

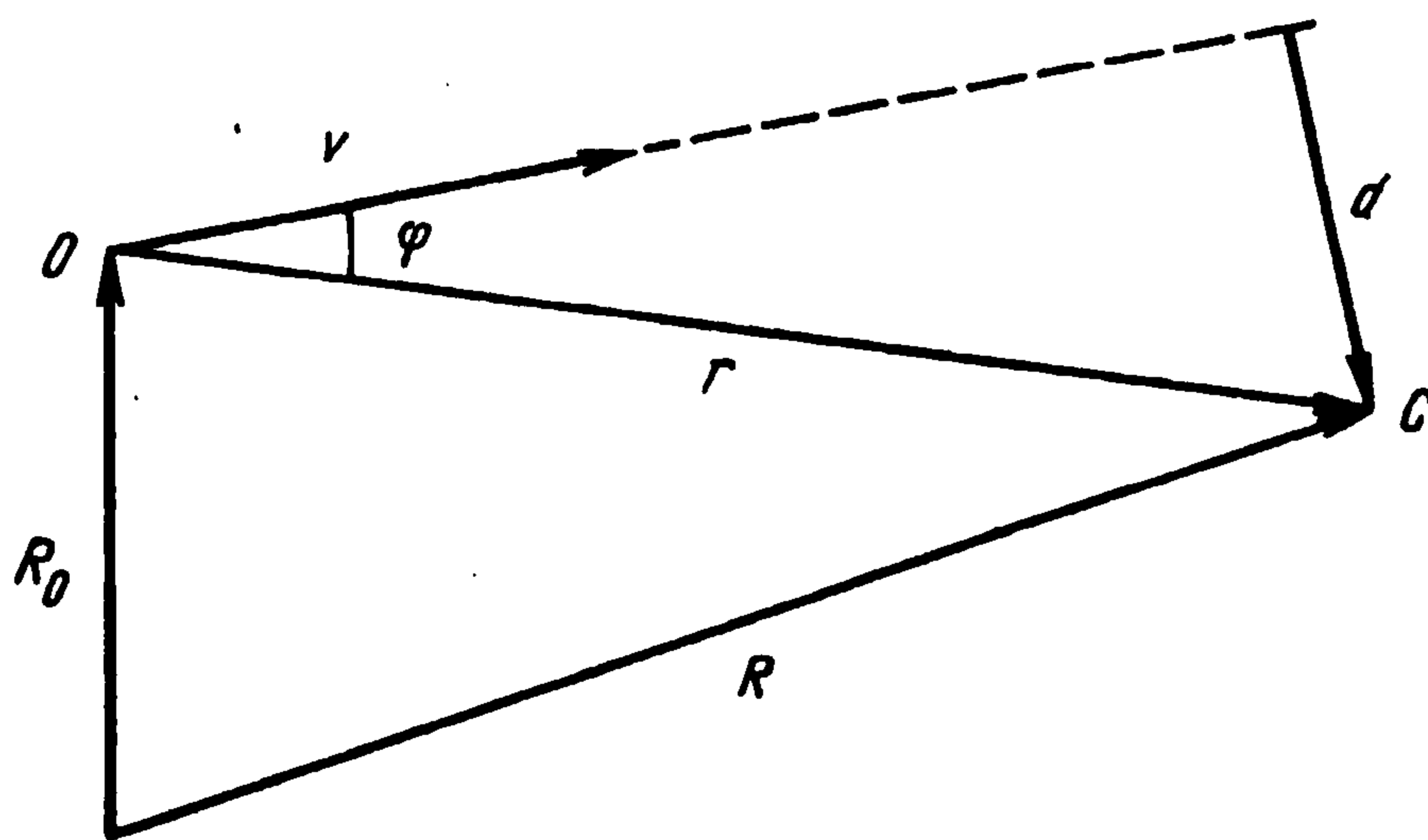
УДК 62–50

© 1995 г. Л.Д. Акуленко, И.М. Ананьевский, Н.Н. Болотник, С.Б. Корнеев.

### ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ПАРАЛЛЕЛЬНОГО СБЛИЖЕНИЯ

Исследуется модификация метода параллельного сближения (или метода последовательных упреждений) [1, 2], основанная на решении обратной задачи динамики: движение по методу параллельного сближения рассматривается как идеальное состояние взаимного движения объекта и цели и задается динамика переходного процесса восстановления идеального состояния при его нарушении. Управляющие силы рассчитываются по уравнениям движения объекта и предписанному уравнению переходного процесса.

**1. Описание алгоритма. Уравнения движения.** Введем следующие обозначения (фиг. 1):  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{R}_0$  – радиусы-векторы соответственно цели и объекта относительно начала инерциальной системы координат;  $\mathbf{r} = \mathbf{R} - \mathbf{R}_0$  – радиус-вектор цели относительно объекта;  $\mathbf{d}$  – проекция вектора  $\mathbf{r}$  на плоскость, перпендикулярную вектору  $\mathbf{v} = -\dot{\mathbf{r}}$ ;  $\mathbf{e}$  – единичный вектор, коллинеарный вектору  $\mathbf{d}$ ;  $d = |\mathbf{d}|$  – расстояние между целью и



Фиг. 1

прямой, на которой в данный момент лежит вектор относительной скорости объекта. Здесь и далее длину вектора  $\mathbf{x}$  будем обозначать через  $x$ .

Динамика объекта описывается уравнением

$$\ddot{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{u} + \mathbf{g} \tag{1.1}$$

где  $\mathbf{u}$  – вектор управляющего ускорения,  $\mathbf{g}$  – ускорение внешних сил (например, силы тяжести). Управление объектом осуществляется исходя из следующих правил:

- а) вектор  $\mathbf{u}$  коллинеарен вектору  $\mathbf{d}$ ;
- б) величина  $d$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{d} + \alpha d = 0 \tag{1.2}$$

где  $\alpha > 0$  – постоянная, характеризующая скорость переходного процесса.

