УДК 531.36: 62–50

© 1995 г. А.М. Ковалев

КРИТЕРИЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СТАБИЛИЗИРУЕМОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Получены необходимые и достаточные условия управляемости нелинейных динамических систем, сводящиеся к проверке существования решений уравнений в частных производных типа уравнений Ляпунова в теории устойчивости и Леви–Чивиты в теории инвариантных многообразий. Это определило удобство их использования в задачах стабилизации и позволило доказать общую теорему о связи свойства управляемости и стабилизируемости, распространяющую на нелинейный случай известную теорему для линейных систем. Результаты применены к исследованию задачи об управлении и стабилизации вращательного движения твердого тела одним реактивным двигателем.

1. Критерий управляемости. Изучаются системы управления, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = f(x,u) \tag{1.1}$$

где x – фазовый вектор, u – вектор управления. Система (1.1) рассматривается на промежутке времени $T = [0, \infty)$ в области D, которую будем считать связным n-мерным C^r-многообразием ($r \geqslant 2$). Допустимыми управлениями являются ограниченные измеримые функции времени $u = u(t)$, принимающие значения в некотором множестве $U \subseteq R^m$, их множество обозначим через Ω. Будем также полагать, что функция $f(x, u)$ $(r-1)$ раз непрерывно дифференцируема по x, u на $D \times \overline{U}$.

Критерий управляемости сформулируем в терминах ориентированных относительно системы многообразий, вводимых следующим определением [1].

Определение 1. Многообразие $K \subset D$ будем называть ориентированным относительно системы (1.1) в области D, если оно совпадает со своей положительной ($K = \mathrm{Or}^+K$) или отрицательной орбитой ($K = \mathrm{Or}^-K$). Положительной орбитой Or^+K множества K называется совокупность точек, достижимых из множества K по траекториям системы (1.1), отрицательной орбитой Or^-K – совокупность точек, из которых может быть достигнуто множество K.

Исследование ориентированных многообразий опирается на свойства орбит, которые во многом определяются свойствами траекторий. Сформулируем необходимые для дальнейшего анализа свойства траекторий системы (1.1). Пусть $u = u(t) \in \Omega$ и функция $x\ (t, x_0, u)$ – решение задачи Коши для системы (1.1) с начальным условием $x(0) = x_0$ и управлением $u(t)$. Рассмотрим преобразование $F_u^t : D \to D$, действующее по правилу $F_u^t : x_0 \to x(t, x_0, u)$.

Можно показать, что F_u^t – диффеоморфизм класса C_u^{r-1} (свойство А).

Для изучения многих вопросов теории управления достаточно рассмотрения более узкого множества допустимых управлений, вводимого следующим образом. Пусть V – счетное всюду плотное подмножество множества U. Обозначим через H множество кусочно-постоянных управлений, принимающих значения в V и имеющих переключения в рациональные моменты времени. Очевидно, $H \subset \Omega$. Можно показать, что H – счетное множество.

Следующая лемма устанавливает важное для исследования ориентированных множеств свойство траекторий системы (1.1), когда допустимыми управлениями являются функции из множества H.

Лемма 1. Пусть $\sup\limits_{u \in U, x \in D} \|f(x,u)\| \leqslant 1$ и $x_1 = F_u^{t_1} x_0$.

Тогда для произвольной окрестности O точки x_0 найдутся $y \in O$, $h \in H$, такие, что $F_h^{t_1} y = x_1$.

Теорема 1. Система (1.1) управляема тогда и только тогда, когда отсутствуют ориентированные относительно системы многообразия N с гладкой границей, такие, что $N \neq \varnothing, D$.

Необходимость доказывается рассуждением от противного с использованием определения свойства управляемости в терминах орбит, сводящегося к тому, что $\forall x \in D \;\; Or^{+} x = D$.

Доказательство достаточности проведем в два этапа рассуждением от противного. Предположим, что вопреки утверждению теоремы система (1.1) неуправляема, и покажем сначала, что это приводит к существованию в области D ориентированного многообразия. Затем докажем существование ориентированного многообразия с гладкой границей, что и заканчивает доказательство теоремы.

В силу предположения о неуправляемости системы в области D существует точка x такая, что $\mathrm{Or}^{+} x \neq D$. Из подмножеств $\mathrm{Or}^{+} x$ выбираем некоторое множество γ_0, являющееся C^{r-1}-подмногообразием D без края максимальной размерности p. Такое множество существует, так как множество подмножеств $\mathrm{Or}^{+} x$, являющихся C^{r-1}-подмногобразиями D, не пусто, поскольку содержит, например, дуги траекторий системы (1.1), соответствующие $u = \mathrm{const}$. Если $p = 0$, то $\mathrm{Or}^{+} x = \{x\}$ – 0-мерное многообразие, ориентированное относительно системы (1.1), и теорема доказана.

