", т.е. отличные от оси W_∞ линии нулевого уровня, отвечающие $|\lambda| = 0$, назовем "нулевыми". Левая нулевая изолиния с ростом W_∞ приближается к "звуковой", на которой $\lambda < 0$, и в масштабе фиг. 2-4 сливается с ней. В об-

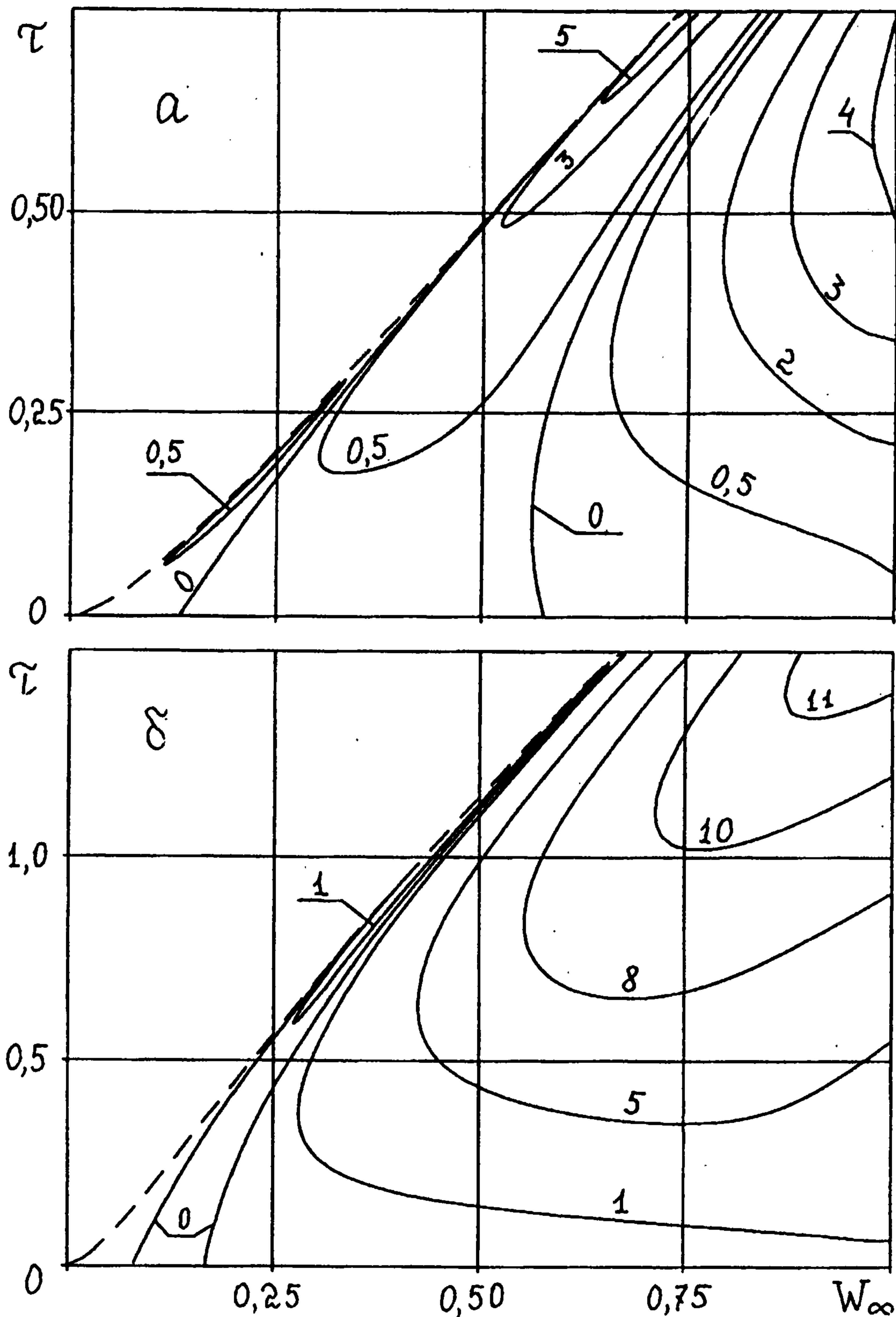


Фиг 3

ласти D^+ – полосе между нулевыми изолиниями коэффициент отражения положителен, а вне D^+ отрицателен.

