

УДК 531.36:62-50

© 1995 г. А. Давыскиб, В.А. Самсонов

## О ВОЗМОЖНОСТИ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ВРАЩЕНИЯ СИСТЕМЫ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Рассматривается простейшая модель космического аппарата (КА) изменяющейся конфигурации, состоящая из твердого тела и двух стержней, присоединенных к телу цилиндрическими шарнирами. При решении некоторых технических задач КА приводится в состояние перманентного вращения вокруг некоторой оси. Показано, что при определенных параметрах конструкции возможна гироскопическая стабилизация такого вращения. Проведен качественный анализ области гироскопической стабилизации в пространстве параметров.

При анализе устойчивости вращения космического аппарата (КА), моделируемого системой твердых тел, как правило [1, 2, 3], обращают внимание на области вековой устойчивости. Обычно возможность равномерного вращения "порождает" циклические координаты и устойчивость вращения таких систем может быть связана с гироскопической стабилизацией [4]. Это интересное явление почти игнорируется в динамике КА, однако оно может оказаться полезным и с практической точки зрения<sup>1</sup>. Правда, трудно надеяться на получение обозримых результатов в рамках моделей КА, типа использованных в [1, 2], так как они обладают высокой размерностью и содержат много параметров. Поэтому анализ возможностей гироскопической стабилизации перманентного вращения системы твердых тел целесообразно начать с более простой модели.

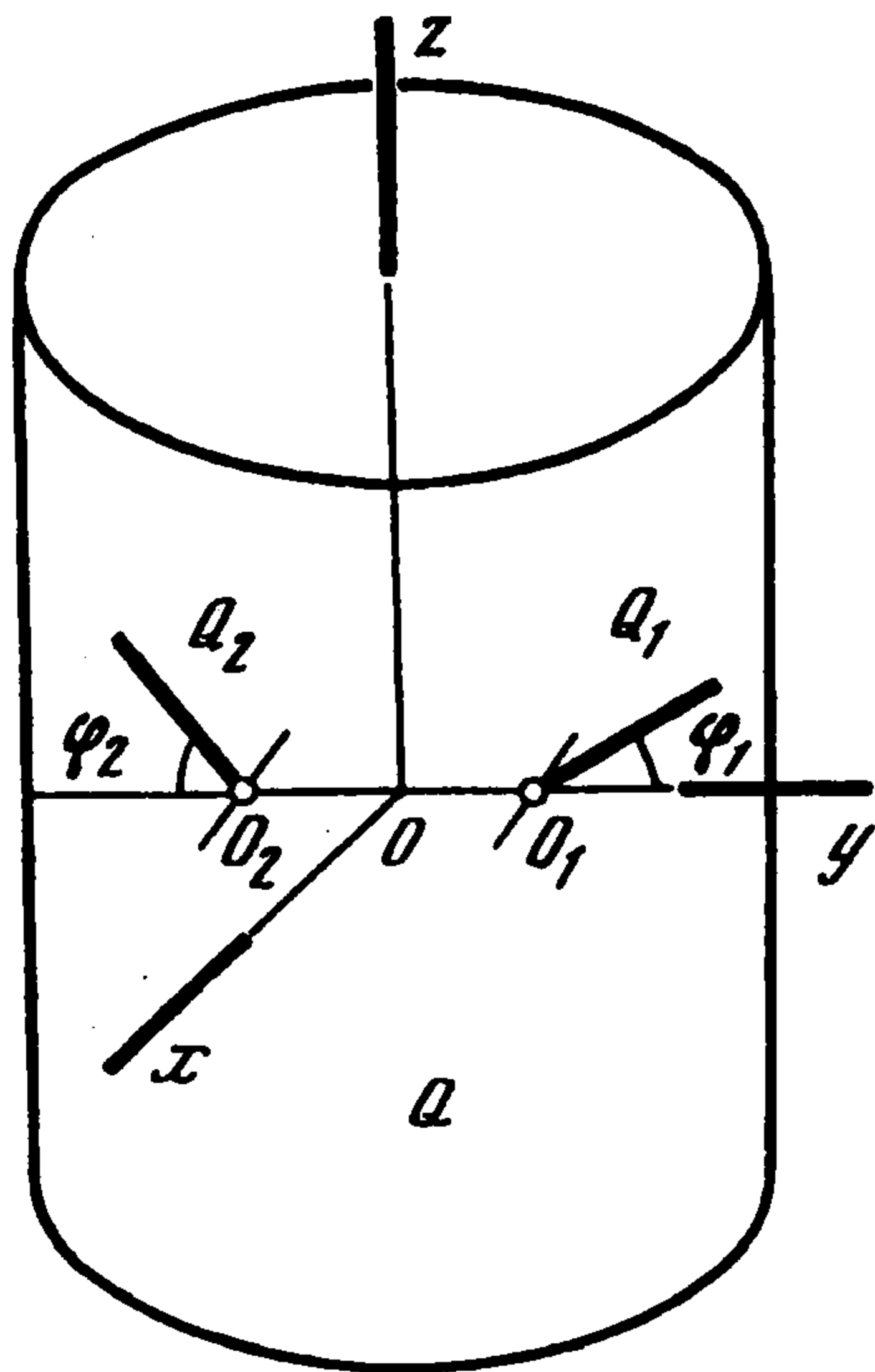
**1. Постановка задачи.** Предположим, что осесимметричное тело  $Q$  закреплено в некоторой точке  $O$  оси  $Oz$  своей симметрии (фиг. 1). Пусть к телу  $Q$  в точках  $O_1$  и  $O_2$  ( $|OO_1| = |OO_2| = R$ ) с помощью цилиндрических шарниров прикреплены два одинаковых твердых стержня  $Q_1$  и  $Q_2$  длиной  $L$  и массой  $m$ . Положим также, что точки  $O_1, O, O_2$  лежат на одной прямой  $Oy$  ( $Oy \perp Oz$ ), а оси шарниров параллельны оси  $Ox$ , образующей с  $Oz$  и  $Oy$  связанную с телом  $Q$  систему координат.