В дальнейшем считаем $0 < p \leqslant n$. Отметим, что в силу свойства A множества $F_u^t \gamma_0$ для $t \geqslant 0$, $u \in \Omega$ являются p-мерными C^{r-1}-многообразиями без края.

Обозначим через B_0 счетную базу топологии, индуцированной в γ_0 из D, Q^{+} – множество рациональных чисел полуоси $[0, \infty)$. Рассмотрим множество $B = \{F_h^t\, b_0\colon b_0 \in B_0, h \in H, t \in Q^{+}\}$. Множество B счетно, так как изоморфно счетному множеству $B_0 \times Q^{+} \times H$.

Можно показать, что B – счетная база некоторой топологии в множестве $\mathrm{Or}^{+}\gamma_0$, причем эта топология хаусдорфова.

Сначала установим, что $\mathrm{Or}^{+}\gamma_0 = \bigcup\limits_{b \in B} b$. Пусть $y_1 \in \mathrm{Or}^{+}\gamma_0$ и $u_1 \in \Omega$, $t_1 \geqslant 0$, $y_0 \in \gamma_0$ такие, что $y_1 = F_{u_1}^{t_1} y_0$. В силу леммы 1 существуют окрестности $0 \subset \gamma_0$, $z_0 \in 0$, $h \in H$ такие, что $y_1 = F_h^{t_1} z_0$. Но тогда в силу плотности Q^{+} в $[0, \infty)$ и абсолютной непрерывности интеграла Лебега найдется $b \in B$, такое, что $y_1 \in b$. Таким образом, $\mathrm{Or}^{+}\gamma_0 \subset \bigcup\limits_{b \in B} b$. Обратное включение следует из определения множества B.

Остается доказать, что пересечение любых двух множеств из B является объединением некоторых множеств из B, для чего покажем, что $\forall y \in \beta = b_1 \cap b_2$ $(b_1, b_2 \in B,\ \beta \neq \varnothing)$ $\exists b_3 \in B$: $y \in b_3 \subset \beta$. Представим b_1, b_2 в виде $b_i = F_{h_i}^{t_i} b_0^i\,(i = 1,2), t_i \in Q^{+}$, $h_i \in H$, $b_0^i \in B_0$. В силу свойства A $\beta_0 = (F_{h_1}^{t_1})^{-1}\beta$ – открытое подмножество γ_0, и $y_0 = (F_{h_1}^{t_1})^{-1} y \in \beta_0 \subset b_0^1$. Поскольку B_0 – база топологии γ_0, то найдется $b_0^3 \in B_0$, такое, что $y_0 \in b_0^3 \subset \beta_0$, но тогда $y \in b_3 = F_{h_1}^{t_1} b_0^3 \subset \beta$. Итак, множество B – счетная база некоторой топологии в множестве $\mathrm{Or}^+\gamma_0$.

Покажем, что эта топология хаусдорфова. Действительно, пусть $y_1, y_2 \in \mathrm{Or}^+\gamma_0$ ($y_1 \neq y_2$) и $y_i \in b_i \in B$. Так как D – хаусдорфово пространство, то существуют окрестности O_1, O_2 точек y_1, y_2 такие, что $O_1 \cap O_2 = \varnothing$. Рассмотрим множества $O_i \cap b_i$. Это открытые множества в топологии, задаваемой на $\mathrm{Or}^+\gamma_0$ базой B. Значит, существуют $\beta_i \in B$: $y_i \in \beta_i \subset \subset O_i \cap b_i$. Тогда, очевидно, $\beta_1 \cap \beta_2 \subset O_1 \cap O_2 = \varnothing$.

В качестве B_0 возьмем координатные окрестности некоторого атласа $A_0 = \{(b_0, g_0)\}$ C^{r-1}-многообразия γ_0. Тогда совокупность $A = \left\{\left(F_h^t b_0, g_0\left(F_h^t\right)^{-1}\right):\right.$ $\left.(b_0, q_0) \in A_0, h \in H, t \in Q^+\right\}$ является C^{r-1}-атласом на $\mathrm{Or}^+\gamma_0$. Для этого достаточно проверить только согласованность карт атласа A.

Пусть $b_i = F_{h_i}^{t_i} b_0^i$, $g_i = g_0^i (F_{h_i}^{t_i})^{-1}$, $(b_i, g_i) \in A$ $(i = 1,2)$, $b_1 \cap b_2 \neq \varnothing$. Множество $b_1 \cap b_2$ является p-мерным подмногообразием D. Отображение перехода $\Phi: R^p \to R^p$ определим по правилу $\Phi_y = g_0^1\left(F_{h_1}^{t_1}\right)^{-1} F_{h_2}^{t_2} (g_0^2)^{-1} y$, $y \in R^p$. В силу свойства A отображение Φ есть C^{r-1}-диффеоморфизм. Очевидно, что отображение $\mathrm{id}: \mathrm{Or}^+\gamma_0 \to D$ является погружением $\mathrm{Or}^+\gamma_0$ в D, и множество $\mathrm{Or}^+\gamma_0$ – ориентированное многообразие системы (1.1).