На фиг. 2,а около изолиний даны δc_x – определенные согласно (2.17) относительные выигрыши (в процентах) по коэффициенту волнового сопротивления. При этом здесь и далее величины $\Delta \chi^m$ построенных образующих определялись не приближенной формулой (2.16), а точными соотношениями, описывающими косые скачки и центрированную волну разрежения. Необходимые для такого расчета геометрические параметры вычислялись последовательно по формулам: $\Delta \sigma^m$ и $\Delta \vartheta_-^m$ – по (2.15), $\Delta \chi_d$ – по (2.18) в D^- и по (3.5) – в D^+ , $\Delta \vartheta_+$ – по (2.7) и, наконец, $\Delta \gamma_d$ – по (2.9). На фиг. 3,а и 4,а цифры у изолиний – умноженные на 100 значения $\Delta \vartheta_-$ и величины угла излома $\Delta \vartheta_d$ (в радианах).

Углы излома и выигрыши по c_x близких к оптимальным головных частей данной работы и семи контуров, построенных в [10, 11] с помощью итерационной процедуры, основанной на общем методе множителей Лагранжа, сравниваются в таблице (без индекса m –



Фиг. 4

величины из [10, 11]). В ее последнем столбце приведена относительная разность $\Delta \delta c_x = (\delta c_x - \delta c_x^m) / \delta c_x$ выигрышей. Как правило (исключение – первый вариант, где $\Delta c_x < 0,02\%$), она не превышает 0,1 при существенно большей (от 10 до 38%) разнице в углах излома. Незначительное (на 2%) превышение δc_x^m над δc_x в четвертом варианте обусловлено недостаточным числом знаков в величине c_x представленной в [10, 11]. Ранее та же проблема возникала в [13]. Итак, построенные головные части, несмотря на заметное отличие от образующих из [10, 11] по форме, реализуют почти всю разницу в c_x клиньев и оптимальных тел. Сравнение таблицы с фиг. 2,а показывает, что найденные для рассчитанных в [10, 11] вариантов выигрыши по c_x были далеки от максимальных. Действительно, если в [10, 11] максимальный выигрыш по c_x не превышал 0,66%, то согласно фиг. 2,а максимальное $\delta c_x^m > 1,3\%$. С учетом сказанного выше, это соответствует $\delta c_x \approx 1,5\%$.

Как видно из фиг. 2,а, максимальные δc_x^m получаются при обтекании гиперзвуковым потоком достаточно толстых тел ($\tau \geq 0,2 + 0,3$). Для воздуха неизбежные в таких случаях

V_∞	$\tau \times 10^4$	$\Delta\vartheta_d \times 10^4$	$\Delta\vartheta_d^m \times 10^4$	$\delta c_x \times 10^3$	$\delta c_x^m \times 10^3$	$\Delta\delta c_x \times 10^2$
1,4	2128	31	28	20	16	20
1,6	3858	47	30	38	34	9
2,1	4369	209	160	118	107	10
2,3	2069	172	151	299	305	-2
2,3	4802	499	321	656	586	11
2,3	7237	299	208	153	141	8
2,4	7483	526	327	429	394	8

диссоциация и ионизация требуют использования более сложной термодинамики, чем термодинамика совершенного газа с $\kappa = 1,4$. Модель совершенного газа с меньшими κ может тем не менее дать представление о направлении влияния указанных процессов. Результаты расчетов, выполненных с такой целью для $\kappa = 1,1$, представлены на фиг. 2–4,б аналогичных фиг. 2–4,а. Сравнение этих фигур показывает, что уменьшение κ ведет к сужению области D^+ и уменьшению в ней углов излома и выигрыша по c_x . Напротив, в части D^- , отвечающей большим скоростям, увеличиваются и углы излома и δc_x^m . Для $\kappa = 1,1$ максимальное δc_x^m достигает здесь 6%. Возможность быстрого определения зависимости δc_x^m от W_∞ или V_∞ , τ , κ и т.п. – один из главных итогов развитого подхода. Как уже отмечалось, отсутствие такой информации не позволило автору [10, 11] рассчитать более выигрышные варианты. Еще менее выигрышны почти оптимальные контуры работы [8]. Заметим, кстати, что метод профилирования, предложенный в [8], несмотря на самокритику автора [14], по конечному результату эквивалентен методу [10, 11].

В заключение остановимся на основных отличиях построенных выше образующих от контуров оптимальных в строгом смысле этого термина. В D^- это отличие связано отнюдь не с малыми дополнительными изломами, которые к тому же не учитывались ни в [8], ни в [10, 11]. Неоптимальность построенных образующих в первую очередь обусловлена тем, что в схеме фиг. 1,2 пучок волн разрежения в пределах iwf не отражается от скачка. Учет в выражении для $\Delta\chi$ следующих за квадратичными слагаемых приведет к тому, что небольшая часть пучка станет отражаться от скачка. При этом отрицательное влияние отраженной волны сжатия ($\lambda < 0$) будет слегка перекрываться уменьшением χ из-за сдвига влево точки излома d . Как следует из таблицы, при заметных δc_x^m эффект учета в $\Delta\chi$ членов более высокого порядка может привести к дополнительному уменьшению c_x еще примерно на $\delta c_x^m/10$.

