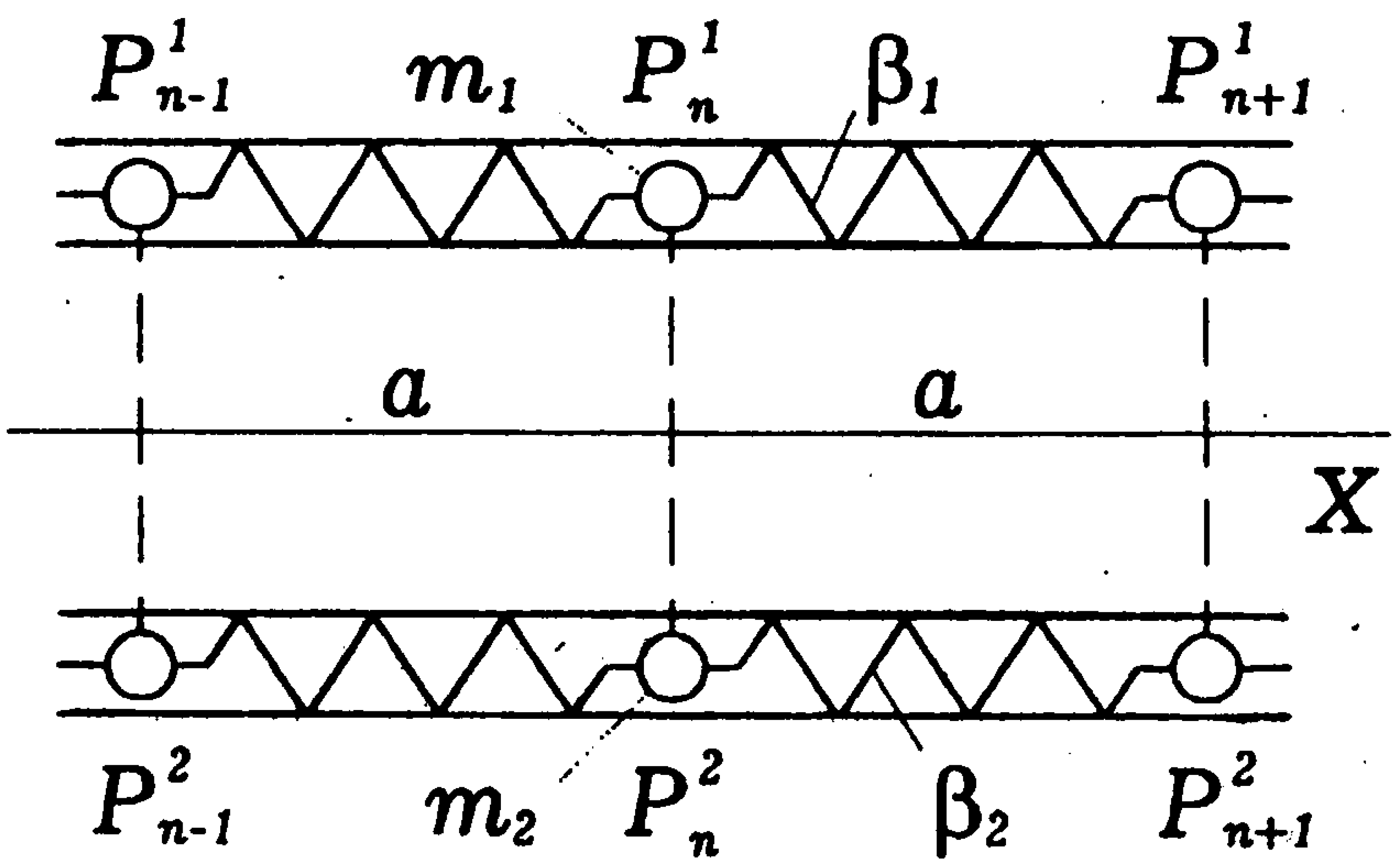
УДК 531.36

© 1995 г. И.Ш. Ахатов, В.А. Байков, К.Р. Хуснутдинова

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА СВЯЗАННЫХ ЦЕПОЧЕК ЧАСТИЦ

Рассматривается длинноволновое приближение уравнений движения двух линейных периодических цепочек частиц с нелинейным взаимодействием между ними. Получающаяся система уравнений представляет собой модель для описания волновых процессов в двухкомпонентных средах. Методами группового анализа (см., например, [1]) выделяются подмодели, допускающие наиболее широкую группу точечных преобразований. Для двух подмоделей, имеющих ясную механическую интерпретацию, приводятся частные инвариантные решения. Показывается, что если потенциал нелинейного взаимодействия может быть представлен в виде гармонической функции относительного смещения частиц в цепочках, а звуковые скорости невзамодействующих цепочек различны, то система является своеобразным солитонным фильтром; определяются разрешенные скорости солитонов. Приводятся некоторые решения, описывающие длинноволновую динамику системы при наличии дополнительных сдвиговых сил.

