УДК 531.36:62-50

© 1995 г. А.И. Калинин, Ф.М. Кириллова

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАЗНОМОЩНЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

Рассматривается терминальная задача оптимального управления (*ОУ*) линейной системой с постоянными коэффициентами с двумя управлениями, значительно различающимися по степени воздействия на систему. В первом разделе на основе разработанных авторами методов оптимизации базовых задач строится решение для систем с малым возмущением по управлению (слабые управления). Во втором разделе рассматривается система с большим коэффициентом при управлении (мощные управления), решение которой также основано на решении базовой задачи.

Излагаемые ниже алгоритмы асимптотического решения задач оптимизации динамических систем с разномощными управляющими воздействиями следуют классической схеме метода возмущений. Их суть состоит в сведении исходной задачи к более простой, базовой и в сравнительно несложной коррекции решения последней. Другие типы задач *ОУ* эффективно решаемые используемым ниже методом, приведены в [1–6].

I. Система со слабым управлением. В классе кусочно-непрерывных управляющих воздействий $u(t)$, $\upsilon(t)$, $t \in T = [0, t_*]$, рассмотрим следующую задачу оптимального управления (*ОУ*) линейной стационарной системой:

$$J(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{c}'\mathbf{x}(t_*) \to \max \tag{1.1}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}_1 u + \mu \mathbf{b}_2 \upsilon, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0 \tag{1.2}$$

$$|u(t)| \leq 1, \quad |\upsilon(t)| \leq 1, \quad t \in T \tag{1.3}$$

$$\mathbf{H}\mathbf{x}(t_*) = \mathbf{g}, \tag{1.4}$$

где μ – малый положительный параметр, u, υ – скаляры, $\mathbf{x}$ – n-вектор, $\mathbf{g}$ – m-вектор ($\mathbf{m} < \mathbf{n}$), а остальные элементы задачи имеют соответствующие размеры. Предполагается, что rank $\mathbf{H} = m$.

Кусочно-непрерывные функции $\mathbf{u}(\mathbf{t}, \mu)$, $\mathbf{v}(\mathbf{t}, \mu)$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$ назовем допустимым управлением в рассмотренной задаче, если для них и порожденной ими траектории системы (1.2) выполнены условия (1.3), (1.4). Допустимое управление, на котором критерий качества $\mathbf{J}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ принимает максимальное значение, называется *ОУ*. Наряду с этими общеупотребительными понятиями определим, что будет пониматься под асимптотическими приближениями к решению поставленной задачи.

Определения. Семейство кусочно-непрерывных функций $\mathbf{u}(\mathbf{t}, \mu)$, $\mathbf{v}(\mathbf{t}, \mu)$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, $\mu \to 0$, назовем асимптотически k-допустимым управлением, если для них выполнены условия (1.3), а для порожденных ими траекторий $\mathbf{x}(\mathbf{t}, \mu)$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, системы (1.2) терминальное ограничение (1.4) имеет место с точностью до $O(\mu^{k+1})$. Допустимое (асимптотически k-допустимое) управление назовем асимптотически s-оптимальным, если оно отклоняется по критерию качества от оптимального управления на величину $O(\mu^{s+1})$.

В настоящем разделе предлагается алгоритм, позволяющий для заданного натурального числа s построить асимптотически s-допустимое s-оптимальное управление в рассмотренной задаче. Кроме того, описывается вычислительная процедура, использующая полученные асимптотические приближения для точного решения задачи (1.1)–(1.4) при заданном значении малого параметра.

Первый этап алгоритма состоит в решении следующей задачи терминального управления:

$$J_0(u) = \mathbf{c}'\mathbf{x}(t_*) \to \max, \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}_1\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$$

$$|\mathbf{u}(\mathbf{t})| \leqslant 1, \quad \mathbf{t} \in \mathbf{T}, \quad \mathbf{H}\mathbf{x}(t_*) = \mathbf{g} \tag{1.5}$$

которую в дальнейшем будем называть базовой.

Предположение 1.1. Задача (1.5) имеет решение и является "простой" [7].

Тогда, применяя для ее решения прямой опорный метод [1], получим следующее:

1) *ОУ* и траекторию $u^0(t)$, $\mathbf{x}^0(t)$, $t \in T$;

2) оптимальную опору $\{\eta_1, ..., \eta_m\}$, т.е. совокупность m точек из интервала $]0, t_*[$, таких, что $(\mathbf{m}\times\mathbf{m})$-матрица

$$\mathbf{\Phi}_1 = (\varphi_1(\eta_j), \quad \mathbf{j} = 1,2, ..., \mathbf{m}) \tag{1.6}$$

называемая опорной, является невырожденной, где

$$\varphi_1(\mathbf{t}) = \mathbf{HF}(t)\mathbf{b}_1, \quad \mathbf{t} \in \mathbf{T} \tag{1.7}$$

а $\mathbf{F}(t)$, $t \in T$, – $(n\times n)$-матричная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\dot{\mathbf{F}} = -\mathbf{FA}, \quad \mathbf{F}(t_*) = \mathbf{E}; \tag{1.8}$$

3) вектор потенциалов $\lambda_0' = \mathbf{c}_1'\mathbf{\Phi}_1^{-1}$, где $\mathbf{c}_1 = (\gamma_1(\eta_j), \mathbf{j} = 1,2, ..., \mathbf{m})'$, $\gamma_1(\mathbf{t}) = \mathbf{c}'F(t)\mathbf{b}_1$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$;

4) коуправление $\Delta_1(\mathbf{t}) = \psi_0'(t)\mathbf{b}_1$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, построенное по решению $\psi_0(t)$, $t \in T$, сопряженной системы $\dot{\psi}_0 = -\mathbf{A}'\psi_0$, $\psi_0(t_*) = \mathbf{c} - \mathbf{H}'\lambda_0$.

Коуправление связано с *ОУ* соотношением $u^0(t) = \operatorname{sgn} \Delta_1(t)$, $t \in T$, и обладает следующим свойством: $\Delta_1(\eta_j) = 0$, $\dot{\Delta}_1(\eta_j) \neq 0$ $(\mathbf{j} = 1,2, ..., \mathbf{m})$. Обозначим все нули коуправления через $t_{01}, ..., t_{0l}$, занумеровав их в порядке возрастания. Поскольку среди них находятся опорные моменты, то $\mathbf{l} \geqslant \mathbf{m}$.