Таким образом, величина  $d$  выбрана в качестве меры отклонения от "идеального" движения по методу параллельного сближения, при котором вектор относительной скорости объекта  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}}_0 - \dot{\mathbf{R}}$  направлен на цель. Если в начальный момент  $d = 0$ , то в силу уравнений (1.2)  $d(t) \equiv 0$  и данный алгоритм самонаведения совпадает с методом параллельного сближения. Будем считать, что в начальный момент  $t_0$  угол  $\varphi$  между векторами  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{r}$  острый, т.е.  $0 < \varphi < \pi/2$ . Следовательно, имеем  $(\mathbf{v}(t_0), \mathbf{r}(t_0)) > 0$  и  $d(t_0) \neq 0$ . Из уравнения (1.2) вытекает, что  $d(t) \neq 0$  при  $t \geq t_0$ . Предположим, кроме того, что относительная скорость  $v(t)$  удовлетворяет условию  $v_1 \geq v(t) \geq v_0 > 0$ , где  $v_0, v_1$  – постоянные, а вектор-функции  $\mathbf{g}$  и  $\ddot{\mathbf{R}}$  ограничены.

Используя уравнения (1.1), (1.2) и правила  $a, б$  для определения управления, найдем вектор  $\mathbf{u}$ . Имеем (фиг. 1)  $v^{-1}$

$$\mathbf{d} = \mathbf{r} - v^{-2}(\mathbf{r}, \mathbf{v})\mathbf{v}, \quad d = (r^2v^2 - (\mathbf{r}, \mathbf{v})^2)^{1/2}$$

где  $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  – скалярное произведение векторов  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$ .

Продифференцируем  $d$  по времени:

$$\dot{d} = \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{v})^2(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) - v^2(\mathbf{r}, \mathbf{v})(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{v}})}{v^3(r^2v^2 - (\mathbf{r}, \mathbf{v})^2)^{1/2}}$$

Заметим, что знаменатель здесь не обращается в нуль, так как  $d \neq 0$ . Подставим  $d, \dot{d}$  в уравнение (1.2). После некоторых преобразований получим

$$(\mathbf{r}, \mathbf{v})^2(\mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) - v^2(\mathbf{r}, \mathbf{v})(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{v}}) + \alpha r^2 v^4 - \alpha v^2 (\mathbf{r}, \mathbf{v})^2 = 0 \quad (1.3)$$

По предположению  $a$  вектор управляющего ускорения  $\mathbf{u}$  направлен вдоль  $\mathbf{d}$ , т.е.  $\mathbf{u} = ue$ . Используя введенные обозначения, перепишем уравнение (1.1) в виде

$$\dot{\mathbf{v}} = ue + \mathbf{g} - \ddot{\mathbf{R}} \quad (1.4)$$

Вектор  $\mathbf{e}$  выражается через  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{v}$  следующим образом:

$$\mathbf{e} = \frac{v^2 \mathbf{r} - (\mathbf{r}, \mathbf{v})\mathbf{v}}{v(r^2v^2 - (\mathbf{r}, \mathbf{v})^2)^{1/2}} \quad (1.5)$$

Подставив выражения (1.4), (1.5) в уравнение (1.3) и воспользовавшись тем, что  $(\mathbf{v}, \mathbf{e}) = 0$ , получим уравнение, из которого находим величину управления

$$u = \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{v})^2(\mathbf{v}, \mathbf{W}) - v^2(\mathbf{r}, \mathbf{v})(\mathbf{r}, \mathbf{W}) + \alpha r^2 v^4 - \alpha v^2 (\mathbf{r}, \mathbf{v})^2}{v(\mathbf{r}, \mathbf{v})(r^2v^2 - (\mathbf{r}, \mathbf{v})^2)^{1/2}}$$

где  $\mathbf{W} = \mathbf{g} - \ddot{\mathbf{R}}$ . Уравнение (1.4) движения объекта относительно цели принимает замкнутый вид

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left[ \frac{(v^2 \mathbf{r} - (\mathbf{r}, \mathbf{v})\mathbf{v}, \mathbf{W})}{v^2(r^2v^2 - (\mathbf{r}, \mathbf{v})^2)} - \frac{\alpha}{(\mathbf{r}, \mathbf{v})} \right] (v^2 \mathbf{r} - (\mathbf{r}, \mathbf{v})\mathbf{v}) - \mathbf{W} \quad (1.6)$$

Таким образом, чтобы вычислить управление по данному алгоритму, необходимо знать радиус-вектор цели относительно объекта, их относительную скорость, а также абсолютное ускорение цели  $\ddot{\mathbf{R}}$  и ускорение внешних сил  $\mathbf{g}$ .

**2. Исследование алгоритма. Поведение траекторий.** Для проверки работоспособности алгоритма нужно убедиться, что он обеспечивает попадание объекта в достаточно малую окрестность цели. Покажем, что при сделанных предположениях и в отсутствие ограничений на управление объект попадает в сколь угодно малую окрестность точечной цели за достаточно большое время. Тем самым решается задача о попадании объекта в цель конечных размеров.

Рассмотрим следующие величины:  $r(t)$  – расстояние между объектом и целью,  $x(t) = (\mathbf{r}, \mathbf{v})/(r\nu) = \cos \varphi$  – косинус угла между векторами  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{r}$ ,  $\nu(t)$  – модуль относительной скорости объекта и цели. Продифференцируем переменные  $x$ ,  $r$  и  $\nu$  по  $t$  (производная  $\dot{x}$  вычисляется в силу уравнения (1.6)). Положим  $w = (\mathbf{v}, \mathbf{W})/\nu$ . Получим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = (\alpha r - \nu x)(1 - x^2)/(rx), \quad \dot{r} = -\nu x, \quad \dot{\nu} = w \quad (2.1)$$

Будем рассматривать  $w$  как некоторую функцию времени, удовлетворяющую ограничению  $|w(t)| \leq w_0$ , где  $w_0$  – постоянная.