Используем многообразие $\mathrm{Or}^+\gamma_0$ для построения ориентированного многообразия N с гладкой границей. Предварительно заметим, что множества U, $V_x = \{f(x,u): u \in U\}$ можно считать компактными. Если это не имеет места для исходной системы (1.1), то можно перейти к эквивалентной ей с точки зрения управляемости системе $\dot{x} = \varphi(x,u)$, $\varphi(x,u) = f(x,u)(1 + f^2(x,u))^{-1/2}$, с ограниченным множеством V_x', замкнув которое, получим компактное множество V_x. Перейдя, при необходимости на множестве V_x к новым параметрам (вместо u), получим компактное ограничивающее множество $U(x)$, которое будет, вообще говоря, зависеть от точки x.

Будем различать два случая, когда $\mathrm{Or}^+\gamma_0$ – многообразие без края и с краем. В первом случае его размерность не больше $n - 1$, и все его точки – граничные, т.е. граница является многообразием, что и доказывает теорему. Во втором случае существует граничная точка $\bar{x} \in \mathrm{Or}^+\gamma_0$ такая, что множество $\mathrm{Or}^+\gamma_0$ расположено в некоторой окрестности точки $\bar{x}$ по одну сторону от плоскости Π, проходящей через эту точку (если такой точки нет, то вместо $\mathrm{Or}^+\gamma_0$ рассмотрим $\mathrm{Or}^-\gamma_0$). Рассмотрим шар B_s, ограниченный сферой $S_0 \subset \mathrm{Or}^+\gamma_0$ достаточно малого радиуса, проходящей через точку $\bar{x}$ и касающейся плоскости Π. Если точка $\bar{x}$ – угловая, то рассмотрим достаточно близкую к ней точку $x_0 \in \mathrm{Or}^+\gamma_0$ и проходящую через нее сферу S_0 такую, что все векторы $f(x_0, u)$ направлены в одну сторону (определяемую центром сферы) от касательной плоскости к сфере S_0 в точке x_0. Докажем, что граница $\mathrm{Or}^+ B_s$ ($\mathrm{Or}^- B_s$, если $\mathrm{Or}^+\gamma_0$ локально вогнуто в точке $\bar{x}$) является многообразием.

При заданном выборе сферы S_0 граница $\mathrm{Or}^+ B_s$, являясь, вообще говоря, многосвязной, будет образом при преобразовании F_u^t нескольких кусков сферы S_0. На примере куска δ_0, содержащего точку x_0(или $\bar{x}$), покажем, что связные компоненты границы $\mathrm{Or}^+ B_s$ являются многообразиями. Множество δ_0 – либо многообразие, либо совпадает с точкой x_0. В последнем случае вместо сферы S_0 выберем срезанную плоскостью Π сферу, сглаженную в точках ее пересечения с плоскостью Π. Тогда рассматриваемая компонента границы $\mathrm{Or}^+ B_s$ будет также образом многообразия, которое по-прежнему обозначим δ_0.

Отметим следующее свойство граничных точек: их прообразы являются также граничными точками. Это следует из того, что в силу непрерывной зависимости решения от начальных данных и параметра образ (при преобразовании F_u^t) внутренней точки является внутренней точкой Or^+B_s. Пользуясь свойством компактности множеств U, V_x, оставим в точках границы только те векторы $f(x,u)$, $u \in U'$, которые переводят граничные точки в граничные. Рассматривая систему $\dot{x} = f(x,u)$, $u \in U'$, $x(0) \in \delta_0$, получаем, что изучаемая компонента связности границы множества Or^+B_s является орбитой многообразия δ_0 для данной системы и по ранее доказанному, как и $\mathrm{Or}^+\gamma_0$, является многообразием. Теорема доказана.

2. Уравнения ориентированных многообразий. Условие ориентированности означает, что $\forall u \in U$ векторы скорости $f(x,u)$ в точках границы направлены во внешность многообразия, если $K = \mathrm{Or}^- K$, либо во внутренность, если $K = \mathrm{Or}^+K$. Пусть размерность многообразия равна s и его гранца локально определяется уравнениями $V_i(x) = 0$ ($V_i \in R^1$), а касательная плоскость в точке x_0 – уравнениями $(x - x_0, \nabla V_i(x_0)) = 0$ ($i = 1,\ldots, n-s$). Внутренность определяется одним из векторов $\nabla V_i(x_0)$, пусть это будет $\nabla V_1(x_0)$; при этом должны выполняться равенства $V_2(x) = 0,\ldots, V_{n-s}(x) = 0$. Тогда из условия ориентированности следует $\forall u \in U$ $(f(x_0,u), \nabla V_1(x_0) \geqslant 0 (f(x_0,u), \nabla V_i(x_0)) = 0$ $(i = 2,\ldots,n-s)$, либо $(f(x_0,u), \nabla V_i(x_0)) \leqslant 0$, $(f(x_0,u), \nabla V_i(x_0)) = 0$. Эти соотношения можно записать в виде системы равенств, если в области $D \times U$ ввести знакопостоянную $G(x,u)$ и непрерывные функции $\lambda_{ij}(x,u)$ $i,j = 1,\ldots, n-s$ (ввиду произвольности точки x_0 индекс опускаем)