Предположение 1.2. $t_{0j} \in]0, t_*[$, $\dot{\Delta}_1(t_{0j}) \neq 0$ $(j = 1,2, ..., l)$.

Тогда моменты $t_{01}, ..., t_{0l}$ и только они будут точками переключения *ОУ*.

Замечание. Выбор прямого опорного метода как метода решения базовой задачи объясняется тем, что помимо *ОУ* он дает дополнительную информацию для построения асимптотики. Кроме того, алгоритм, который будет описан, и прямой опорный метод реализуемы почти при одних и тех же предположениях относительно базовой задачи. Прямой опорный метод применим к "простым" задачам. Поэтому, если задачу (1.5) удалось решить этим методом, то предположение 1.1 выполнено. Разумеется, базовую задачу не обязательно решать прямым опорным методом. Если применяется другой метод, то предположение 1.1 удобнее заменить следующим: *ОУ* в задаче (1.5) имеет не менее $\mathbf{m}$ точек переключения, среди которых найдутся такие точки $\eta_1, ..., \eta_m$, что матрица (1.6) будет невырожденной.

После решения базовой задачи найдем нули $\tau_{01}, ..., \tau_{0p}$ функции $\Delta_2(\mathbf{t}) = \psi_0'(\mathbf{t})\mathbf{b}_2$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, занумеровав их в порядке возрастания.

Предположение 1.3. Если $\mathbf{p} \geqslant 1$, то $\tau_{0i} \in \,]0, \mathbf{t}_*[$, $\dot{\Delta}_2(\tau_{0i}) \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, p$.

Введем в рассмотрение числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_l$, $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_p$: $\alpha_0 = \operatorname{sgn} \Delta_1(0)$, $\alpha_j = -\alpha_{j-1}$ ($j = 1, 2, \ldots, l$); $\beta_0 = \operatorname{sgn} \Delta_2(0)$, $\beta_i = -\beta_{i-1}$ ($i = 1, 2, \ldots, p$). Обозначим через $\psi(t, \lambda)$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, $\lambda \in R^m$, траекторию сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -\mathbf{A}'\psi, \quad \psi(t_*) = \mathbf{c} - \mathbf{H}'\lambda \tag{1.9}$$

Пусть далее $t_1, \ldots, t_l$, $\tau_1, \ldots, \tau_p$ – такие числа из интервала $]0, t_*[$, что $t_1 < t_2 < \ldots < t_l$, $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_p$. Обозначим через $\mathbf{u}(\mathbf{t}, \mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_l)$, $\mathbf{v}\mathbf{t}, \boldsymbol{\tau}_1, \ldots, \boldsymbol{\tau}_\mathrm{p})$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, релейные управляющие воздействия, переключающиеся в точках $\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_l$, $\tau_1, \ldots, \tau_p$ и принимающие на первом промежутке постоянства значения α_0, β_0 соответственно. Траекторию системы (1.2), порожденную таким уравлением, обозначим $\mathbf{x}(t, t_1, \ldots, t_l, \tau_1, \ldots, \tau_p, \mu)$, $t \in T$. Дальнейшие вычисления опираются на сформулированные ниже утверждения.

Теорема 1. Если выполнены предположения 1.1–1.3, то *ОУ* в задаче (1.1)–(1.4) с достаточно малым μ имеет вид

$$\mathbf{u}^0(t, \mu) = \mathbf{u}(\mathbf{t}, \mathbf{t}_1(\mu), \ldots, \mathbf{t}_l(\mu)), \quad \mathbf{v}^0(t, \mu) = \mathbf{v}(t, \tau_1(\mu), \ldots, \tau_p(\mu)). \tag{1.10}$$

Точки переключения *ОУ* и соответствующий ему нормальный вектор множителей Лагранжа $\lambda(\mu)$ являются решением системы уравнений

$$\begin{gathered}\mathbf{H}\mathbf{x}(t_*, t_1, \ldots, t_l, \ \tau_1, \ldots, \tau_p, \mu) - \mathbf{g} = \mathbf{0} \\ \psi'(t_j, \lambda)\mathbf{b}_1 = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, l, \quad \psi'(\tau_i, \lambda)\mathbf{b}_2 = 0 \quad (\mathbf{i} = 1, 2, \ldots, \mathbf{p})\end{gathered} \tag{1.11}$$

и разлагаются в асимптотические ряды

$$\begin{gathered}t_j(\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k t_{kj}, \quad \mathbf{j} = 1, 2, \ldots, \mathbf{l}; \quad \tau_i(\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \tau_{\mathbf{ki}} \\ \mathbf{i} = 1, 2, \ldots, \mathbf{p}; \quad \lambda(\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \lambda_{\mathbf{k}}\end{gathered} \tag{1.12}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{N}(t_1, \ldots, t_l, \ \tau_1, \ldots, \tau_p, \mu) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t_*, \mathrm{t}_1, \ldots, t_l, \ \tau_1, \ldots, \tau_p, \mu) - \mathbf{g}$. В силу формулы Коши имеем

$$\begin{aligned}&\mathbf{N}(t_1, \ldots, t_l, \ \tau_1, \ldots, \tau_p, \mu) = \mathbf{N}_0(t_1, \ldots, t_l) + \mu\mathbf{N}_1(\tau_1, \ldots, \tau_p) = \\ &= \mathbf{H}\mathbf{F}(0)\mathbf{x}^0 + \alpha_0 \int_0^{t_1} \varphi_1(t)dt + \ldots + \alpha_l \int_{t_l}^{t_*} \varphi_1(t)d\mathbf{t} - \mathbf{g} + \\ &+ \mu(\beta_0 \int_0^{\tau_1} \varphi_2(\mathbf{t})dt + \ldots + \beta_p \int_{\tau_p}^{\tau_*} \varphi_2(\mathbf{t})d\mathbf{t})\end{aligned} \tag{1.13}$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, – матричная функция, являющаяся решением уравнения (1.8), $\varphi_1(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, определяется формулой (1.7), а

$$\varphi_2(t) = \mathbf{H}\mathbf{F}(\mathbf{t})\mathbf{b}_2, \quad \mathbf{t} \in \mathbf{T} \tag{1.14}$$