Векторное уравнение (1.6) эквивалентно системе дифференциальных уравнений шестого порядка. Поведение траекторий уравнения (1.6) при  $t \rightarrow \infty$  удобно изучать с помощью системы (2.1). Пусть  $\mathbf{r}(t)$ ,  $\mathbf{v}(t)$  – какая-либо траектория уравнения (1.6),  $t \geq t_0$ , и  $(\mathbf{r}(t_0), \mathbf{v}(t_0)) > 0$  в начальный момент времени  $t_0$ . Рассмотрим соответствующую ей траекторию  $(x(t), r(t), \nu(t))$  системы (2.1). Так как  $d = r(1 - x^2)^{1/2} > 0$ , то  $r(t) > 0$  и  $x(t) < 1$  при  $t \in [t_0, \infty)$ .

Неравенство  $x(t) > 0$  сохраняется при  $t > t_0$ , т.е. проекция относительной скорости  $\mathbf{v}$  на радиус-вектор  $\mathbf{r}$  всегда положительна.

Предположим противное. Пусть  $t_1 > t_0$  – первый такой момент, что  $x(t_1) = 0$ . Так как  $x(t)$ ,  $r(t)$  непрерывны по  $t$ ,  $r(t_1) > 0$ , а скорость  $\nu(t)$  по предположению ограничена, то существует такое  $t_2$ ,  $t_0 < t_2 < t_1$ , что  $\alpha r(t) - \nu(t)x(t) > 0$  при  $t_2 \leq t \leq t_1$ . Тогда производная  $\dot{x}(t)$  и сама величина  $x(t)$  положительны при  $t_2 \leq t < t_1$ , что противоречит равенству  $x(t_1) = 0$ . Таким образом,  $x(t) > 0$  при  $t \geq t_0$ .

Отсюда и из второго уравнения (2.1) следует, что  $\dot{r}(t) < 0$  вдоль траектории, т.е. расстояние между объектом и целью монотонно убывает. Оказывается, что  $r(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Предположим противное. Пусть  $r(t) \geq r_1 > 0$ . По предположению  $\nu(t) \leq \nu_1$ . Следовательно существует такое  $x_1$ ,  $0 < x_1 < x(t_0)$ , что  $\alpha r_1 - \nu x > 0$ , если  $x \leq x_1$ . Допустим, что в некоторый момент времени  $t_1 > t_0$  впервые имеет место равенство  $x(t) = x_1$ , т.е.  $x(t) > x(t_1) = x_1$ ,  $t_0 \leq t < t_1$ . В силу выбора  $x_1$  правая часть первого уравнения (2.1) в момент  $t_1$ , а значит, и производная  $\dot{x}(t_1)$  положительны, что противоречит неравенству  $x(t) > x(t_1)$ ,  $t < t_1$ . Следовательно, неравенство  $x(t) > x_1$  сохраняется при всех  $t \geq t_0$ . Тогда из второго уравнения (2.1) получаем  $\dot{r}(t) = -\nu(t)x(t) \leq -\nu_0 x_1 < 0$ , т.е. функция  $r(t)$  неограниченно убывает. Полученное противоречие и доказывает, что  $r(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

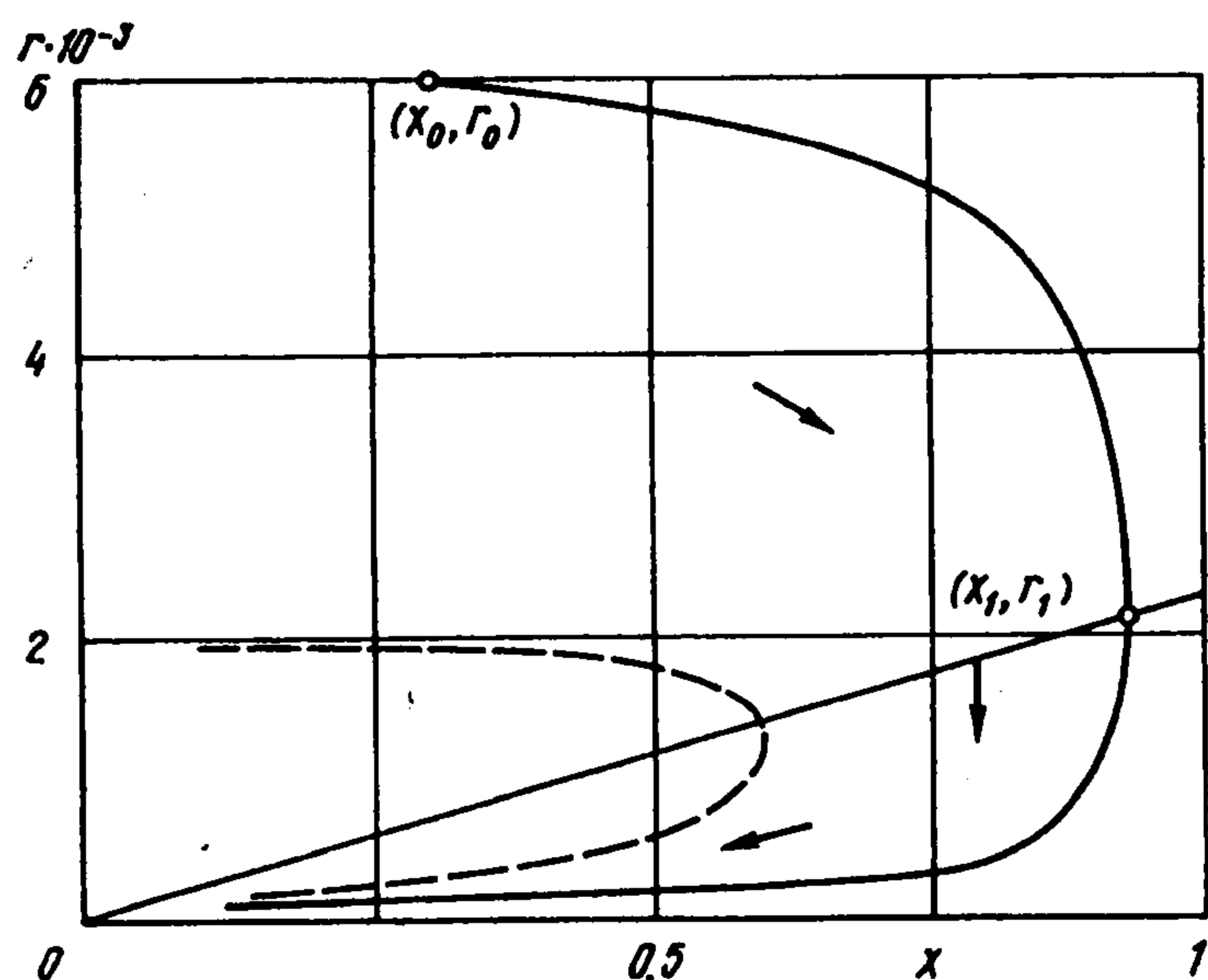
Оценим скорость сближения объекта и цели. Продифференцируем величину  $\psi(t) = \alpha r(t) - \nu(t)x(t)$  по времени. Получим