1. Рассмотрим две связанные линейные периодические цепочки частич (фиг. 1). Пусть масса любой частицы "верхней" цепочки равна m_1, "нижней" – m_2. В равновесной конфигурации расстояние между соседними частицами в цепочках равно a. Предполагается, что частицы могут перемещаться только вдоль гладких направляющих, параллельных оси X. Взаимодействие между ближайшими соседями в цепоч-



Фиг 1

ках рассматривается в обычном гармоническом приближении, однако константы взаимодействия, вообще говоря, различны: β_1 и β_2. Функция, характеризующая взаимодействие между цепочками, зависит от смещений соответствующих частиц (P^1_n и P^2_n). Вид этой функции пока не конкретизируется и является произвольным элементом в рассматриваемой далее задаче групповой классификации.

Пусть u_n – смещение из положения равновесия частицы P_n^1, w_n – частицы P_n^2. Динамика системы определяется уравнениями

$$m_1\ddot{u}_n = \beta_1(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) - \partial H(u_n, w_n)/\partial u_n$$
$$m_2\ddot{w}_n = \beta_2(w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1}) - \partial H(u_n, w_n)/\partial w_n \qquad (1.1)$$

(точка означает производную по времени). Здесь $H(u_n, w_n)$ – энергия взаимодействия частиц P_n^1 и P_n^2.

Переходя к безразмерным переменным

$$\tilde{t} = \frac{c_1}{a}t, \quad \tilde{x} = \frac{x}{a}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{a}, \quad \tilde{w} = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^{1/2}\frac{w}{a}, \quad \tilde{H} = \frac{H}{m_1 c_1^2}$$

$$\left(c^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2} = \frac{\beta_2 m_1}{\beta_1 m_2}, \quad c_i^2 = \frac{\beta_i a^2}{m_i}, \quad i = 1,2\right)$$

и вводя силовую функцию $f(\tilde{u},\tilde{w}) = -\tilde{H}(\tilde{u},\tilde{w})$, в длинноволновом приближении из (1.1) получим систему уравнений в частных производных (тильду опускаем)

$$u_{tt} - u_{xx} = f_u(u, w), \quad w_{tt} - c^2 w_{xx} = f_w(u, w) \qquad (1.2)$$

2. В таблице приведены результаты классификации уравнений (1.2) по допускаемым группам точечных преобразований. В случае $f_{uw}(u, w) = 0$ система (1.2) расщепляется на два независимых уравнения Клейна – Гордона, для которого групповая классификация была проведена Ли (см., например, [2]). Исследовался [3] случай $c^2 = 1$, причем были найдены высшие симметрии уравнений и приведены случаи полного и частичного их интегрирования. Поэтому в дальнейшем эти два случая исключены.

$f(u, w)$	Допускаемые операторы
Произвольная функция	$X_1 = \dfrac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \dfrac{\partial}{\partial x}$
$u^\sigma F(u/w), \quad \sigma \neq 0$ $F(z) \neq \varepsilon\left(\delta - \dfrac{1}{z}\right)^\sigma$ при $\sigma \neq 2$ $F(z) \neq A + \dfrac{B}{z^2} + \dfrac{1}{z}$ при $\sigma = 2$	$X_3 = (\sigma - 2)\left(t\dfrac{\partial}{\partial t} + x\dfrac{\partial}{\partial x}\right) - 2\left(u\dfrac{\partial}{\partial u} + w\dfrac{\partial}{\partial w}\right)$
$e^u F(\tilde{\delta}u - w)$ $F(z) \neq \varepsilon e^z$	$X_3 = t\dfrac{\partial}{\partial t} + x\dfrac{\partial}{\partial x} - 2\left(\dfrac{\partial}{\partial u} + \tilde{\delta}\dfrac{\partial}{\partial w}\right)$
$F(u/w) + \tilde{\varepsilon}\ln u$ $F(z) \neq \tilde{\varepsilon}\ln\left(\delta - \dfrac{1}{z}\right)$	$X_3 = t\dfrac{\partial}{\partial t} + x\dfrac{\partial}{\partial x} + u\dfrac{\partial}{\partial u} + w\dfrac{\partial}{\partial w}$
$F(\delta u - w) + Auw + (\varepsilon - \delta A)u^2/2$ $F'''(z) \neq 0$	$X_i = \varphi_i(t,x)\left(\dfrac{\partial}{\partial u} + \delta\dfrac{\partial}{\partial w}\right), \quad i = 3,4,5,6$
a) $\lambda^2 = \dfrac{\delta\varepsilon - A}{\delta(1-c^2)} \neq 0, \quad \mu^2 = \dfrac{\delta\varepsilon c^2 - A}{\delta(1-c^2)} \neq 0;$	$\varphi_3 = \cos\lambda x\cos\mu t, \quad \varphi_4 = \sin\lambda x\sin\mu t$ $\varphi_5 = \cos\lambda x\sin\mu t, \quad \varphi_6 = \sin\lambda x\cos\mu t$
b) $\lambda = 0, \quad \mu^2 = -\dfrac{A}{\delta} = -\varepsilon;$	$\varphi_3 = x\cos\mu t, \quad \varphi_4 = x\sin\mu t$ $\varphi_5 = \cos\mu t, \quad \varphi_6 = \sin\mu t$