Для сокращения записи введем в рассмотрение векторы

$$\mathbf{h}' = (\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_l, \ \tau_1, \ldots, \tau_p, \lambda'), \quad \mathbf{h}_0' = (\mathbf{t}_{01}, \ldots, \mathbf{t}_{0l}, \ \tau_{01}, \ldots, \tau_{0p}, \lambda_0') \tag{1.15}$$

Тогда систему (1.11) можно записать в виде

$$\mathbf{R}(\mathbf{h}, \mu) = \mathbf{0}. \tag{1.16}$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{h}, \mu) = \left\| \begin{array}{ll} \mathbf{N}(t_1, \ldots, t_l, \ \tau_1, \ldots, \tau_p, \mu) & \\ \psi'(t_j, \lambda)\mathbf{b}_1, & \mathbf{j} = 1, 2, \ldots, \mathbf{l} \\ \psi'(\tau_i, \lambda)\mathbf{b}_2, & \mathbf{i} = 1, 2, \ldots, \mathbf{p} \end{array} \right\|$$

В соответствии с формулой (1.13) имеем

$\mathbf{R}(\mathbf{h},\mu)=\mathbf{R}_0(\mathbf{h})+\mu\mathbf{R}_1(\mathbf{h})$

$$\mathbf{R}_0(\mathbf{h})=\begin{Vmatrix}\mathbf{N}_0(t_1,\ldots,t_l) & \\ \psi'(t_j,\lambda)\mathbf{b}_1, & j=1,2,\ldots,l \\ \psi'(\tau_i,\lambda)\mathbf{b}_2, & i=1,2,\ldots,p\end{Vmatrix},\quad \mathbf{R}_1(\mathbf{h})=\begin{Vmatrix}\mathbf{N}_1(\tau_1,\ldots,\tau_p)\\ 0\end{Vmatrix}$$

Доопределим $\mathbf{R}(\mathbf{h},0)=\mathbf{R}_0(\mathbf{h})$. Тогда вектор-функция $\mathbf{R}(\mathbf{h},\mu)$ будет непрерывной вместе со своими частными производными по компонентам вектора $\mathbf{h}$ в области $\|\mathbf{h}-\mathbf{h}_0\|<\varepsilon$, $0\leqslant\mu<\mu_0$, где ε,μ_0 – некоторые достаточно малые положительные числа.

Поскольку управление $u^0(t)$, $t\in T$, является допустимым в базовой задаче, то $\mathbf{N}_0(t_{01},\ldots,t_{0l})=\mathbf{H}\mathbf{x}^0(t_*)-\mathbf{g}=0$. В силу того, что $\psi(t,\boldsymbol{\lambda}_0)=\psi_0(t)$, $t\in T$, имеем $\psi'(t_{0j},\lambda_0)\mathbf{b}_1=\Delta_1(t_{0j})=0$ $(j=1,2,\ldots,l)$; $\psi'(\tau_{0i},\lambda_0)\mathbf{b}_2=\Delta_2(\tau_{0i})=0$ $(i=1,2,\ldots,p)$. Таким образом, $\mathbf{R}(\mathbf{h}_0,0)=\mathbf{R}_0(\mathbf{h}_0)=0$.

Непосредственным дифференцированием убеждаемся, что матрица Якоби имеет вид

$$\mathbf{I}_1=\frac{\partial\mathbf{R}(h_0,0)}{\partial\mathbf{h}}=\frac{\partial\mathbf{R}_0(h_0)}{\partial\mathbf{h}}=\begin{Vmatrix}\mathbf{B}_1 & 0 & 0\\ \mathbf{B}_2 & 0 & \mathbf{B}_3\\ 0 & \mathbf{B}_4 & \mathbf{B}_5\end{Vmatrix}\tag{1.17}$$

где

$$\begin{aligned}&\mathbf{B}_1=-(2\alpha_j\boldsymbol{\varphi}_1(t_{0j}),\ \mathbf{j}=1,2,\ldots,\mathbf{l}),\quad \mathbf{B}_2=\mathrm{diag}(\dot{\Delta}_1(\mathbf{t}_{0j})\\ &\mathbf{j}=1,2,\ldots,\mathbf{l}),\quad \mathbf{B}_3=-(\varphi_1(t_{0j}),\ \mathbf{j}=1,2,\ldots,\mathbf{l})'\\ &\mathbf{B}_4=\mathrm{diag}(\dot{\Delta}_2(\tau_{0i}),\ \mathbf{i}=1,2,\ldots,\mathbf{p}),\quad \mathbf{B}_5=-(\varphi_2(\tau_{0i}),\ \mathbf{i}=1,2,\ldots,\mathbf{p})'\end{aligned}\tag{1.18}$$

Матрица $(\varphi_1(t_{0j}),\ \mathbf{j}=1,2,\ldots,\mathbf{l})$ имеет полный ранг, так как содержит в качестве подматрицы невырожденную опорную матрицу (1.6). Отсюда и из предположений 1.2, 1.3 следует, что матрица Якоби (1.17) невырожденна.

Таким образом, для системе (1.16) или, что то же самое, (1.11) выполнены все условия теоремы о неявной функции. Согласно этой теореме в некоторой правосторонней окрестности нуля $0\leqslant\mu<\mu_1$ однозначно определены непрерывные функции $\mathbf{t}_j(\mu)$ $(\mathbf{j}= =1,2,\ldots,\mathbf{l})$, $\tau_i(\mu)$ $(i=1,2,\ldots,p)$ $\lambda(\mu)$, удовлетворяющие системе (1.11), такие, что $\mathbf{t}_j(0)=\mathbf{t}_{0j}$ $(\mathbf{j}=1,2,\ldots,\mathbf{l})$, $\tau_i(0)=\tau_{0i}$ $(i=1,2,\ldots,p)$, $\lambda(0)=\lambda_0$.