$$d\psi/dt = -x(\alpha\nu + w) - \nu(1 - x^2)\psi/(rx)$$

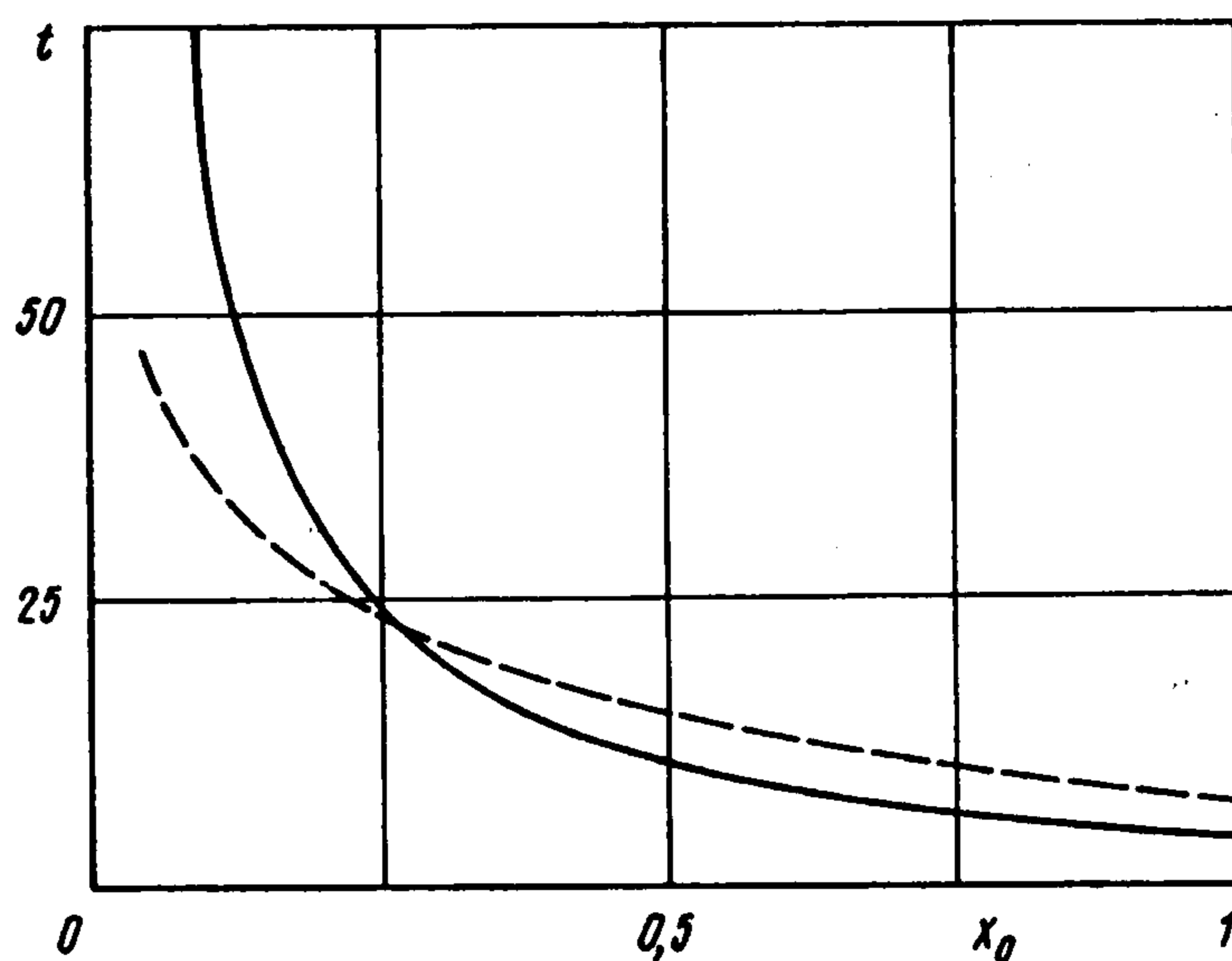
Будем полагать, что  $\alpha\nu_0 > w_0$ . Выполнения этого неравенства всегда можно добиться выбором соответствующего  $\alpha$ . Тогда  $\psi(t) < 0$ , если  $\psi(t) = 0$ . Отсюда вытекает, что величина  $\psi(t)$  вдоль траектории обращается в нуль не более одного раза и при этом меняет знак с плюса на минус. Знак производной  $\dot{x}$  совпадает со знаком  $\psi$ , поэтому фазовая координата  $x(t)$  возрастает, пока  $\psi(t) > 0$ , и убывает, когда  $\psi(t) < 0$ .

Пусть  $t_1$  таково, что  $\psi(t_1) \leq 0$ . Из приведенного выше рассуждения следует, что  $\psi(t) < 0$  при  $t > t_1$ . Тогда  $\alpha r(t) < \nu(t)x(t)$  и из второго уравнения системы (2.1) имеем

$$\dot{r}(t) = -\nu(t)x(t) < -\alpha r(t), \quad t > t_1$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Отсюда получаем оценку зависимости расстояния  $r$  от времени:

$$r(t) \leq r(t_1) e^{-\alpha(r-t_1)}, \quad t > t_1 \quad (2.2)$$

где  $t_1$  таково, что  $\alpha r(t_1) \leq v(t_1)x(t_1)$ .