$f(u, w)$	Допускаемые операторы
Произвольная функция	$X_1 = \dfrac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \dfrac{\partial}{\partial x}$
	$\varphi_5 = \cos\mu t, \quad \varphi_6 = \sin\mu t$
c) $\lambda^2 = \dfrac{A}{\delta c^2} = \varepsilon, \quad \mu = 0$	$\varphi_3 = t\cos\lambda x, \quad \varphi_4 = t\sin\lambda x$ $\varphi_5 = \cos\lambda x, \quad \varphi_6 = \sin\lambda x$
$F(\delta u - w) + \varepsilon uw - \delta\varepsilon u^2/2$	$X_i = \varphi_i(t,x)\left(\dfrac{\partial}{\partial u} + \delta\dfrac{\partial}{\partial w}\right), \quad i = 3,4,5,6$
$F'''(z) \neq 0$ $\lambda^2 = \dfrac{\varepsilon}{\delta(c^2 - 1)}$	$\varphi_3 = \cos\lambda x\cos\lambda t, \quad \varphi_4 = \sin\lambda x\sin\lambda t,$ $\varphi_5 = \cos\lambda x\sin\lambda t, \quad \varphi_6 = \sin\lambda x\cos\lambda t,$
$F(\delta u - w) + Au$	$X_i = \varphi_i(t,x)\left(\dfrac{\partial}{\partial u} + \delta\dfrac{\partial}{\partial w}\right), \quad i = 3,4,5,6$
$F'''(z) \neq 0$	$\varphi_3 = tx, \quad \varphi_4 = t, \quad \varphi_5 = x, \quad \varphi_6 = 1$
1) $F(z) = \varepsilon z^\sigma + Bz, \ \sigma \neq 0, 1, 2$	$X_7 = t\dfrac{\partial}{\partial t} + x\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{2}{2-\sigma}\left(u\dfrac{\partial}{\partial u} + w\dfrac{\partial}{\partial w}\right) +$ $+ \dfrac{1-\sigma}{2-\sigma}\psi(t,x)\left(\dfrac{\partial}{\partial u} + \delta\dfrac{\partial}{\partial w}\right)$
2) $F(z) = \varepsilon e^z + Bz$	$X_7 = t\dfrac{\partial}{\partial t} + x\dfrac{\partial}{\partial x} + 2\dfrac{\partial}{\partial w} + \psi(t,x)\left(\dfrac{\partial}{\partial u} + \delta\dfrac{\partial}{\partial w}\right)$
3) $F(z) = \varepsilon\ln z + Bz$	$X_7 = t\dfrac{\partial}{\partial t} + x\dfrac{\partial}{\partial x} + u\dfrac{\partial}{\partial u} + w\dfrac{\partial}{\partial w} + \dfrac{1}{2}\psi(t,x)\left(\dfrac{\partial}{\partial u} + \delta\dfrac{\partial}{\partial w}\right)$
4) $F(z) = \varepsilon z\ln z$	$X_7 = t\dfrac{\partial}{\partial t} + x\dfrac{\partial}{\partial x} + 2\left(u\dfrac{\partial}{\partial u} + w\dfrac{\partial}{\partial w}\right) + \dfrac{\varepsilon}{\delta(c^2-1)} \times$ $\times[(1+\delta^2 c^2)t^2 + (1+\delta^2)x^2]\left(\dfrac{\partial}{\partial u} + \delta\dfrac{\partial}{\partial w}\right)$
$\dfrac{A}{2}u^2 + \dfrac{B}{2}w^2 + uw + Cu + Dw$	$X_{\varphi,\chi} = \varphi(t,x)\dfrac{\partial}{\partial u} + \chi(t,x)\dfrac{\partial}{\partial w},$ где $\varphi_{tt} - \varphi_{xx} = A\varphi + \chi, \quad \chi_{tt} - c^2\chi_{xx} = \varphi + B\chi$
a) $AB \neq 1, \quad C = D = 0;$	$X_3 = u\dfrac{\partial}{\partial u} + w\dfrac{\partial}{\partial w};$
b) $AB = 1$	$X_3 = \left(u + \dfrac{D - BC}{2(A+B)}t^2\right)\dfrac{\partial}{\partial u} +$ $+ \left(w - \dfrac{A(D-BC)}{2(A+B)}t^2 + \dfrac{AC+D}{A+B}\right)\dfrac{\partial}{\partial w}$