Сконструированная таким образом система трех тел обладает пятью степенями свободы и ее положение относительно неподвижных осей  $OXYZ$  может быть описано пятью обобщенными координатами:  $\theta$  – угол между осью  $Ox$  и плоскостью  $Zx$ , угол поворота всей системы вокруг оси  $Oz$ , циклическая координата;  $\beta$  – угол между осью  $Ox$  и плоскостью  $Xy$ ,  $\alpha$  – угол между осью  $Oz$  и плоскостью  $Zx$  (фиг. 2). Следовательно, углы Крылова  $\alpha, \beta$  определяют ориентацию оси  $Oz$  в некоторой подвижной системе координат  $OZx_1y_1$ , совершающей вращение вокруг неподвижной оси  $OZ$  с угловой скоростью  $\dot{\theta}$ . Положение стержней относительно тела  $Q$  определим углами  $\varphi_1, \varphi_2$  (фиг. 1).

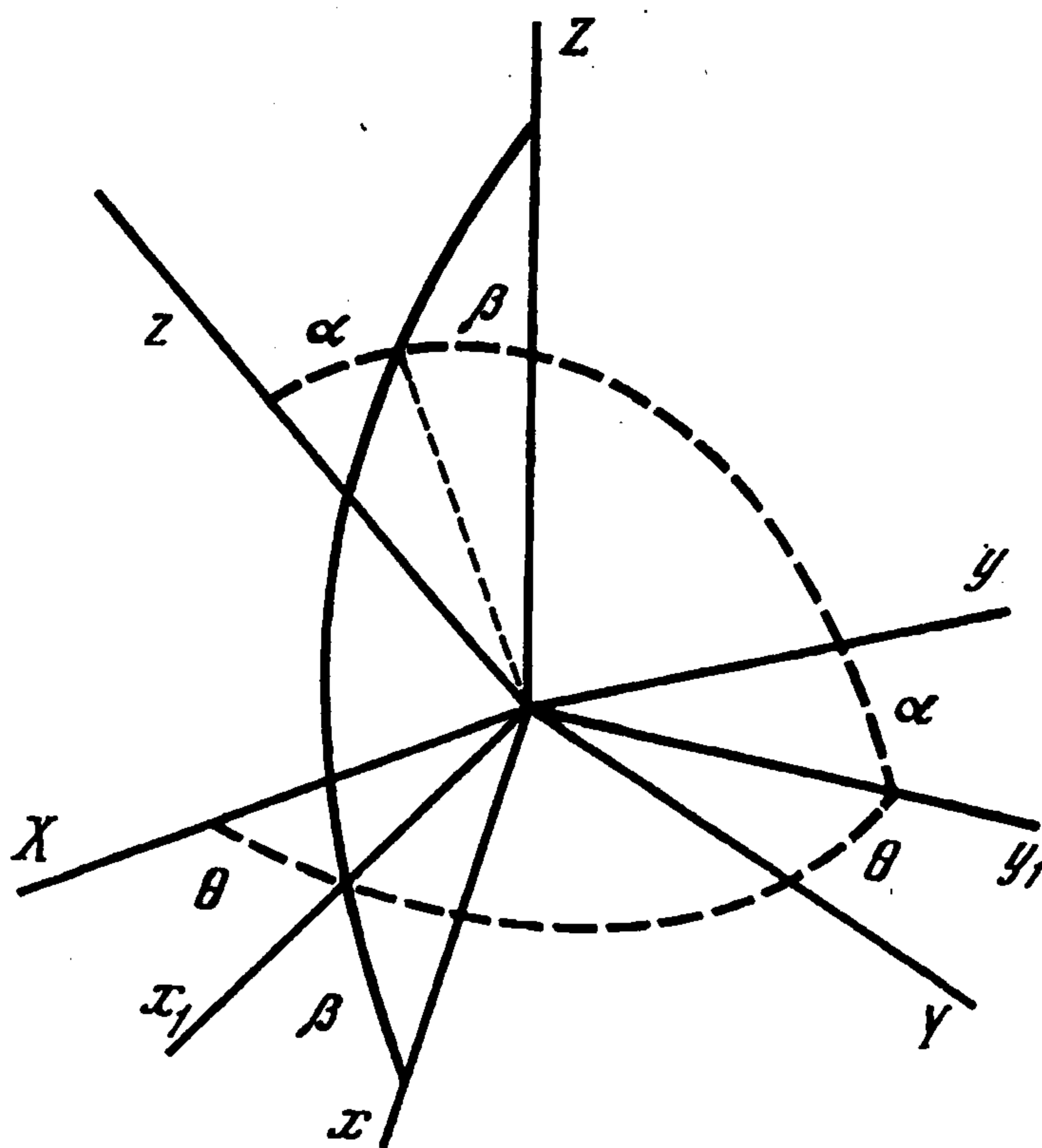
Предположим далее, что внешних сил нет и трение в шарнирах отсутствует.

Среди возможных движений системы, очевидно, существует ее равномерное вращение как одного тела вокруг неподвижной в пространстве оси  $Oz$  с угловой скоростью  $\dot{\theta} = \omega = \text{const}$ . При этом стержни расположены вдоль оси  $Oy$  ( $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ).

<sup>1</sup> О некоторых проявлениях гироскопической стабилизации. См. *Белецкий В.В.* Прикладные задачи устойчивости: Препринт № 121. М.: Ин-т прикл. мат. им. М.В. Келдыша АН СССР, 1990. 28 с.



Фиг. 1



Фиг. 2

При постановке задачи об устойчивости этого вращения следует учесть, что вектор  $\mathbf{G}$  кинетического момента системы "тело – стержни" сохраняет свою величину и направление. Поэтому неподвижную ось  $OZ$  целесообразно направить по вектору  $\mathbf{G}$ .