**3. Частный случай.** Рассмотрим случай  $W = 0$ , т.е. наведение объекта с помощью рассматриваемого алгоритма на движущуюся равномерно и прямолинейно цель в отсутствие внешних сил. Не нарушая общности, будем считать цель неподвижной (этого можно добиться соответствующей заменой переменных). Уравнение (1.6) в этом случае эквивалентно системе

$$\dot{v} = -\alpha v + \alpha v^2 r / (r, v), \quad \dot{r} = -v \quad (3.1)$$

Так как  $d v^2 / dt = 2(v, \dot{v}) = 2(v, u) = 0$ , то  $v = \text{const}$  и система (2.1) принимает вид

$$\dot{x} = (1 - x^2)(\alpha r - vx) / (r, x), \quad \dot{r} = -vx \quad (3.2)$$

где  $\alpha, v$  – постоянные коэффициенты.

Рассмотрим фрагмент фазовой плоскости системы (3.1):  $r > 0, 0 < x \leq 1$  (фиг. 2). Векторное поле в нем устроено следующим образом: на прямой  $x = 1$  имеем  $\dot{x} = 0, \dot{r} = -v$ ; на прямой  $\alpha r = vx$  выполняется равенство  $\dot{x} = 0$ ; выше этой прямой  $\dot{x} > 0$ , а ниже  $-\dot{x} < 0$ . Траектория системы ведет себя так: координата  $r(t)$  строго убывает и  $r(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ; координата  $x(t)$  возрастает до пересечения с прямой  $\alpha r = vx$ , а затем убывает. Нетрудно видеть, что  $x(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , так как в противном случае из второго уравнения (3.2) следовало бы, что  $r(t) \rightarrow -\infty$ .

Из структуры векторного поля видно, что для каждой траектории, начинающейся выше прямой  $\alpha r = vx$ , существует единственная точка пересечения с этой прямой. Пусть  $x_1 = x(t_1), r_1 = r(t_1)$  таковы, что  $\alpha r_1 \leq v x_1$ , т.е. точка  $(x_1, r_1)$  лежит на прямой  $\alpha r = vx$  или ниже. Тогда величина  $r(t)$  при  $t \geq t_1$  удовлетворяет неравенству (2.2).

Пусть  $x_0 = x(t_0), r_0 = r(t_0)$  – начальная точка траектории, расположенная выше прямой  $\alpha r = vx$ ,  $t_1$  – момент пересечения траектории с этой прямой. Представляет интерес исследование зависимости от  $x_0, r_0$  времени  $t_1 - t_0$  достижения траекторией данной прямой.

Приведем две оценки.

Так как выше прямой  $\alpha r = vx$  координата  $x(t)$  вдоль траектории возрастает, то  $|\dot{r}(t)| = vx(t) \geq vx_0, t_0 \leq t \leq t_1$ , (фиг. 2). Кроме того,  $r_1 > vx_0/\alpha$ . Отсюда получаем оценку времени достижения прямой  $\alpha r = vx$  из точки  $x_0, r_0$ :

$$t_1 - t_0 \leq (r_0 - vx_0/\alpha) / (vx_0) = (\alpha r_0 - vx_0) / \alpha vx_0 \quad (3.3)$$

При  $x_0 = 1$  эта оценка точна, однако с уменьшением  $x_0$  она становится все более грубой.

Получим другую оценку, которая более эффективна при малых  $x_0$ . Положим  $\xi(t) = \alpha r(t) - \nu x(t) + \nu x_0^2$ . Поскольку рассматриваемый участок траектории расположен выше прямой  $\alpha r = \nu x$ , то  $\xi(t) > 0$ ,  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Продифференцируем  $\xi(t)$  по времени. Так как  $x_0 \leq x(t) \leq 1$ , то имеем

$$\dot{\xi}(t) = -\nu(\alpha r - \nu x + \nu x^3)/(rx) \leq -\nu(\alpha r - \nu x + \nu x_0^2)/r_0 = -\nu \xi(t)/r_0 < 0$$

откуда следует

$$t_1 - t_0 \leq r_0 \ln(\xi(t_0)/\xi(t_1))/\nu$$

Учитывая, что  $\xi(t_1) = \nu x_0^2$ , получаем еще одну оценку времени достижения прямой  $\alpha r = \nu x$ :

$$t_1 - t_0 \leq r_0 \ln((\alpha r_0 - \nu x_0)/(\nu x_0^2) + 1)/\nu \quad (3.4)$$

На фиг. 3 представлены графики зависимости от  $x_0$  правых частей приведенных неравенств при следующих значениях параметров:  $\alpha = 0,5$ ,  $r_0 = 100$ ,  $\nu = 10$ . Сплошная линия соответствует оценке (3.3), а штриховая – оценке (3.4).

Закончим исследование частного случая вычислением абсолютной величины управления. Из первого уравнения (3.1) получаем

$$u^2 = (\dot{v}, \dot{v}) = \alpha^2 \nu^2 (1 - x^2)/x^2 = \alpha^2 \nu^2 \operatorname{tg}^2 \varphi \quad (3.5)$$

Таким образом, величина  $u(t)$  монотонно зависит от  $x$  (следовательно, от угла  $\varphi$ ): убывает там, где возрастает  $x$ , т.е. до пересечения траектории с прямой  $\alpha r = \nu x$ , а затем растет. Если на управление наложено условие  $|u(t)| \leq u_0$ , то  $u(t)$  достигает ограничения, когда выполняется равенство

$$x(t) = \alpha \nu (\alpha^2 \nu^2 + u_0^2)^{-1/2}$$

С этого момента следование данному алгоритму с прежним коэффициентом  $\alpha$  невозможно.

**4. Оптимальное поведение цели.** Вернемся к случаю  $W \neq 0$ . Управляющее ускорение объекта определяется алгоритмом наведения, поведение же цели произвольно. Как следует двигаться цели, т.е. каково должно быть ускорение  $W$ , чтобы "ухудшить" сближение? Ответ на этот вопрос можно получить, решая задачу оптимального (с точки зрения цели) управления. Возможны различные постановки этой задачи. Рассмотрим одну из них.