Примечания к таблице: 1) $c^2 \neq 1, \quad f_{uw}(u,w) \neq 0$;

2) A, B, C, D, σ – произвольные, δ – положительная, $\tilde{\delta}$ – неотрицательная вещественные постоянные; $\varepsilon = \pm 1, \ \tilde{\varepsilon} = 0, \pm 1$;

3) постоянные λ и μ принимают вещественные или мнимые значения;

4) $\psi(t,x) = \dfrac{1}{\delta(c^2-1)}\{[A\delta c^2 + B(1+\delta^2 c^2)]t^2 + [A\delta + B(1+\delta^2)]x^2\}$;

5) в случае $f(u, w) = F(\delta u - w) + Au$, где $F'''(z) \neq 0$ с точностью до преобразований эквивалентности (2.2) можно считать $A = B = 0$;

6) дополнительные операторы для пересекающихся подслучаев приводятся только один раз.

Классификация проведена с точностью до всех непрерывных преобразований эквивалентности, полученных инфинитезимальным методом [1], и очевидных дискретных преобразований:

$$\tilde{t} = a_1 t + a_2, \quad \tilde{x} = a_1 x + a_3, \quad \tilde{u} = a_4 u + a_5, \quad \tilde{w} = a_4 w + a_6, \quad \tilde{f} = a_4^2 a_1^{-2} f + a_7$$

$$t \to -t, \quad x \to x; \quad t \to t, \quad x \to -x; \tag{2.1}$$

$$u \to -u, \quad w \to w; \quad u \to u, \quad w \to -w$$

$$t \to t, \quad x \to x/c; \quad u \to w, \quad w \to u, \quad c \to 1/c$$

(a_i (i = 1, 2,..., 7) – произвольные постоянные, удовлетворяющие условию невырожденности $a_1 a_4 \neq 0$).

Оператор допускаемой точечной группы имеет вид

$$X = \xi^1 \frac{\partial}{\partial t} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x} + \eta^1 \frac{\partial}{\partial u} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial w}$$

$$\xi^1 = C_1 t + C_2, \quad \xi^2 = C_1 x + C_3, \quad \eta^1 = C_4 u + \varphi(t, x), \quad \eta^2 = C_4 w + \psi(t, x)$$

где функции $\varphi(t, x)$ и $\psi(t, x)$ удовлетворяют классифицирующим уравнениям

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} = (2C_1 - C_4) f_u + (C_4 u + \varphi) f_{uu} + (C_4 w + \psi) f_{uw}$$

$$\psi_{tt} - c^2 \psi_{xx} = (2C_1 - C_4) f_w + (C_4 u + \varphi) f_{uw} + (C_4 w + \psi) f_{ww}$$

Здесь C_i (i = 1, 2, 3, 4) – произвольные постоянные.

Классифицирующее соотношение имеет вид

$$(b_1 u + b_2) f_u + (b_1 w + b_3) f_w + b_4 f = b_5 u + b_6 w + b_7$$

где b_i (i = 1, 2,..., 7) – постоянные коэффициенты.