$$\begin{gathered}(f(x,u), \nabla V_i(x)) = \sum_{j=1}^{n-s} \lambda_{ij}(x,u) V_j(x) + G_i(x,u) \quad \forall u \in U \\ G_1(x,u) = G(x,u), \;\; G_2 = \ldots = G_{n-s} = 0; \;\; i = 1,\ldots,n-s.\end{gathered} \tag{2.1}$$

Данные уравнения получены как следствие существования у системы (1.1) ориентированного многообразия. В свою очередь, если можно указать знакопостоянную функцию $G(x,u)$ и непрерывные функции $\lambda_{ij}(x,u)$, такие, что система уравнений (2.1) имеет решение $V_1(x),\ldots,V_{n-s}(x)$, то система (1.1) имеет ориентированное многообразие, граница которого определяется уравнениями $V_i(x) = 0$ ($i = 1,\ldots, n-s$). Уравнения (2.1), очевидно, удовлетворяются для функции $V_k(x) \equiv 0$, если положить $\lambda_{kj}(x,u) \equiv 0$, $G_k(x,u) \equiv 0$. Поэтому можно охватить сразу все случаи, если систему (2.1) рассмотреть для $s = 1$. Ориентированные многообразия неполной размерности ($\dim K = s < n$) соответствуют случаю обращения в нуль определенного числа функций $V_i(x)$. С учетом этого из теоремы 1 получаем теорему.

Теорема 2. Система (1.1) управляема тогда и только тогда, когда система уравнений (2.1) для $s = 1$ не имеет в области D решений $V_1(x),\ldots, V_{n-1}(x)$, определяемых знакопеременными функциями, для любых непрерывных функций $\lambda_{ij}(x,u)$ и знакопостоянных функций $G(x,u)$.

Теорема 2 сводит решение вопроса об управляемости системы (1.1) к изучению существования решения системы дифференциальных уравнений (2.1). Последняя задача осложняется тем, что данные уравнения содержат управляющий параметр u, который может принимать любые значения из множества U. Эту трудность можно преодолеть при помощи приема, аналогичного введению базисных систем [2] при построении инвариантных многообразий, суть которого состоит в том, что в каждой точке $x \in D$ вектор $f(x,u)$ представляется в виде линейной комбинации векторных полей $f_1(x),\ldots,f_k(x)$:

$$\begin{gathered} f(x,u)=\alpha_1(x,u)f_1(x)+\ldots+\alpha_l(x,u)f_l(x)+ \\ +\alpha_{l+1}(x,u)f_{l+1}(x)+\ldots+\alpha_k(x,u)f_k(x) \quad \forall(x,u)\in D\times U \end{gathered} \tag{2.2}$$

где $\alpha_{l+1}(x,u) \geqslant 0,\ldots, \alpha_k(x,u) \geqslant 0$, а коэффициенты $\alpha_1(x,u),\ldots,\alpha_l(x,u)$ принимают как положительные, так и отрицательные значения. Функции $\alpha_i(x,u), f_i(x)$ $(i = 1,\ldots,k)$ сохраняют дифференциальные свойства функции $f(x,u)$.

Теорема 3. Пусть система (1.1) управляема, тогда система уравнений

$$\left(f_i(x),\nabla V_j(x)\right)=\sum_{\beta=1}^{n-1}\lambda_{ij\beta}(x)V_\beta(x)+G_{ij}(x) \tag{2.3}$$

$(i = 1,\ldots, k; j = 1,\ldots, n-1)$

где $G_{\beta l} = G_\beta(x)$ $(\beta = l + 1,\ldots, k)$ и $G_{\alpha\beta} = 0$ для остальных значений индексов, не имеет в области D решений $V_1(x),\ldots, V_{n-1}(x)$, определенных знакопеременными функциями, для любых непрерывных функий $\lambda_{ij\beta}(x)$ и знакопостоянных функций $G_\beta(x)$.

Доказательство проведем рассуждением от противного. Пусть существует решение $V_1(x),\ldots,V_{n-1}(x)$ системы (2.3) для непрерывных функций $\lambda_{ij\beta}(x)$ и знакопостоянных функций $G_\beta(x)$. Тогда это решение будет и решением системы (2.1) с непрерывными функциями $\lambda_{ij}(x,u) = \sum\limits_{\beta=1}^{k}\alpha_\beta(x,u)\lambda_{ij\beta}(x)$ и знакопостоянной функцией $G(x,u) = \sum\limits_{i=l+1}^{k}\alpha_i(x,u)G_i(x)$ и по теореме 2 система (1.1) неуправляема, что противоречит утверждению данной теоремы.