В D^+ отличие оптимального контура от изображенного на фиг. 1,ж носит более принципиальный характер. Действительно, применив к нему варьирование в ϵ -полосках, найдем, что оптимальная образующая должна иметь изломы в точках d_1 и d_2 . Излом в d_2 , связанный с отражением от слабого скачка dw , несущественен. В противоположность этому излом в d_1 будет того же порядка, что и в d , ибо его возникновение обусловлено отражением от головной ударной волны. Учет данного обстоятельства ведет к схеме, представленной на фиг. 1,з. В ней отраженная от iw волна разрежения ($\lambda > 0$) целиком попадает на оптимизируемый контур, а безразмерные длины участков hf и d_1d – величины того же порядка, что и изломы. Это, однако, не позволяет утверждать, что связанное с переходом к новой схеме дополнительное уменьшение c_x будет порядка δc_x^m .

Наконец, всюду выше допускались лишь такие отклонения искомым образующих от прямолинейных, которые не приводили к возникновению местных дозвуковых зон. В частности, не исследовалось изменение χ при введении переднего торца, обтекаемого с отошедшей ударной волной. Опыт решения данной задачи в приближении закона сопротивления Ньютона подсказывает, что и при наличии почти оптимальных

(или оптимальных, как "звуковой" клин) контуров, обтекаемых с присоединенным скачком, вблизи верхней границы D , т.е. вблизи штриховой кривой на фиг. 2–4 оптимальны образующие с передним торцом. С ростом V_∞ ширина, "отсекаемой" такими решениями части D , расширяется. При $M_\infty \gg 1$ и $\tau > 1$ из-за этого заведомо не будут оптимальны "звуковой" клин и клин, отвечающий левой "нулевой" изолинии фиг. 2–4. Здесь неравенства из (2.15), как и неравенство: $dx''/dy \geq 1/\sqrt{3}$ – условие Лежандра, которое в приближении Ньютона должно выполняться на оптимальной образующей [1–3], оказываются не достаточными, а лишь необходимыми условиями оптимальности. Согласно [15] в упомянутом приближении введение малого торца в любой, а не только в передней точке оптимального контура дает неравенство: $dx''/dy \geq 1$, более сильное, чем условие Лежандра. Именно аналогичное неравенство для полной системы уравнений газовой динамики, а не возможность обтекания с присоединенной ударной волной определит $\tau^*(M_\infty)$, которое упоминалось в начале статьи.

Авторы признательны В.А. Вострецову за помощь в работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-17514).

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория оптимальных аэродинамических форм / Под ред. А. Миеле. М.: Мир, 1969. 507 с.
2. Крайко А.Н. Об определении тел минимального сопротивления при использовании законов сопротивления Ньютона и Буземана // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 3. С. 484–495.
3. Крайко А.Н. Вариационные задачи газовой динамики. М.: Наука, 1979. 447 с.
4. Гонор А.Л., Крайко А.Н. Некоторые результаты исследования оптимальных форм при сверх- и гиперзвуковых скоростях // Теория оптимальных аэродинамических форм. М.: Мир, 1969. С. 455–492.
5. Крайко А.Н. Вариационные задачи газовой динамики, постановки, методы решения, соотношение точных и приближенных подходов // Проблемы современной механики. М.: Изд-во МГУ, 1983. Ч. 1. С. 90–100.
6. Черный Г.Г. Сверхзвуковое обтекание профиля, близкого к клину // Тр. ЦИАМ им. П.И. Баранова. 1950. №. 197. 11 с.
7. Черный Г.Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. М.: Физматгиз, 1959. 220 с.
8. Шмыглевский Ю.Д. О сверхзвуковых профилях, имеющих минимальное сопротивление // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 2. С. 269–273.
9. Шмыглевский Ю.Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. М.: ВЦ АН СССР, 1963. 142 с.
10. Шипилин А.В. Оптимальные формы тел с присоединенными ударными волнами // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 4. С. 9–18.
11. Шипилин А.В. Вариационные задачи газовой динамики с присоединенными ударными волнами // Сборник теоретических работ по гидромеханике. М.: ВЦ АН СССР, 1970. С. 54–106.
12. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
13. Крайко А.Н., Шеломовский В.В. Головные части тел вращения с протоком, близкие к телам минимального волнового сопротивления // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 1. С. 138–145.
14. Шмыглевский Ю.Д. Исправления к статье Ю.Д. Шмыглевского "О сверхзвуковых профилях, имеющих минимальное сопротивление" // ПММ. 1958. Т. 22. Вып. 3. С. 424.
15. Крайко А.Н. Головная часть заданного объема, оптимальная по волновому сопротивлению в приближении закона сопротивления Ньютона // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 3. С. 382–388.