Пусть поведение системы описывается уравнениями (2.1), где управление  $w(t)$  – кусочно-непрерывная функция и подчиняется ограничению

$$|w(\bar{t})| \leq w_0 \quad (4.1)$$

Требуется найти такой закон управления  $w(t)$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , удовлетворяющий ограничению (4.1), чтобы расстояние  $r(T)$  в заданный момент окончания процесса  $T$  было максимальным.

Для решения этой задачи воспользуемся принципом максимума Понтрягина [3]. Функция Гамильтона для системы (2.1) имеет вид

$$H = p_1(1 - x^2)(\alpha r - \nu x)/(rx) - p_2 \nu x + p_3 w$$

Здесь  $p_1, p_2, p_3$  – сопряженные переменные, отвечающие фазовым переменным  $x, r$  и  $\nu$  соответственно. Выпишем сопряженные уравнения:

$$\dot{p}_1 = -p_1(2\nu x^3 - \alpha r x^2 - \alpha r)/(rx^2) + p_2 \nu \quad (4.2)$$

$$\dot{p}_2 = -p_1(1 - x^2)\nu/r^2, \quad \dot{p}_3 = p_1(1 - x^2)/r + p_2 x$$

Условия трансверсальности в данном случае имеют вид

$$p_1(T) = p_3(T) = 0, \quad p_2(T) = 1 \quad (4.3)$$

Из принципа максимума получаем следующее необходимое условие оптимальности управления  $w(t)$ :

$$w(t) = w_0 \operatorname{sign} p_3 \quad (4.4)$$

Можно показать, что

$$p_3(t) < 0, \quad t_0 \leq t < T \quad (4.5)$$

Тогда  $w(t) = -w_0$ .

Для доказательства неравенства (4.5) продифференцируем  $\dot{p}_3$  по времени в силу системы (2.1), (4.2). После некоторых преобразований получим линейное дифференциальное уравнение относительно  $\dot{p}_3$

$$dp_3/dt = \alpha(1-x^2)x^{-2} p_3 \quad (4.6)$$

В разд. 2 было показано, что  $x(t) > 0$ . Поэтому на промежутке  $[t_0, T]$  функция  $\alpha(1-x^2)x^{-2}$  ограничена и уравнение (4.6) удовлетворяет условию единственности решения. Так как это уравнение имеет нулевое решение, то все прочие его решения знакопостоянны. Из (4.3) и последнего уравнения (4.2) следует, что  $\dot{p}_3(T) = x(T) > 0$ . Тогда  $\dot{p}_3(t) > 0$  и, учитывая, что  $p_3(T) = 0$ , получаем (4.5).

Вернемся к уравнению (1.6), описывающему движение объекта относительно цели. В этом уравнении вектор-функцию  $W(t)$  можно рассматривать как управление цели. Если на функцию  $W(t)$  наложить ограничения  $|W(t)| \leq w_0$ , то неравенство (4.1) будет следовать из определения величины  $w(t)$ . Указанному ограничению удовлетворяет единственная вектор-функция  $W(t) = -w_0 v^{-1}(t)v(t)$ , реализующая оптимальный закон управления  $w(t) = -w_0$ .

Проверим, что полученное управление является оптимальным. Так как необходимому условию оптимальности – принципу максимума – удовлетворяет единственное управление, то для этого достаточно доказать существование решения данной задачи оптимального управления.

Расширим класс допустимых управлений. Будем считать, что  $w(t)$  – измеримая функция, почти всюду на  $[t_0, T]$  удовлетворяющая ограничению (4.1), т.е. множество допустимых управлений  $D$  – шар радиуса  $w_0$  в пространстве  $L_\infty([t_0, T])$ .

Пусть, как и прежде, начальное состояние системы (2.1) удовлетворяет неравенствам  $r(t_0) > 0$ ,  $0 < x(t_0) < 1$ , а вместо предположения  $0 < v_0 \leq v(t) \leq v_1$ ,  $t_0 \leq t \leq T$ , наложим ограничение  $v(t_0) > w_0(T-t_0)$ . Из приведенных в разд. 2 рассуждений следует, что при любом  $w(t) \in D$  существует решение системы дифференциальных уравнений (2.1) на промежутке  $[t_0, T]$ .

Переменная  $r(t)$  вдоль решения системы (2.1) убывает, поэтому функционал  $I(w) = -r(T)$  ограничен снизу:  $I(w) \geq -r(t_0)$ . Существует минимизирующая последовательность допустимых управлений  $w_i(t) \in D : I(w_i) > I(w_{i+1}), I(w_i) \rightarrow \inf_{w \in D} I(w)$  при  $i \rightarrow \infty$ . Известно [4], что шар  $D$  компактен в \*-слабой топологии пространства  $L_\infty([t_0, T])$ , которое является сопряженным к пространству  $L_1([t_0, T])$ . Следовательно, существуют такие подпоследовательность  $w_{i_k}$  и функция  $w_* \in D$ , что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^T g(s) w_{i_k}(s) ds = \int_{t_0}^T g(s) w_*(s) ds \quad \forall g \in L_1([t_0, T]) \quad (4.7)$$

Обозначим через  $y_k(t) = (x_k(t), r_k(t), v_k(t))$  решение системы (2.1), соответствующее управлению  $w_{i_k}(t)$ . Так как  $0 < r_k(t) < r(t_0)$ ,  $0 < x_k(t) < 1$ ,  $v(t_0) - w_0(T-t_0) \leq v_k(t) \leq$

$\leq v(t_0) + w_0(T-t_0)$  при всех  $k$ , то последовательность функций  $y_k(t)$  равномерно ограничена на  $[t_0, T]$ . Можно убедиться, что она равномерно непрерывна.

Для этого достаточно доказать равномерную ограниченность правой части системы на траекториях  $y_k(t)$ .