Другими словами, в задаче (1.1)–(1.4) с достаточно малым μ существуют допустимое управление $u^0(t,\mu)$, $\upsilon^0(\mathbf{t},\mu)$, $\mathbf{t}\in\mathbf{T}$, вида (1.10) и вектор Лагранжа $\lambda(\mu)$, такие, что точки переключения $u^0(\mathbf{t},\mu)$, $\mathbf{t}\in\mathbf{T}$, и $\upsilon^0(\mathbf{t},\mu)$, $\mathbf{t}\in\mathbf{T}$, являются соответственно нулями фунций $\Delta_1(t,\mu)=\psi'(\mathbf{t},\mu)\mathbf{b}_1$, $\Delta_2(\mathbf{t},\mu)=\psi'(\mathbf{t},\mu)\mathbf{b}_2$, $\mathbf{t}\in\mathbf{T}$, построенных по решению $\psi(\mathbf{t},\mu)$, $\mathbf{t}\in\mathbf{T}$, сопряженной системы (1.9) с $\lambda=\lambda(\mu)$.

Поскольку $\mathbf{R}_0(\mathbf{h})$, $\mathbf{R}_1(\mathbf{h})$ – бесконечно-дифференцируемые функции, то будут иметь место асимптотические разложения (1.12). Опираясь на предположения 1.2, 1.3 с помощью теоремы о неявной функции убеждаемся в том, что коуправление $\Delta_1(\mathbf{t},\mu)$, $\mathbf{t}\in\mathbf{T}$, обращается в нуль только в точках $\mathbf{t}_j(\mu)$ $(\mathbf{j}=1,2,\ldots,\mathbf{l})$, а $\Delta_2(\mathbf{t},\mu)$, $\mathbf{t}\in\mathbf{T}$, не имеет нулей, отличных от $\tau_i(\mu)$ $(\mathbf{i}=1,2,\ldots,\mathbf{p})$, причем $\mathbf{u}^0(\mathbf{t},\mu)=\mathrm{sgn}\,\Delta_1(\mathbf{t},\mu)$, $\mathbf{v}^0(\mathbf{t},\mu)=\mathrm{sgn}\,\Delta_2(\mathbf{t},\mu)$, $\mathbf{t}\in\mathbf{T}$. Последнее означает, что допустимое управление $u^0(t,\mu)$, $\upsilon^0(t,\mu)$, $t\in T$, удовлетворяет принципу максимума Понтрягина [8] с нормальным вектором множителей Лагранжа $\lambda(\mu)$ и, следовательно, является *ОУ*. Теорема доказана.

Зададим натуральное число s. Для построения асимптотически s-допустимого s-оптимального управления в задаче (1.1)–(1.4) достаточно найти полиномы

$$\mathbf{t}_j^{(s)}(\mu)=\sum_{k=0}^{s}\mu^k t_{kj},\ \mathbf{j}=1,2,\ldots,\mathbf{l};\quad \tau_i^{(s-1)}(\mu)=\sum_{k=0}^{s-1}\mu^k\tau_{ki},\ \mathbf{i}=1,2,\ldots,\mathbf{p} \tag{1.19}$$

Сделать это можно следующим образом. Пусть

$$\mathbf{h}_k'=(t_{k1},\ldots,t_{kl},\ \tau_{k1},\ldots,\tau_{kp},\lambda_k'),\quad \mathbf{h}_s(\mu)=\sum_{k=0}^{s}\mu^k\mathbf{h}_k$$

Разложим вектор-функцию $\mathbf{R}(\mathbf{h}_s(\mu),\mu)$ при помощи формулы Тейлора по степеням μ до порядка s включительно и приравняем коэффициенты разложения к нулю (начиная с коэффициента при μ). В результате получим невырожденные системы линейных уравнений для последовательного нахождения векторов $\mathbf{h}_k$ ($\mathbf{k}=1,2,\ldots,\mathbf{s}$):

$$\mathbf{I}_1\mathbf{h}_1=-\mathbf{R}_1(\mathbf{h}_0),\quad \mathbf{I}_1\mathbf{h}_2=-\frac{\partial\mathbf{R}_1}{\partial\mathbf{h}}(\mathbf{h}_0)\mathbf{h}_1-\frac{1}{2}\mathbf{h}_1'\frac{\partial^2\mathbf{R}_0}{\partial\mathbf{h}^2}(\mathbf{h}_0)\mathbf{h}_1,\ldots \tag{1.20}$$

Заметим, что в силу структуры (1.17) матрицы Якоби $\mathbf{I}_1$ эти системы расщепляются. В частности, вектор λ_1 находится как решение системы $\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{B}_3\lambda_1=$ $=\mathbf{N}_1(\tau_{01},\ldots,\tau_{0p})$, а $t_{1j}=\lambda_1\varphi_1(t_{0j})/\dot\Delta_1(t_{0j})$ ($\mathbf{j}=1,2,\ldots,\mathbf{l}$).

Последовательно решая системы (1.20), найдем векторы $\mathbf{h_k}$, $\mathbf{k}=1,2,\ldots,\mathbf{s}$, и составим полиномы (1.19). Управление $\mathbf{u}_s(t,\mu)=\mathbf{u}(\mathbf{t},t_1^{(s)}(\mu),\ldots,\mathbf{t}_l^{(s)}(\mu))$, $\upsilon_{s-1}(\mathbf{t},\mu)=$ $=\mathbf{v}(\mathbf{t},\tau_1^{(s-1)}(\mu),\ldots,\tau_p^{(s-1)}(\mu))$, $\mathbf{t}\in\mathbf{T}$, будет, очевидно, асимптотически s-допустимым s-оптимальным управлением в задаче (1.1)–(1.4).

Построенные асимптотические приближения корней системы (1.16) можно использовать для численного решения этой системы, а значит, и рассмотренной задачи, при заданном значении μ. Для этого нужно применить процедуру доводки [1], т.е. найти при помощи метода Ньютона корни системы (1.16), взяв в качестве начального приближения $\mathbf{h}_s(\mu)$.