Для получения достаточных условий требуется провести исследованине коэффициентов $\alpha_i(x,u)$ при $(x,u) \in D \times U$ и изучить их влияние на поведение траекторий системы (1.1).

3 Локальная управляемость. В локальной постановке в качестве области D рассматривается некоторая окрестность нуля D_0 и предполагается, что область U содержит точку $u = 0$, а функция $f(x,u)$ такова, что $f(0,0) = 0$. Свойство локальной управляемости понимается в следующем смысле.

Определение 2. Система (1.1) локально управляема (в окрестности нуля), если существует окрестность нуля $D_{01} \subset D_0$, такая, что $\forall x_0, x_1 \in D_{01}$ существует момент $t_1 \in T$ и допустимое управление $u(t)$ такое, что соответствующее ему решение $x(t)$ системы (1.1) удовлетворяет условиям $x(0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, $x(t) \in D_0$ при $0 \leqslant t \leqslant t_1$.

При исследовании локальной управляемости с помощью теоремы 3 оказываются удобными методы, разработанные в теории устойчивости. Как принято в теории устойчивости, функцию называем знакопостоянной или знакопеременной, если существует окрестность нуля, в которой она соответственно сохраняет знак или принимает значения разных знаков. С учетом определения 2 заключаем, что к неуправляемости (в локальном смысле) ведет лишь существование ориентированных многообразий, проходящих через начало координат, т.е. функции $V_1(x), \ldots, V_{n-1}(x)$, определяющие их границу, должны быть знакопеременными. Теорема 3 может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 4. Пусть система (1.1) локально управляема, тогда не существует знакопеременных функций $V_1(x),\ldots, V_{n-1}(x)$, являющихся решением системы (2.3) для непрерывных функций $\lambda_{ij\beta}(x)$ и знакопостоянных функций $G_\beta(x)$.

Для исследования вопроса о существовании решений системы (2.3) разложим в ряды в окрестности нуля функции $f_i(x)$, а функции $\lambda_{ij\beta}(x)$ и решения $V_\beta(x)$ представим рядами с неопределенными коэффициентами. После их подстановки в систему (2.3) получим уравнения относительно неопределенных коэффициентов из уравнений (2.3), в которых $G_{\alpha\beta} = 0$. Оставшиеся уравнения (2.3) определят знакопостоянные функции $G_\beta(x)$. К полученным уравнениям надо добавить условия знакопостоянства функций G_β, что и составит полную систему соотношений, анализ которой решает вопрос о существовании функций $V_1(x),\dots, V_{n-1}(x)$. Дополнительную информацию о неопределенных коэффициентах дает процедура пополнения полученной системы скобками Якоби от уравнений (2.3). Как и в теории устойчивости, во многих случаях для решения вопроса о локальной управляемости достаточно рассмотреть разложения до второго порядка малости.

4. Стабилизируемость нелинейных систем. При рассмотрении задач стабилизации уравнения (1.1) понимаются как уравнения возмущенного движения и сохраняются предположения относительно D, U, $f(x,u)$, принятые при решении вопроса о локальной управляемости. Задача стабилизации ставится как задача нахождения управления $u = u(x(t))$, обеспечивающего асимптотическую устойчивость нулевого решения системы $\dot{x} = f(x,u(x))$. Если такое управление существует, то система (1.1) называется стабилизируемой. Отметим, что управление ищется в виде функции $u(x(t))$, а не в более общем виде $u(x(t),t)$, чтобы можно было использовать хорошо разработанный аппарат теории управления и устойчивости автономных систем. Относительно допустимых управлений полагаем [3], что функции $u(x)$ непрерывно-дифференцируемы и $u(0) = 0$.

Для доказательства теоремы о стабилизируемости требуется следующий вспомогательный результат.

Лемма 2. Система (2.1) не имеет решения $V_i(x)$ ($i = 1,\dots, n-s$), выраженного знакопеременными функциями, $\forall u \in U$ тогда и только тогда, когда такого решения не существует для некоторого допустимого управления $u(x)$.