Переменные  $r(t), x(t)$  связаны соотношением  $r(t)(1-x^2(t))^{1/2} = d(t)$ , а величина  $d$  удовлетворяет уравнению (1.2). Следовательно, при любом  $k$

$$r_k(T)(1-x_k^2(T))^{1/2} = r(t_0)(1-x^2(t_0))^{1/2} \exp(-\alpha(T-t_0)) \quad (4.8)$$

Отметим, что правая часть равенства (4.8) – постоянная величина, зависящая только от начального положения системы. Последовательность  $I(w_k) = -r_k(T)$  убывает по  $k$ , а функция  $r_k(t)$  убывает по  $t$ , поэтому

$$0 < r_1(T) \leq r_k(T) \leq r_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, \quad t_0 \leq t \leq T \quad (4.9)$$

Отсюда и из (4.8) получаем

$$x_1(T) \leq x_k(T) \quad (4.10)$$

В разд. 2 было показано, что координата  $x(t)$  возрастает, когда  $\psi(t) > 0$ , и убывает, когда  $\psi(t) < 0$ , причем величина  $\psi(t)$  обращается в нуль не более одного раза, меняя знак при этом с плюса на минус. Следовательно, для любой траектории системы (2.1) выполнено неравенство  $\min(x(t_0), x(T)) \leq x(t), t_0 \leq t \leq T$ . Учитывая (4.10), получаем  $0 < \min(x(t_0), x_1(T)) \leq x_k(t), k = 1, 2, \dots, t_0 \leq t \leq T$ . Таким образом, знаменатель  $x_k(t)r_k(t)$  в правой части уравнения для производной  $\dot{x}$  подчиняется ограничению  $0 < r_1(T) \min(x(t_0), x_1(T)) \leq x_k(t)r_k(t), k = 1, 2, \dots, t_0 \leq t \leq T$ . Следовательно, правая часть системы (2.1) на траекториях  $y_k(t)$  равномерно ограничена по  $k, t$ , а последовательность функций  $y_k(t)$  равномерно непрерывна.

По теореме Арцела существует подпоследовательность  $y_{k_j}(t)$ , равномерно сходящаяся к некоторой функции  $y_*(t)$ . Убедимся, что функция  $y_*(t)$  – решение системы (2.1) с управлением  $w_*(t)$ . Представим систему (2.1) с управлением  $w_k(t)$  в виде

$$y_k(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(y_k(\tau))d\tau + \int_{t_0}^t w_k(\tau)d\tau$$

где через вектор-функцию  $f(y)$  обозначена правая часть системы без управления. Видно, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(y_k(\tau))d\tau = \int_{t_0}^t f(y_*(\tau))d\tau$$

Равенство

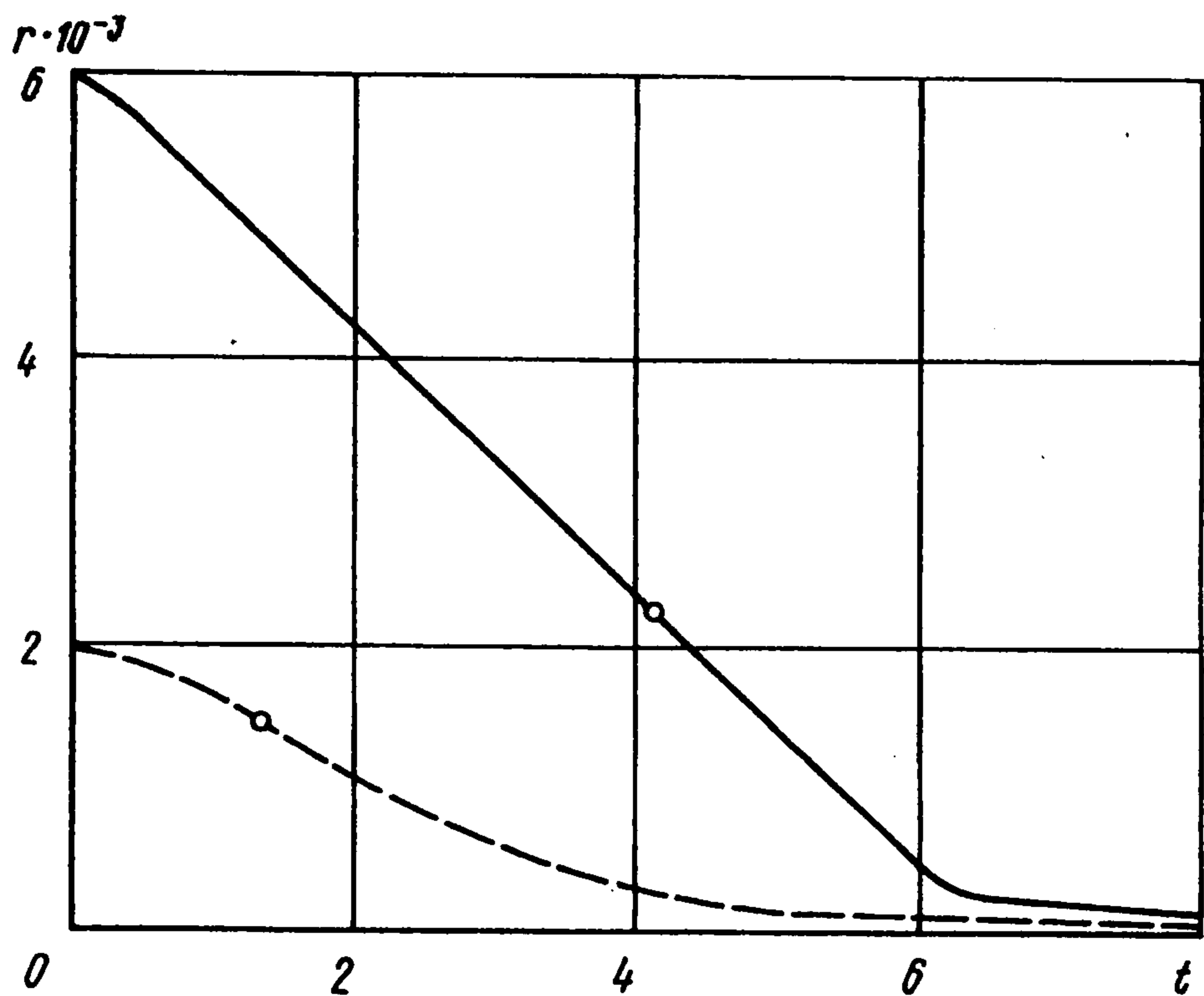
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t w_k(\tau)d\tau = \int_{t_0}^t w_*(\tau)d\tau$$