2. Система с мощным управлением. В классе кусочно-непрерывных управляющих воздействий $\mathbf{u}(\mathbf{t})$, $\mathbf{v}(\mathbf{t})$, $\mathbf{t}\in\mathbf{T}=[0,t_*]$, рассмотрим задачу оптимального управления

$$\begin{gathered} J(\mathbf{u},\mathbf{v})=\mathbf{c}'\mathbf{x}(t_*)\to\max,\quad \dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}_1\mathbf{u}+\mathbf{b}_2\mathbf{v}/\mu,\quad \mathbf{x}(0)=\mathbf{x}^0 \\ |\mathbf{u}(t)|\leqslant 1,\quad |\mathbf{v}(t)|\leqslant 1,\quad t\in T,\quad \mathbf{H}\mathbf{x}(t_*)=\mathbf{g} \end{gathered} \tag{2.1}$$

где, как и прежде, μ – малый положительный параметр, u, υ – скаляры, $\mathbf{x}$ – n-вектор, $\mathbf{g}$ – m-вектор ($m<n$). Считаем, что $\operatorname{rank}\mathbf{H}=m$.

Опишем алгоритм, позволяющий для заданного натурального числа s построить асимптотически s-допустимое s-оптимальное управление в задаче (2.1). Определяется это понятие так же, как и для задачи (1.1)–(1.4).

Обозначения в настоящем и предыдущем разделах независимы: одним символом могут быть обозначены, вообще говоря, различные величины. Существует, однако, аналогия между величинами, для которых используется один и тот же символ.

Базовая задача в данном случае имеет вид

$$\begin{gathered} J_0(\upsilon)=\mathbf{c}'\mathbf{x}(t_*)\to\max,\quad \dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}_2\upsilon,\quad \mathbf{x}(0)=0 \\ |\upsilon(t)|\leqslant 1,\quad t\in T,\quad \mathbf{H}\mathbf{x}(t_*)=0 \end{gathered} \tag{2.2}$$

Предположение 2.1. Задача (2.2) является "простой".

Решая эту задачу прямым опорным методом, получим:

1) $OУ$ и траекторию $\mathbf{v}^0(t)$, $\mathbf{x}^0(t)$, $t \in T$;

2) оптимальную опору $\{\sigma_1, ..., \sigma_m\}$ и соответствующую невырожденную опорную матрицу

$$\mathbf{\Phi}_2 = (\varphi_2(\sigma_i), \quad \mathbf{i} = 1, 2, ..., \mathbf{m}), \tag{2.3}$$

где $\varphi_2(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, – m–вектор-функция, определяемая формулой (1.14);

3) вектор потенциалов $\lambda_0' = \mathbf{c}_2'\mathbf{\Phi}_2^{-1}$, где $\mathbf{c}_2 = (\gamma_2(\sigma_i), \mathbf{i} = 1, 2, ..., \mathbf{m})'$, $\gamma_2(t) = \mathbf{c}'\mathbf{F}(t)\mathbf{b}_2$, $t \in T$, а $(n\times n)$-матричная функция $\mathbf{F}(t)$, $t \in T$, удовлетворяет уравнению (1.8);

4) коуправление $\Delta_2(t) = \psi_0'(t)\mathbf{b}_2$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, построенное по решению $\psi_0(t)$, $t \in T$, сопряженной системы $\dot{\psi}_0 = -\mathbf{A}'\psi_0$, $\psi_0(t_*) = \mathbf{c} - \mathbf{H}'\boldsymbol{\lambda}_0$.

Коуправление, связанное с $OУ$ соотношением $\upsilon^0(t) = \operatorname{sgn} \Delta_2(t)$, $t \in T$, обладает свойством $\Delta_2(\sigma_i) = 0$, $\dot{\Delta}_2(\sigma_i) \neq 0$, $i = 1, 2, ..., m$.

Замечание. Предположение 2.1 можно заменить следующим: $OУ$ в задаче (2.2) имеет не менее m точек переключения, среди которых найдутся такие точки $\sigma_1, ..., \sigma_m$, что матрица (2.3) будет невырожденной.

Пусть $\tau_{01}, ..., \tau_{0p}$ – все нули коуправления, упорядоченные по возрастанию. Понятно, что $p \geqslant m$.

Предположение 2.2. $\tau_{0i} \in \,]0, t_*[$, $\dot{\Delta}_2(\tau_{0i}) \neq 0$ $(\mathbf{i} = 1, 2, ..., \mathbf{p})$.

Тогда $\tau_{01}, ..., \tau_{0p}$ – точки переключения управления $\mathbf{v}^0(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$.

После решения базовой задачи найдем нули $t_{01}, ..., t_{0l}$ функции $\Delta_1(\mathbf{t}) = \psi_0'(\mathbf{t})\mathbf{b}_1$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, занумеровав их в порядке возрастания.

Предположение 2.3. Если $l \geqslant 1$, то $\mathbf{t}_{0j} \in \,]0, \mathbf{t}_*[$, $\dot{\Delta}_1(\mathbf{t}_{0j}) \neq 0$ $(\mathbf{j} = 1, 2, ..., \mathbf{l})$.

Введем в рассмотрение числа $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_l$, $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_p$ и релейные управляющие воздействия $u(\mathbf{t}, \mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_l)$, $\mathbf{v}(\mathbf{t}, \tau_1, ..., \tau_p)$, $t \in T$, так же, как это было сделано в предыдущем разделе. Пусть, как и прежде, $\psi(t, \lambda)$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, $\lambda \in \mathbf{R}^m$, – траектория сопряженной системы (1.9). Через $\mathbf{x}(\mathbf{t}, \mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_l, \tau_1, ..., \tau_p, \mu)$, $t \in \mathbf{T}$, обозначим траекторию динамической системы в задаче (2.1), порожденную управлением $\mathbf{u}(\mathbf{t}, \mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_l)$, $\upsilon(\mathbf{t}, \tau_1, ..., \tau_p)$, $t \in \mathbf{T}$. Алгоритм построения асимптотики решения задачи (2.1) опирается на следующие утверждения.