Используем также обычную для таких систем замену переменных

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \psi = \varphi_1 - \varphi_2$$

и исследуем устойчивость вращения системы по отношению к возмущениям величин  $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \varphi, \psi, \varphi', \psi'$ . Линеаризованные по этим величинам уравнения движения системы можно записать в матричной форме

$$Ax'' + \Gamma \omega x' + K \omega^2 x = 0$$

$$x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \psi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad A = \|a_{ij}\|, \quad \Gamma = \|g_{ij}\|, \quad K = \|K_{ij}\| \quad (1.1)$$

$$a_{11} = I_1 + \frac{mL^2}{6} + \frac{m(L+2R)^2}{2}, \quad a_{22} = I_1$$

$$a_{33} = a_{44} = \frac{mL^2}{8}, \quad a_{13} = a_{31} = mL(L+2R)/4$$

$$g_{12} = -g_{21} = 2I_1 - I_3, \quad g_{23} = -g_{32} = mL^2/12$$

$$K_{11} = I_3 - I_1 + mL^2/6 + m(L+2R)^2/2, \quad K_{22} = I_3 - I_1$$

$$K_{33} = K_{44} = mL(2L+3R)/12, \quad K_{13} = K_{31} = mL(2L+3R)/6$$

Здесь  $I_1, I_3$  – экваториальный и осевой моменты инерции тела  $Q$ , остальные же коэффициенты матриц  $A, \Gamma, K$  – нули.

Уравнения (1.1) в отличие от [1, 2] записаны в обобщенных координатах, поэтому их можно [5] интерпретировать, как уравнения движения некоторой ("приведенной") механической системы, для которой матрица  $A$  играет роль матрицы кинетической

энергии и которая находится под действием линейных потенциальных (центробежных) сил с матрицей  $-K$  и гироскопических (кориолисовых) – с матрицей  $-G$ . Эти обстоятельства, как известно [4], облегчают анализ условий устойчивости нулевого решения системы (1.1).

**2. Устойчивость относительного равновесия стержня.** Последнее уравнение системы (1.1) отщепляется от остальных, что вполне естественно, поскольку симметричные колебания стержней не вызывают колебаний оси тела (и наоборот). Поэтому одно из условий устойчивости имеет вид  $K_{44} > 0$ . Видно, что это условие обеспечивает устойчивость относительного равновесия стержня и формально выделяет две области допустимых значений параметров:

$$1) L > 0, \quad 2) L < -3R/2 \quad (2.1)$$

Конечно, длина стержня может принимать лишь положительные значения. Однако и отрицательные значения параметра  $L$  допускают вполне осмысленную интерпретацию. Можно показать, что исследование устойчивости такой конфигурации системы, при которой стержни будут направлены "внутри" тела, т.е. от точек  $O_1, O_2$  к точке  $O$  ( $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi$ ), сводятся к простой замене  $L$  на  $-L$  во всех рассматриваемых формулах. Поэтому в дальнейших построениях будем считать параметр  $L$  изменяющимся от  $-\infty$  до  $+\infty$ , имея в виду, что область  $L > 0$  отвечает "внешнему" расположению стержней, а область  $L < 0$  – так сказать, "внутреннему".

Таким образом, последнее уравнение системы (1.1) добавляет одну степень неустойчивости при

$$-3R/2 < L < 0 \quad (2.2)$$

**3. Анализ позиционных сил.** Рассмотрим теперь подсистему из трех уравнений и выделим соответствующий минор  $K_3$  в матрице  $K$

$$K_3 = \begin{vmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} \\ 0 & K_{22} & 0 \\ K_{13} & 0 & K_{33} \end{vmatrix}$$

Степень неустойчивости тривиального решения выделенной подсистемы равна числу отрицательных собственных значений матрицы  $K_3$ . Видно, что условия

$$K_{22} = 0, \quad K_{33} = 0, \quad \Delta = K_{11}K_{33} - K_{13}^2 = 0 \quad (3.1)$$

определяют в пространстве параметров задачи некоторые поверхности, отделяющие друг от друга области с различной степенью неустойчивости.