Достаточность очевидна. Необходимость докажем рассуждением от противного. Пусть для всякого допустимого управления $u(x)$ можно указать непрерывные функции $\lambda^u_{ij}(x)$ и положительнопостоянную функцию $G^u(x)$ такие, что знакопеременные функции $V^u_i(x)$ ($i = 1,\dots, n-s$) являются решением системы

$$\begin{gathered}(f(x,u(x)),\nabla V^u_i(x)) = \sum_{j=1}^{n-s} \lambda^u_{ij}(x)V^u_j(x)+G^u_i(x) \\ G^u_1(x)=G^u(x),\ G_2=\ldots=G_{n-s}=0,\ i=1,\ldots,n-s\end{gathered} \tag{4.1}$$

Тогда для произвольно выбранного допустимого управления $u(x)$ существует функция $V(x)$, которая определяет решение $V_1 = V(x)$, $V_2 =\ldots=V_{n-1} = 0$ системы (4.1), такое, что для всех x, u из достаточно малой окрестности $D_0 \times U$ точки (0, 0) векторы $f(x,u)$ для $u \in U$ расположены по одну сторону от касательной плоскости к поверхности $V(x) = 0$ в точке $x \in D_0$. Если бы такой поверхности не существовало, то в силу гладкости векторного поля $f(x,u)$ можно было бы выбрать непрерывно-дифференцируемую функцию $u_n(x)$ таким образом, чтобы для $u_n(x)$ не существовало бы поверхности, относительно которой векторы $f(x,u)$ лежали бы по одну сторону, т.е. уравнения (4.1) не имели бы для данного $u_n(x)$ решения. В силу сказанного указанная функция $V(x)$ определяет решение системы (2.1), определенное в некоторой окрестности D_0 для всех $u \in U$, что противоречит условию и доказывает лемму.

Теорема 4 совместно с теоремой Красовского о неустойчивости [4] и теоремой Барбашина–Красовского об асимптотической устойчивости [5] дает возможность доказать следующий результат, имеющий место для линейных систем.

Теорема 5. Если система (1.1) локально управляема, то она стабилизируема.

Доказательство. По теореме 4 в силу локальной управляемости система уравнений (2.1) для любых непрерывных функций $\lambda_{ij}(x,u)$ и знакопостоянных функций $G_i(x,u)$ не имеет решения, выраженного знакопеременными функциями $V_1(x),\dots,V_{n-s}(x)$ $\forall u(x)\in U$. Тогда по лемме 2 существует управление $u=u(x)$ такое, что система уравнений (2.1) при $u=u(x)$ не имеет решения. В частности, для $i=1$ уравнение

$$(f(x,u^{\cdot}(x)),\ \nabla V_1(x))=\lambda(x,u(x))V_1(x)+G(x,u(x))$$

не имеет решения, выражаемого знакопеременной функцией, для любой непрерывной функции $\lambda(x,u(x))$ и знакопостоянной функции $G(x,u(x))$, в том числе и для функций $\lambda(x,u(x))$, таких, что $\lambda>0$. Отсюда на основании теоремы Красовского о неустойчивости [4] заключаем, что нулевое решение не является неустойчивым, т.е. устойчиво. Значит, существует положительно-определенная функция Ляпунова с отрицательно постоянной производной.

По теореме Барбашина–Красовского об асимптотической устойчивости [5] нулевое решение не только устойчиво, но и асимптотически устойчиво, поскольку при выбранном управлении не существует проходящих через нуль целых полутраекторий (в том числе и на множестве обращения в нуль производной функции Ляпунова). Это следует из того, что траектория, проходящая через нуль, определяется равенством нулю знакопеременных функций $V_1(x),\dots,V_{n-1}(x)$, являющихся решением системы (2.1) при $u=u(x)$, $G(x,u(x))=0$ и некоторых непрерывных функций $\lambda_{ij}(x,u(x))$, что по условию теоремы места не имеет. Теорема доказана.

5. Управление вращением твердого тела. Многие вопросы движения твердого тела относительно центра масс под действием реактивной силы изучаются на основе модели абсолютно твердого тела без учета изменения массы. Уравнения движения имеют вид

$$\dot\omega_1=a_1\omega_2\omega_3+\alpha_1 u\quad (1\ 2\ 3) \tag{5.1}$$

где $a_1=(A_2-A_3)/A_1$, $\alpha_1=e_1/A_1$ (1 2 3); A_1, A_2, A_3 – главные центральные моменты инерции тела; $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ – проекции вектора угловой скорости ω на главные центральные оси; $e=(e_1,e_2,e_3)$ – единичный вектор направления момента реактивной силы; u – управление, характеризующее величину реактивного момента.

Исследуем при помощи теорем 3,5 управляемость и стабилизируемость системы (5.1). Для системы (5.1) имеет место очевидное представление $\dot\omega=uf_1(\omega)+f_2(\omega)$, которое используем для получения уравнений (2.3).