Теорема 2. При выполнении предположений 2.1–2.3 $OУ$ в задаче (2.1) с достаточно малым μ имеет вид (1.10). Точки переключения этого $OУ$ и соответствующий ему нормальный вектор множителей Лагранжа $\lambda(\mu)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{gathered}\mu(\mathbf{Hx}(\mathbf{t}_*, \mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_l, \quad \tau_1, ..., \quad \tau_p, \mu) - \mathbf{g}) = \mathbf{0} \\ \psi'(\mathbf{t}_j, \lambda)\mathbf{b}_1 = 0, \quad \mathbf{j} = 1, 2, ..., \mathbf{l}, \quad \psi'(\tau_i, \lambda)\mathbf{b}_2 = 0, \quad \mathbf{i} = 1, 2, ..., \mathbf{p}\end{gathered} \tag{2.4}$$

и допускают асимптотические разложения (1.12).

Доказательство. Обозначим $\mathbf{K}(\mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_l, \tau_1, .., \tau_p, \mu) = \mu(\mathbf{Hx}(\mathbf{t}_*, \mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_l, \tau_1, ..., ..., \tau_p, \mu) - \mathbf{g})$. Применив формулу Коши, получим

$$\mathbf{K}(\mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_l, \tau_1, ..., \tau_p, \mu) = \mathbf{K}_0(\tau_1, ..., \tau_p) + \mu\mathbf{K}_1(\mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_l) =$$

$$= \beta_0 \int_0^{\tau_1} \varphi_2(\mathbf{t})dt + ... + \beta_p \int_{\tau_p}^{t_*} \varphi_2(\mathbf{t})dt + \mu(\mathbf{HF}(0)\mathbf{x}^0 +$$

$$+ \alpha_0 \int_0^{t_1} \varphi_1(\mathbf{t})d\mathbf{t} + \ldots + \alpha_l \int_{t_l}^{t_*} \varphi_1(\mathbf{t})d\mathbf{t} - \mathbf{g}) \tag{2.5}$$

где $\mathbf{F}(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in T$, – решение уравнения (1.8), а $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, определяются формулами (1.7), (1.14).

Введем в рассмотрение векторы (1.15), а систему (2.4) запишем в виде

$$\mathbf{P}(\mathbf{h}, \mu) = \mathbf{0} \tag{2.6}$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{h},\mu) = \begin{Vmatrix} \mathbf{K}(t_1,\ldots,t_l,\ \tau_1,\ldots,\tau_p,\mu) & \\ \psi'(t_j,\lambda)\mathbf{b}_1, & j = 1,2,\ldots,l \\ \psi'(\tau_i,\lambda)\mathbf{b}_2, & i = 1,2,\ldots,p \end{Vmatrix}$$

В силу (2.5) $\mathbf{P}(\mathbf{h}, \mu) = \mathbf{P}_0(\mathbf{h}) + \mu\mathbf{P}_1(\mathbf{h})$

$$\mathbf{P}_0(\mathbf{h}) = \begin{Vmatrix} \mathbf{K}_0(\tau_1,\ldots,\tau_p) & \\ \psi'(\mathbf{t}_j,\lambda)\mathbf{b}_1, & \mathbf{j} = 1,2,\ldots,\mathbf{l} \\ \psi'(\tau_i,\lambda)\mathbf{b}_2, & \mathbf{i} = 1,2,\ldots,\mathbf{p} \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{P}_1(\mathbf{h}) = \begin{Vmatrix} \mathbf{K}_1(\mathbf{t}_1,\ldots,\mathbf{t}_l) \\ 0 \end{Vmatrix}$$

Доопределим $\mathbf{P}(\mathbf{h}, 0) = \mathbf{P}_0(h)$. Тогда вектор-функция $\mathbf{P}(\mathbf{h}, \mu)$ будет непрерывной вместе со своими частными производными по компонентам вектора $\mathbf{h}$ в области $\| \mathbf{h} - \mathbf{h}_0 \| < \varepsilon$, $0 \leqslant \mu < \mu_0$, где ε, μ_0 – некоторые достаточно малые положительные числа.

В силу того, что управление $\mathbf{v}^0(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in T$, является допустимым в задаче (2.2), а $\psi(\mathbf{t}, \lambda_0) = \psi_0(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in T$, имеем $\mathbf{P}(\mathbf{h}_0, 0) = \mathbf{P}_0(\mathbf{h}_0) = 0$. Матрица Якоби системы (2.6) имеет вид

$$\mathbf{I}_2 = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{h}}(\mathbf{h}_0, 0) = \begin{Vmatrix} 0 & \mathbf{B} & 0 \\ \mathbf{B}_2 & 0 & \mathbf{B}_3 \\ 0 & \mathbf{B}_4 & \mathbf{B}_5 \end{Vmatrix} \tag{2.7}$$

где $\mathbf{B} = -(2\beta_i\varphi_2(\tau_{0i}),\ i = 1, 2, \ldots, p)$. а остальные блоки матрицы определяются формулами (1.18). Матрица $(\varphi_2(\tau_{0i}),\ \mathbf{i} = 1, 2, \ldots, \mathbf{p})$ имеет полный ранг, так как содержит в качестве подматрицы невырожденную матрицу (2.3). Отсюда и из предположений 2.2, 2.3 следует, что матрица $\mathbf{I}_2$ является невырожденной.

Итак, для системы (2.6) выполнены все условия теоремы о неявной функции. Завершается доказательство теоремы 2 так же, как и доказательство теоремы 1.