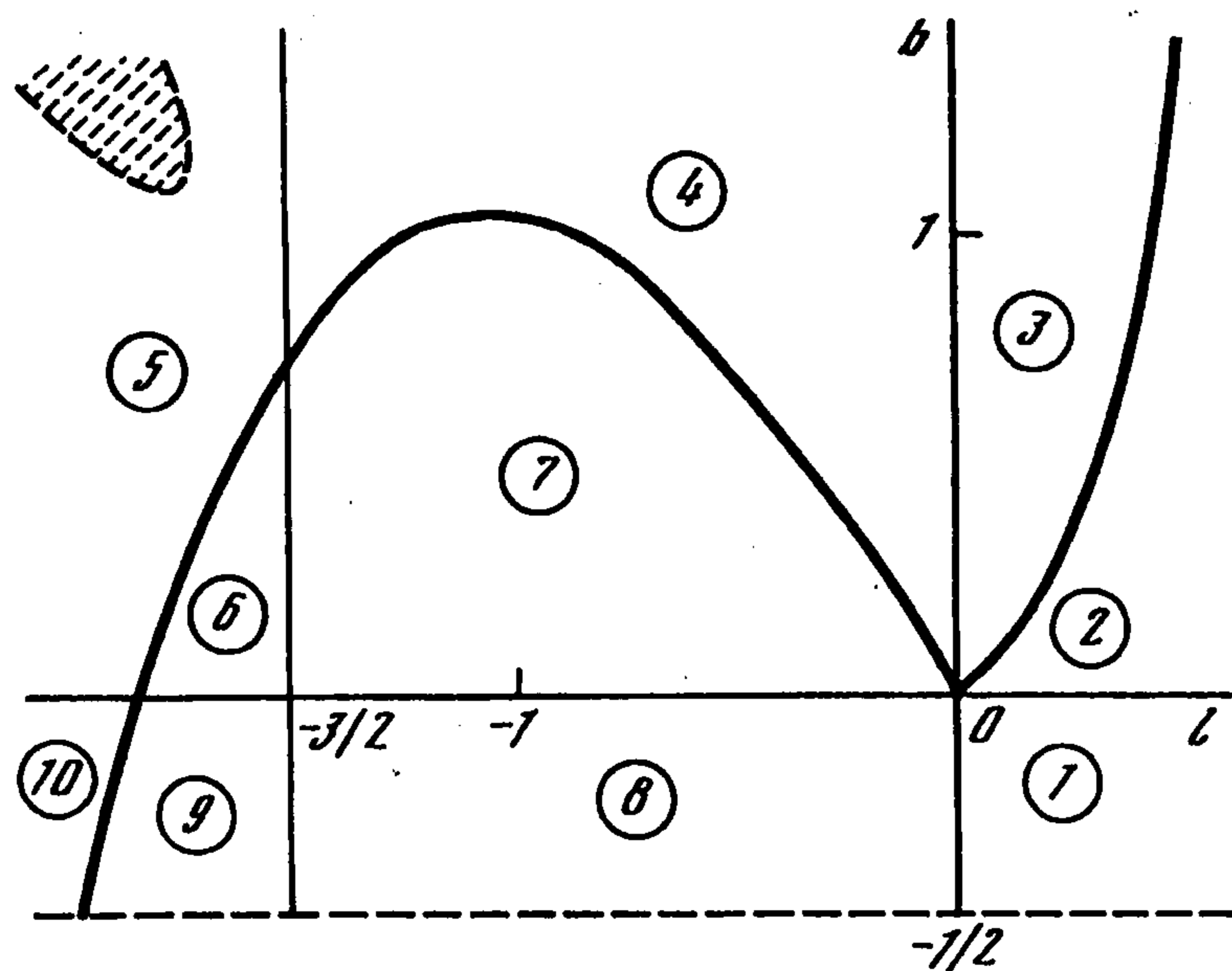
В качестве безразмерных параметров задачи выберем

$$b = \frac{I_1}{I_3} - 1, \quad l = L/R, \quad k = \rho R^3 / I_3$$

где  $\rho$  – погонная плотность стержня ( $m = \rho|L|$ ).