Изучение системы (2.3) начнем со случая $V_1=V$, $V_2=0$. Имеем

$$\begin{aligned}&L_1=\alpha_1p_1+\alpha_2p_2+\alpha_3p_3-\lambda_1V=0,\quad p_1=\partial V/\partial\omega_1\quad (1\ 2\ 3)\\&L_2=a_1\omega_2\omega_3p_1+a_2\omega_3\omega_1p_2+a_3\omega_1\omega_2p_3-\lambda_2V-G=0\end{aligned} \tag{5.2}$$

Пополним систему (5.2) уравнением, получающимся обращением в нуль скобки Якоби операторов L_1, L_2, вычисленной при учете равенств $L_1=0, L_2=0$

$$\begin{aligned}&L_3=[L_1,L_2]=a_1(\alpha_2\omega_3+\alpha_3\omega_2)p_1+a_2(\alpha_3\omega_1+\\&+\alpha_1\omega_3)p_2+a_3(\alpha_1\omega_2+\alpha_2\omega_1)p_3-\lambda_3V-G_1=0\end{aligned} \tag{5.3}$$

В уравнениях (5.2), (5.3) $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3, G, G_1$ – функции переменных $\omega_1,\omega_2,\omega_3$. Определитель системы (5.2), (5.3), рассматриваемой как система линейных алгебраических уравнений относительно p_1,p_2,p_3, равен

$$\begin{aligned}&\Delta=\alpha_1a_2a_3(\alpha_2\omega_3-\alpha_3\omega_2)\omega_1^2+\alpha_2a_3a_1(\alpha_3\omega_1-\\&-\alpha_1\omega_3)\omega_2^2+\alpha_3a_1a_2(\alpha_1\omega_2-\alpha_2\omega_1)\omega_3^2\end{aligned} \tag{5.4}$$

Если $\Delta \neq 0$, то решение системы (5.2), (5.3) имеет вид [2] $V = c\exp\psi(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ и не является знакопеременной функцией. Если $\Delta = 0$, то определяемое этим равенством многообразие двумерно, и ориентированного многообразия полной размерности с границей $V = 0$ не существует. Таким образом, условия теоремы 3 для данного случая выполнены.

Перейдем к рассмотрению случая $V_1 = V,\ V_2 = W$. Система (2.3) принимает вид

$$
\begin{aligned}
&L_1 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 - \lambda_1 V - \lambda_{12} W = 0,\ \ p_1 = \partial V / \partial\omega_1 \ \ (1\ 2\ 3) \\
&L_2 = a_1\omega_2\omega_3 p_1 + a_2\omega_3\omega_1 p_2 + a_3\omega_1\omega_2 p_3 - \lambda_{21} V_1 - \lambda_{22} W - G = 0 \\
&L_4 = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \alpha_3 q_3 - \lambda_{41} V - \lambda_{42} W = 0,\ \ q_1 = \partial W / \partial\omega_1 \ \ (1\ 2\ 3) \\
&L_5 = a_1\omega_2\omega_3 q_1 + a_2\omega_3\omega_1 q_2 + a_3\omega_1\omega_2 q_3 - \lambda_{51} V - \lambda_{52} W = 0
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

Пополняя эту систему уравнениями $L_3 = [L_1, L_2] = 0$, $L_6 = [L_4,\ L_5] = 0$ и рассматривая полученную систему $L_i = 0$ ($i = 1,\ldots,6$) как систему линейных алгебраических уравнений относительно p_i, q_i ($i = 1,2,3$), находим, что ее определитель равен Δ^2. Как и ранее, заключаем, что условия теоремы 3 выполнены, если $\Delta \neq 0$. Для завершения анализа остается проверить, содержит ли множество, выделяемое условие $\Delta = 0$, инвариантное многообразие, общее для базисных систем:

$$\dot\omega_1 = \alpha_1,\ \ \dot\omega_2 = \alpha_2,\ \ \dot\omega_3 = \alpha_3 \tag{5.6}$$

$$\dot\omega_1 = a_1\omega_2\omega_3,\ \ \dot\omega_2 = a_2\omega_3\omega_1,\ \ \dot\omega_3 = a_3\omega_1\omega_2 \tag{5.7}$$

Начнем изучение с системы (5.6). Вычислим производные от Δ в силу системы (5.6), предварительно преобразовав определитель (5.4). Находим

$$
\begin{aligned}
&\Delta = \alpha_2\alpha_3\omega_1 n_1 + \alpha_3\alpha_1\omega_2 n_2 + \alpha_1\alpha_2\omega_3 n_3 \\
&\dot\Delta_{(5.6)} = -2(\alpha_1 s_1\omega_2\omega_3 + \alpha_2 s_2\omega_3\omega_1 + \alpha_3 s_3\omega_1\omega_2) \\
&\ddot\Delta_{(5.6)} = 2(\alpha_2\alpha_3 s_1\omega_1 + \alpha_3\alpha_1 s_2\omega_2 + \alpha_1\alpha_2 s_3\omega_3)
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

где $n_1 = a_1(a_3\omega_2^2 - a_2\omega_3^2)$, $s_1 = a_1(a_3\alpha_2^2 - a_2\alpha_3^2)$ (1 2 3).