Вернемся к алгоритму построения асимптотически s-допустимого s-оптимального управления в задаче (2.1). Методом неопределенных коэффициентов, описанным в предыдущем разделе, составим невырожденные системы линейных уравнений

$$\mathbf{I}_2\mathbf{h}_1 = -\mathbf{P}_1(\mathbf{h}_0), \quad \mathbf{I}_2\mathbf{h}_2 = -\frac{\partial \mathbf{P}_1}{\partial \mathbf{h}}(\mathbf{h}_0)\mathbf{h}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{h}_1' \frac{\partial^2 \mathbf{P}_0}{\partial \mathbf{h}^2}(\mathbf{h}_0)\mathbf{h}_1, \ldots \tag{2.8}$$

для последовательного вычисления векторов $\mathbf{h}_k' = (\mathbf{t}_{\mathbf{k}1}, \ldots, \mathbf{t}_{\mathbf{k}l}, \tau_{k1}, \ldots, \tau_{kp}, \lambda_k')$ ($\mathbf{k} = 1, 2, \ldots, \mathbf{s} + 1$). В силу структуры (2.7) матрицы $\mathbf{I}_2$ эти системы расщепляются. Так, вектор λ_1 удовлетворяет системе $\mathbf{B}\mathbf{B}_4^{-1}\mathbf{B}_5\lambda_1 = \mathbf{K}_1(\mathbf{t}_{01}, \ldots, \mathbf{t}_{0l})$, а $\tau_{1i} = \boldsymbol{\lambda}_1'\varphi_2(\tau_{0i})/\dot{\Delta}_2(\tau_{0i})$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

Последовательно решая системы (2.8), найдем векторы $\mathbf{h}_k$, $\mathbf{k} = 1, 2, ..., \mathbf{s}+1$, и составим полиномы

$$\mathbf{t}_j^{(s)}(\mu) = \sum_{k=0}^{s} \mu^k \mathbf{t}_{kj}, \ \mathbf{j} = 1,2,\ldots,\mathbf{l}; \quad \tau_i^{(s+1)}(\mu) = \sum_{k=0}^{s+1} \mu^k \tau_{ki}, \ \mathbf{i} = 1,2,\ldots,\mathbf{p}$$

Управление $u_s(\mathbf{t}, \mu) = \mathbf{u}(\mathbf{t}, \mathbf{t}_1^{(s)}(\mu), ..., \mathbf{t}_l^{(s)}(\mu))$, $\mathbf{v}_{s+1}(\mathbf{t}, \mu) = \mathbf{v}(\mathbf{t}, \tau_1^{(s+1)}(\mu), ..., \tau_p^{(s+1)}(\mu))$, $\mathbf{t} \in \mathbf{T}$, будет асимптотически s-допустимым s-оптимальным управлением в задаче (2.1).

Построенные асимптотические приближения корней системы (2.4) можно использовать для точного решения задачи (2.1) при заданном значении μ, если взять их в качестве начальных приближений для процедуры доводки [1].

3. Пример. Рассмотрим задачу вида (1.1)–(1.4)

$$\mathbf{x}_2(3) \to \max, \quad \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = -\mathbf{x}_1 + \mu\mathbf{v}, \quad \mathbf{x}_1(0) = \mathbf{x}_2(0) = 1$$

$$|\mathbf{u}(t)| \leqslant 1, \quad |\mathbf{v}(t)| \leqslant 1, \quad \mathbf{t} \in [0, 3], \quad \mathbf{x}_1(3) = 0 \tag{3.1}$$

которая моделирует процесс управления вращениями динамически симметричного твердого тела при помощи двух моментов. *ОУ* базовой задачи переключается в одной точке $t_{01} = 2{,}482170$, принимая на первом промежутке постоянства значение –1 (результаты всех вычислений приводятся с точностью до 6 знаков после запятой). Оптимальному управлению соответствуют множитель Лагранжа $\lambda_0 = -0{,}569685$ и коуправление $\Delta_1(\mathbf{t}) = \sin(\mathbf{t} - \mathbf{t}_{01})/\cos(3 - t_{01})$, $\mathbf{t} \in [0, 3]$. Функция $\Delta_2(\mathbf{t}) = \cos(\mathbf{t} - \mathbf{t}_{01})/\cos(3 - \mathbf{t}_{01})$, $\mathbf{t} \in [0, 3]$, обращается в нуль в единственной точке $\tau_{01} = 0{,}911373$. Предположения 1.1–1.3 в данном случае выполнены. Асимптотически 1-допустимое 1-оптимальное управление в задаче (3.1), построенное при помощи описанного в разд. 1 алгоритма, имеет вид

$$\mathbf{u}_1(t,\mu) = \begin{cases} -1, & \mathbf{t} \in [0, \mathbf{t}_1^{(1)}(\mu)[\\ 1, & \mathbf{t} \in [\mathbf{t}_1^{(1)}(\mu), 3], \end{cases} \quad \upsilon_0(t,\mu) = \begin{cases} -1, & \mathbf{t} \in [0, \tau_{01}[\\ 1, & t \in [\tau_{01}, 3] \end{cases}$$

где $\mathbf{t}_1^{(1)}(\mu) = \mathbf{t}_{01} + \mu\mathbf{t}_{11}$, а $\mathbf{t}_{11} = 0{,}575443$.

Путем применения процедуры доводки было найдено *ОУ* $u^0(\mathbf{t}, \mu)$, $\mathbf{v}^0(\mathbf{t}, \mu)$, $\mathbf{t} \in [0, 3]$, в задаче (3.1) для двух значений малого параметра 0,1 и 0,01. Управляющие воздействия $\mathbf{u}^0(\mathbf{t}, 0{,}1)$, $\mathbf{v}^0(\mathbf{t}, 0{,}1)$, $\mathbf{u}^0(t, 0{,}01)$, $\mathbf{v}^0(t, 0{,}01)$, $\mathbf{t} \in [0, 3]$, переключаются соответственно в точках 2,533748, 0,962951, 2,487858, 0,917061, принимая на первом промежутке постоянства значение –1. Заметим, что $\mathbf{t}_1^{(1)}(0{,}1) = 2{,}539714$, $\mathbf{t}_1^{(1)}(0{,}01) = 2{,}487924$.

Рассмотрим задачу

$$\mathbf{x}_2(3) \to \max, \quad \dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{x}}_2 = -\mathbf{x}_1 + \boldsymbol{v}/\mu, \quad \mathbf{x}_1(0) = \mathbf{x}_2(0) = 1 \tag{3.2}$$

$$|\mathbf{u}(t)| \leqslant 1, \quad |\boldsymbol{v}(t)| \leqslant 1, \quad t \in [0, 3], \quad \mathbf{x}_1(3) = 0$$

которая отличается от задачи (3.1) только тем, что управляющее воздействие **v** является не слабым, а мощным.