На фиг. 3 качественно изображено сечение поверхностей (3.1) плоскостью  $k = \text{const}$ . Это сечение спроектировано на полуплоскость  $b \geq -1/2$ , имеющую физический смысл, некоторым семейством линий. Последнее разбивает полуплоскость на 10 областей, в каждой из которых свой набор знаков у величин  $K_{22}, K_{33}, \Delta$  и, следовательно, своя степень неустойчивости как для подсистемы из первых трех уравнений –  $N_3$ , так и для полной системы (1.1) –  $N_4$  (таблица).

Прежде всего отметим области 1 и 9 с нулевой степенью неустойчивости. Как следует из теорем Кельвина – Четаева [4], в этих областях добавление к потенциальным силам сил гироскопических сохраняет свойство устойчивости исследуемого



Фиг 3

Уменьшение величины  $K$  "смещает" правую границу области 3 вправо, левую границу областей 6 и 9 – влево.

**4. Гироскопическая стабилизация.** Как известно, стабилизация гироскопическими силами равновесия приведенной системы, которая неустойчива при действии одних потенциальных сил, возможна лишь в тех областях, где степень неустойчивости четная. Однако области 4 и 8 необходимо сразу исключить из рассмотрения, поскольку гироскопические силы с матрицей  $\Gamma$  не влияют на характер симметричных колебаний стержней, описываемых координатой  $\varphi$  (см. последнее уравнение системы (1.1)).

Таким образом, свойство гироскопической стабилизации может проявиться лишь в областях 3 и 5. Для его обнаружения необходимо провести анализ корней векового уравнения системы (1.1), точнее подсистемы из трех ее первых уравнений, и выяснить, в каких частях областей 3 и 5 эти корни чисто мнимые. Не представляет особого труда получение алгебраических условий, обеспечивающих требуемые свойства корней. Однако эти условия, записанные в форме явной зависимости от параметров  $l, b, k$ , приобретают очень громоздкий вид и приводить их здесь нецелесообразно.

Качественный результат численных расчетов, проведенных по полученным формулам, состоит в том, что условия устойчивости выполняются, во-первых, в областях 1 и 9, как и следовало ожидать. Во-вторых, условия устойчивости выполняются практически во всей области 3, т.е. здесь реализуется гироскопическая стабилизация вращения. Что же касается области 5, то гироскопическая стабилизация проявляется лишь в той ее части, которая осталась незаштрихованной на фиг. 3.

Отметим некоторые любопытные особенности. Во-первых, при "внешнем" расположении стержней гироскопическая стабилизация достигается лишь при некотором ограничении сверху для длины стержней (область 3); при "внутреннем" же – наоборот, длина стержней ограничена снизу (область 5). Во-вторых, при достаточной длине стержней (вблизи правой границы для области 3 и достаточно далеко слева для

движения. Более того, оно сохраняется и при добавлении неучтенных выше диссипативных сил, зависящих от  $\alpha, \beta, \psi, \varphi$ , лишь бы эти силы не тормозили вращение системы.

Любопытно, что при "внешнем" ( $L > 0$ ) расположении стержней их длина не влияет на свойство устойчивости, а при "внутреннем" ( $L < 0$ ) длина стержня должна быть ограниченной некоторыми ненулевыми значениями как снизу, так и сверху.

Область	$K_{22}$	$K_{33}$	$\Delta$	$N_3$	$N_4$
1,9	+	+	+	0	0
2,6	-	+	+	1	1
3,5	-	+	-	2	2
4	-	-	+	3	4
7	-	-	-	2	3
8	+	-	-	1	2
10	+	+	-	1	1

области 5) система вращается вокруг средней оси инерции для невозмущенной формы ( $K_{22} < 0$ , но  $K_{11} > 0$ ).