В соответствии с методом инвариантных соотношений [2] инвариантное многообразие системы (5.6), содержащееся в множестве, выделяемом условием $\Delta = 0$, находится из решения системы уравнений, получаемых приравниванием нулю производных $\dot\Delta_{(5.6)}$ и $\ddot\Delta_{(5.6)}$. Эта система допускает два класса решений

$$\omega_1 = 0 \text{ при } \alpha_1 = 0 \ (1\ 2\ 3) \tag{5.9}$$

$$\alpha_1\omega_3 - \alpha_3\omega_1 = 0 \text{ при } s_2 = 0 \ \ (1\ 2\ 3) \tag{5.10}$$

Для установления этого факта удобно перейти к переменным $x = \omega_2/\omega_1$, $y = \omega_3/\omega_1$. Тогда система примет вид

$$
\begin{aligned}
&\alpha_3\alpha_1 s_2 x + \alpha_1\alpha_2 s_3 y = -\alpha_2\alpha_3 s_1 \\
&\alpha_1 s_1 xy + \alpha_2 s_2 y + \alpha_3 s_3 x = 0 \\
&\alpha_2\alpha_3\tilde n_1 + \alpha_3\alpha_1 x\tilde n_2 + \alpha_1\alpha_2 y\ \ \tilde n_3 = 0
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

где $\tilde n_1 = a_1(a_3x^2 - a_2y)$, $\tilde n_2 = a_2(a_1y^2 - a_3)$, $\tilde n_3 = a_3(a_2 - a_1x^2)$.

Из двух первых уравнений (5.11) находим значения x, y и подставляем в последнее уравнение. При этом следует учесть равенства $s_1 + s_2 + s_3 = 0$, $\tilde n_1 + \tilde n_2 + \tilde n_3 = 0$.

Рассмотрим теперь вопрос о том, допускает ли базисная система (5.7) решения (5.9), (5.10). Подставляя решение (5.9) в уравнения (5.7), получаем, что $\omega_1 = 0$ – инвариантное соотношение системы (5.7) при условии $a_1 = 0$ либо при наличии дополнительного соотношения $\omega_2 = 0$. Для того, чтобы $\omega_2 = 0$ было инвариантным соотношением системы (5.6), необходимо выполнение дополнительного условия $\alpha_2 = 0$, что устанавливается непосредственной подстановкой в (5.6). Для проверки того, что $\varphi = \alpha_1\omega_3 - \alpha_3\omega_1 = 0$ – инвариантное соотношение системы (5.7), при учете $s_2 = 0$ находим $\dot{\varphi}_{(5.7)} = -\alpha_3 a_1 \omega_2 \varphi / \alpha_1 = 0$, т.е. $\varphi = 0$ определяет инвариантное многообразие системы (5.7) без дополнительных ограничений на параметры.

Окончательно заключаем, что множество, выделяемое условием $\Delta = 0$, содержит инвариантное многообразие, общее для базисных систем (5.6), (5.7), при следующих условиях:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \alpha_1 = \alpha_2 = 0\ (1\ 2\ 3)\\
&2)\ \alpha_1 = 0,\ a_1 = 0\ (1\ 2\ 3)\\
&3)\ a_1\alpha_3^2 - a_3\alpha_1^2 = 0\ (1\ 2\ 3)
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

Укажем для каждого из случаев (5.12) решение системы (5.5)

1) $V = \omega_1,\ W = \omega_2\ (G = 0,\ \lambda_{ij} = 0)$

2) $V = \omega_1,\ W = 0\ (G = 0,\ \lambda_{ij} = 0)$

3) $V = \alpha_1\omega_3 - \alpha_3\omega_1,\ W = 0$

$(G = 0,\ \lambda_{ij} = 0$, кроме $\lambda_{21} = -\alpha_3 a_1 \omega_2/\alpha_1)$

Таким образом, если параметры системы (5.1) не удовлетворяют условиям (5.12), то для системы (5.1) выполнены условия теоремы 3, и система (5.1) управляема. Кроме того, на основании теоремы 5 она является и стабилизируемой. При выполнении условий (5.12) система (5.1) неуправляема.

Отметим, что в аналогичной постановке управляемость системы (5.1) рассматривалась ранее [2, 6, 7], при этом в [6] случай динамически симметричного твердого тела был исключен из рассмотрения, как требующий специального исследования. В настоящей работе этот случай не выделяется и анализируется тем же способом, что и случай асимметричного твердого тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковалев А.М.* Ориентированные многообразия и управляемость динамических систем // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 4. С.639–646.
2. *Ковалев А.М.* Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем. Киев: Наук. думка, 1980. 174 с.
3. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 495 с.
4. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
5. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. 240 с.
6. *Аграчев А.А., Сарычев А.В.* Управление вращением асимметричного твердого тела // Проблемы управления и теории информации. 1983. Т. 12. № 5. С. 335–347.
7. *Акуленко Л.Д.* Стабилизация КА минимальным числом импульсов // Космич. исследования. 1988. Т. 26. Вып. 2. С. 227–235.

Донецк

Поступила в редакцию
26.XI. 1993