Оптимальное управление базовой задачи в данном случае переключается в точке $\tau_{01} = 1{,}434207$ и принимает на первом промежутке постоянства значение –1. Ему соответствуют множитель Лагранжа $\lambda_0 = 0{,}005004$ и коуправление $\Delta_2(\mathbf{t}) = \sin(\mathbf{t} - \tau_{01})/\sin(3 - \tau_{01})$, $\mathbf{t} \in [0, 3]$. Функция $\Delta_1(\mathbf{t}) = -\cos(\mathbf{t} - \tau_{01})/\sin(3 - \tau_{01})$, $\mathbf{t} \in [0, 3]$, принимает только отрицательные значения. Предположения 2.1–2.3 выполнены. Асимптотически 0-допустимое 0-оптимальное управление в задаче (3.2), построенное при помощи описанного в разд.2 алгоритма, имеет вид

$$u_0(\mathbf{t},\mu)=-1,\quad \mathbf{t}\in[0,3],\quad \upsilon_1(\mathbf{t},\mu)=\begin{cases}-1, & \mathbf{t}\in[0,\tau_1^{(1)}(\mu)[\\ 1, & \mathbf{t}\in[\tau_1^{(1)}(\mu),3]\end{cases},$$

где $\tau_1^{(1)}(\mu)=\tau_{01}+\mu\tau_{11}$, а $\tau_{11}=-0{,}495009$.

Согласно теореме 2 *ОУ* в задаче (3.2) с достаточно малым μ имеет следующую структуру

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{t},\mu)=-1,\quad \mathbf{t}\in[0,3],\quad \mathbf{v}^0(t,\mu)=\begin{cases}-1, & \mathbf{t}\in[0,\tau_1(\mu)[\\ 1, & \mathbf{t}\in[\tau_1(\mu),3]\end{cases}\tag{3.3}$$

при этом $\tau_1(\mu)=\tau_1^{(1)}(\mu)+O(\mu^2)$. Система (2.4) в данном случае имеет вид

$$\begin{gathered}1+\cos 3-2\cos(\tau_1-3)+\mu\cos 3=0\\ \cos(\tau_1-3)+\lambda\sin(\tau_1-3)=0\end{gathered}\tag{3.4}$$

Путем применения процедуры доводки было найдено решение этой системы при $\mu=0{,}01$. Оказалось, что $\tau_1(0{,}01)=1{,}429257$, $\lambda(0{,}01)=0{,}000054$. Для сравнения $\tau_1^{(1)}(0{,}01)=1{,}429257$, т.е. с точностью до 6 знаков после запятой точка переключения асимптотически 0-допустимого 0-оптимального управления совпадает с точкой переключения *ОУ*. При $\mu=0{,}1$ система (3.4) имеет следующее решение: $\tau_1^*=1{,}384693$, $\lambda^*=-0{,}044540$. Как следует из принципа максимума, для оптимальности управления вида (3.3) необходимо, чтобы множитель Лагранжа $\lambda(\mu)$ был неотрицательным. Знак λ^* указывает на то, что значение $\mu=0{,}1$ недостаточно мало, и *ОУ* в задаче (3.2) при этом значении μ имеет структуру, отличную от (3.3). Оптимальное управляющее воздействие $\mathbf{u}^0(\mathbf{t},0{,}1)$ должно иметь одну точку переключения $\mathbf{t}_1(0{,}1)$, близкую к конечному моменту. В этом случае уравнения доводки будут иметь вид

$$1+\cos 3-2\cos(\tau_1-3)+\mu(\cos 3-2\sin(\mathbf{t}_1-3))=0$$

$$\sin(\mathbf{t}_1-3)-\lambda\cos(\mathbf{t}_1-3)=0,\quad \cos(\tau_1-3)+\lambda\sin(\tau_1-3)=0$$

где $\mu=0{,}1$. Решая эту систему методом Ньютона, взяв в качестве начальных приближений корней $\mathbf{t}_1=3$, $\tau_1=\tau_{01}$, $\lambda=\lambda_0$, получаем $\mathbf{t}_1(0{,}1)=2{,}959538$, $\tau_1(0{,}1)=1{,}388742$, $\lambda(0{,}1)=$ $=-0{,}040484$. Управление

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{t},0{,}1)=\begin{cases}-1, & \mathbf{t}\in[0,t_1(0{,}1)[\\ 1, & \mathbf{t}\in[t_1(0{,}1),3]\end{cases},\quad \upsilon^0(t,0{,}1)=\begin{cases}-1, & \mathbf{t}\in[0,\tau_1(0{,}1)[\\ 1, & \mathbf{t}\in[\tau_1(0{,}1),3]\end{cases}$$

удовлетворяет принципу максимума и, следовательно, является *ОУ* в задаче (3.2) с $\mu=0{,}1$. Заметим для сравнения, что $\tau_1^{(1)}(0{,}1)=1{,}384706$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь (Ф61-264).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Габасов Р., Кириллова Ф.М.* Конструктивные методы оптимизации. Ч. 2. Задачи управления. Минск: Изд-во Университетское, 1984. 207 с.
2. *Габасов Р., Калинин А.И., Кириллова Ф.М.* Алгоритм оптимизации квазилинейной системы управления // Докл. АН СССР. 1987. Т. 293. № 1. С. 22–26.

3. *Калинин А.И.* Алгоритм асимптотического решения сингулярно возмущенной линейной задачи оптимального быстродействия // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 6. С. 880–889.
4. *Калинин А.И.* Асимптотический метод построения оптимальных управлений с особыми участками // Докл. АН СССР. 1990. Т. 314. № 1. С. 62–67.
5. *Гневко С.В., Калинин А.И.* Асимптотическая оптимизация нелинейных регулярно возмущенных систем управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1991. Т. 31. № 8. С. 1160–1172.
6. *Калинин А.И.* Асимптотическое решение линейной задачи оптимального управления с большой длительностью процесса // Докл. АН БССР. 1991. Т. 35. № 6. С. 488–491.
7. *Габасов Р., Кириллова Ф.М., Костюкова О.И.* Оптимизация систем управления с помощью кратных опор // Конструктивная теория экстремальных задач. Минск: Изд-во университетское, 1984. С. 62–67.
8. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 392 с.

Минск

Поступила в редакцию
14.III.1994