**5. Редукция системы.** Рассматриваемая система обладает одним интересным свойством.

Введем обозначения  $G_1, G_2$  – проекции кинетического момента  $G$  на оси  $Ox_1, Oy_1$ . Из теоремы об изменении  $G$  вытекает, что

$$G_1^* - \omega G_2 = 0, \quad G_2^* + \omega G_1 = 0 \quad (5.1)$$

Можно проверить, что

$$G_1 = a_{11}\alpha^* + a_{13}\psi^* + k_{22}\omega\beta, \quad G_2 = a_{22}\beta^* + k_{11}\omega\alpha - k_{33}\omega\psi$$

и первые два уравнения системы (1.1) совпадают с (5.1). Уравнения (5.1) имеют два очевидных частных интеграла

$$G_1(t) \equiv 0, \quad G_2(t) \equiv 0 \quad (5.2)$$

Именно это обстоятельство фактически было использовано выше при выборе неподвижной оси  $Oz$ , но до сих пор оно никак не проявлялось. Интегралы (5.2) можно использовать для понижения порядка динамической системы (1.1).

Например, в отсутствии стержней ( $m = 0$ ) для координаты  $\alpha$  (или  $\beta$ ) получаем уравнение гармонических колебаний

$$I_1^2 \alpha'' + \omega^2 (I_3 - I_1)^2 \alpha = 0$$

как для "сплюснутого" тела ( $I_3 > I_1$ ), так и для "вытянутого" ( $I_3 < I_1$ ), что свидетельствует о гироскопическом характере стабилизации вращения тела вокруг наибольшей оси его эллипсоида инерции.

Использование частных интегралов типа (5.2) в общем случае может изменить характер решаемой задачи устойчивости, так как формально заменяет задачу устойчивости во всем фазовом пространстве на задачу устойчивости на некотором многообразии. Однако для рассматриваемой системы обе задачи, очевидно, равносильны. Указанная редукция лишь исключает из числа собственных частот системы (1.1) две частоты  $\pm\omega$ , соответствующие системе (5.1).

Эта равносильность позволила, в частности, с помощью (5.2) исключить  $\varphi, \varphi^*$  из первых двух уравнений системы (1.1). Алгебраические условия устойчивости тривиального решения редуцированной системы имеют также громоздкий вид, но численные расчеты, проведенные по ним, привели к тем же результатам, что и для полной системы.

**6. Заключение.** Таким образом, проведенный анализ показал, что при вращении системы, состоящей из нескольких тел, в определенном диапазоне ее параметров возможно проявление гироскопической стабилизации. Конечно, эта стабилизация может быть разрушена диссипативными силами, например трением в шарнирах. Однако при относительной малости последних можно рассчитывать, что привлечение активных средств управления конструкцией, параметры которой принадлежат, например, области 3, потребует менее жестких требований к ресурсам управления, чем для точек области 2. Поэтому поиск возможностей гироскопической стабилизации может оказаться полезным и для прикладных задач динамики космических аппаратов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Докучаев Л.В. Динамика быстровращающегося космического аппарата с упругими штангами // Изв. АН СССР. МТТ. 1969. № 2. С. 3–9.
2. Васильев В.Г., Ковтуненко В.М. Об устойчивости вращения космического аппарата с шарнирно присоединенными стержнями // Космич. исследования. 1969. Т. 7. № 5. С. 627–636.
3. Рубановский В.Н. Устойчивость установившихся движений сложных механических систем // Итоги науки и техники. Сер. Общая механика. ВИНТИ, М.: ВИНТИ, 1982. Т. 5. С. 62–134.
4. Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М.; Л.: Гостехиздат, 1946. 204 с.
5. Меркин Д.Р. Гирскопические системы. М.: Гостехиздат, 1956. 229 с.

Сидней, Москва

Поступила в редакцию  
1.IV.1994