следует из равенства (4.7), в котором нужно положить

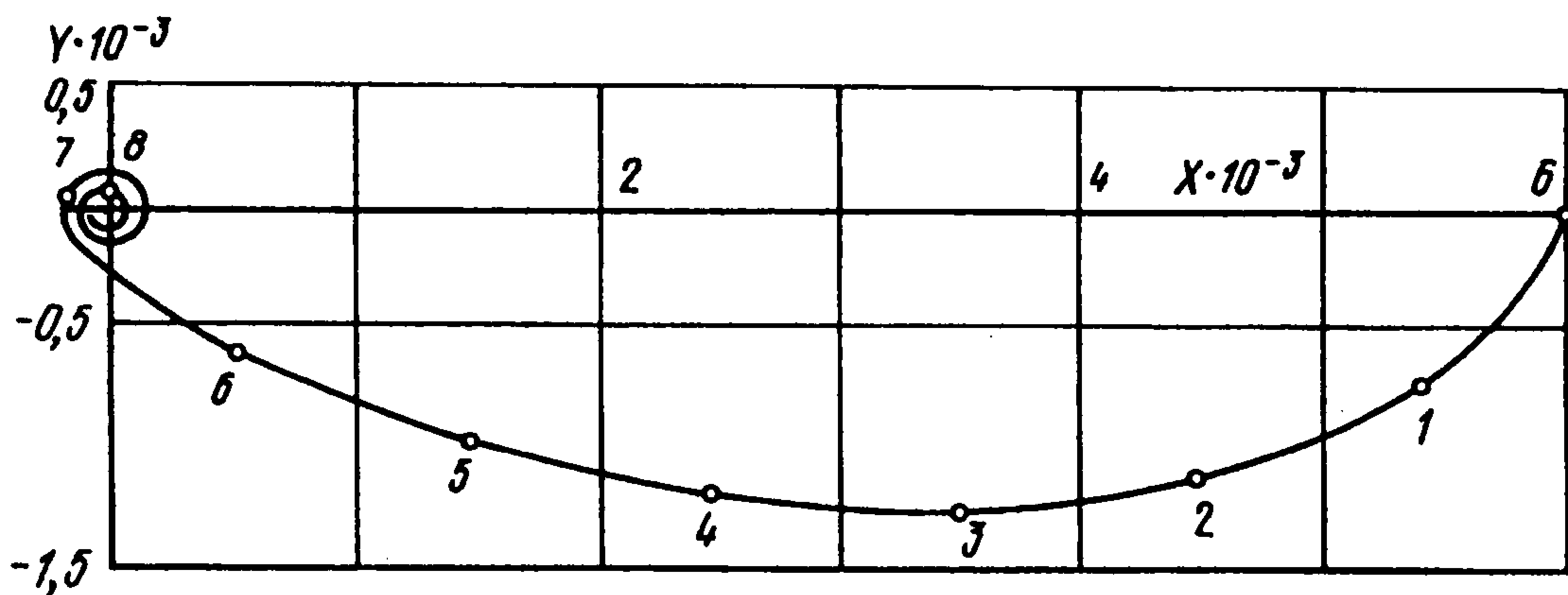
$$g(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } t_0 \leq \tau \leq t \\ 0, & \text{если } t < \tau \leq T \end{cases}$$

Таким образом, функция  $y_*(t)$  – решение системы (2.1) с управлением  $w_*(t)$ . Так как  $\{w_i\}$  – минимизирующая последовательность, то  $y_*, w_*$  – оптимальный процесс, т.е.  $I(w_*) = \inf_{w \in D} I(w)$ .

Итак, на множестве  $D$  рассматриваемая задача оптимального управления имеет решение. Оптимальное управление единственно, так как однозначно определяется из



Фиг. 4



Фиг 5

принципа максимума – необходимого условия оптимальности – и имеет вид  $w_*(t) = -w_0$  почти всюду на  $[t_0, T]$ . Видно, что функция  $w_*(t) = -w_0$  является единственным оптимальным управлением и в классе кусочно-непрерывных функций.

**5. Результаты расчетов.** На фиг. 2, 4, 5 представлены результаты расчетов для частного случая  $W = 0$ . Уравнения (1.6) и система (3.2) интегрировались численно методом Рунге – Кутты при следующих значениях параметров:  $\alpha = 0,5$ ,  $\nu = 1000$ . Сплошные линии соответствуют траектории, выходящей из точки  $r = (6000, 0, 0)$ ,  $\dot{r} = (-300, -954, 0)$  фазового пространства  $r, \dot{r}$ , а штриховые – траектории, выходящей из точки  $r = (2000, 0, 0)$ ,  $\dot{r} = (-100, -995, 0)$ . Здесь  $r$  – радиус-вектор, описывающий положение объекта в инерциальной системе координат, в начале которой расположена цель. Для системы (3.2) в фазовых переменных  $x, r$  соответствующие начальные условия имеют вид  $r = 6000, x = 0,3$  и  $r = 2000, x = 0,1$ .

На фиг 2 изображены траектории системы (3.2) в фазовом пространстве  $x, r$ , а на фиг. 4 – графики зависимости от времени расстояния между объектом и целью; точками отмечены моменты пересечения траекторий с прямой  $\alpha r = \nu x$ . На фиг. 5 представлен начальный отрезок траектории движения объекта в плоскости  $OXY$  инерциальной системы координат; точками отмечены положения, которые занимал объект в указанные моменты времени.

Авторы благодарят А.И. Овсевича за обсуждения.  
Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-013-16286) и Международного научного фонда (M4F000).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кочетков В.Т., Половко А.М., Пономарев В.И. Теория систем телеуправления и самонаведения ракет. М.: Наука, 1964. 536 с.
2. Гуткин Л.С., Борисов Ю.П., Валувев А.А. Радиоуправление реактивными снарядами и космическими аппаратами. М.: Сов. Радио, 1968. 640 с.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 544 с.

Москва

Поступила в редакцию  
13.V.1993