В подслучаях группа преобразований эквивалентности может быть шире, чем (2.1). Например, если $f(u, w) = F(\delta u - w) + Au$, где δ и A – постоянные, $F'''(z) \neq 0$ (штрих означает производную по аргументу функции) все дополнительные непрерывные преобразования имеют вид

$$\tilde{u} = u + \zeta, \quad \tilde{w} = w + \delta\zeta, \quad \tilde{f} = f + \theta \quad . \tag{2.2}$$

где

1) $\theta = 0$, $\zeta = a_8 tx + a_9 t + a_{10} x$ с произвольными постоянными a_8, a_9 и a_{10};

2) $\theta = 0$, $\zeta = \dfrac{c^2 t^2 + x^2}{2(c^2 - 1)} (\tilde{A} - A)$, где $\tilde{A}$ удовлетворяет уравнению $d\tilde{A} / da = \Phi(\tilde{A}c, \delta)$, $\tilde{A}\big|_{a=0} = A$;

3) $\theta = \kappa(A, c, \delta)(\delta u - w)$, $\zeta = \dfrac{\kappa(A, c, \delta)}{2\delta(c^2 - 1)} [(1 + \delta^2 c^2) t^2 + (1 + \delta^2) x^2]$

Здесь Φ и κ – произвольные функции своих аргументов.

3. Пусть силовая функция имеет вид $f(u, w) = -(\delta u, w)^4$. Заменой

$$\tilde{u} = \delta u, \quad \tilde{w} = w, \quad \tilde{t} = 2t, \quad \tilde{x} = 2x \tag{3.1}$$

система уравнений (1.2) приводится в этом случае к виду (тильду опускаем)

$$u_{tt} - u_{xx} = -\delta^2 (u - w)^3, \quad w_{tt} - c^2 w_{xx} = (u - w)^3 \tag{3.2}$$

Можно показать, что рассматриваемая подмодель соответствует связи частиц P_n^1 и P_n^2 посредством гуковской пружины, если выполняется условие $|u_n - w_n| \ll l$, где l –

расстояние между цепочками (длина недеформированной пружины). При этом в (3.2) следует считать $\delta^2 = m_2/m_1$.

Базис допускаемой уравнениями (3.2) алгебры Ли при учете (3.1) составляют следующие операторы:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial w}, \quad X_4 = t\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial w}\right), \quad X_5 = x\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial w}\right)$$
$$X_6 = tx\left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial w}\right), \quad X_7 = t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u} - w\frac{\partial}{\partial w} \tag{3.3}$$

Уравнения (3.2) допускают также отражения

$$t \to -t, \quad x \to x; \quad t \to t, \quad x \to -x; \quad u \to -u, \quad w \to -w \tag{3.4}$$

Рассмотрим частные инвариантные решения уравнений (3.2). Решение, инвариантное относительно оператора $X_2 + \alpha X_5$ ($\alpha = 0$ или 1), имеет вид (C_1 и C_2 – произвольные постоянные, с точностью до первого преобразования эквивалентности (2.2) можно считать $C_1 = C_2 = 0$)

$$u = \frac{\delta^2}{1+\delta^2}p(t) + \xi, \quad w = -\frac{1}{1+\delta^2}p(t) + \xi$$
$$\xi = \frac{\alpha}{2(1+\delta^2)}[(1+\delta^2 c^2)t^2 + (1+\delta^2)x^2] + C_1 t + C_2 \tag{3.5}$$

Здесь

$$\ddot{p} = -\lambda p^3 - \mu, \quad \lambda = 1+\delta^2, \quad \mu = \alpha(c^2 - 1) \tag{3.6}$$

Интеграл энергии уравнения (3.6) запишем в виде

$$(\dot{p})^2 + \frac{\lambda}{2}p^4 + 2\mu p - 2E^* = 2E, \quad E^* = -\frac{3}{4}\mu\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{1/3}$$

Любому значению $E > 0$ соответствует ограниченное периодическое решение уравнения (3.6), описывающее нелинейные колебания около положения равновесия $p = -(\mu/\lambda)^{1/3}$ в области $p \in [p_1, p_2]$, где p_1 и p_2 соответственно наименьший и наибольший вещественные корни уравнения $\lambda p^4/4 + \mu p - E^* = E$.

При $\alpha = 0$ решение (3.5) является пространственно однородным (что можно рассматривать как случай предельно длинных волн) и может быть выражено через эллиптические функции Якоби, например в виде

$$u = \frac{\delta^2}{1+\delta^2}\left(\frac{4E}{1+\delta^2}\right)^{1/4} \operatorname{cn}[(4E(1+\delta^2))^{1/4}t, k] = -\delta^2 w, \quad k^2 = \frac{1}{2}$$

Частицы в цепочках смещаются в противоположных направлениях, причем амплитуды колебаний совпадают только в случае $\delta^2 = 1$ ($m_1 = m_2$). В пределе $\delta \to 0$ ($m_1 \gg m_2$) получим решение, описывающее колебания только "нижних" частиц

$$u = 0, \quad w = (4E)^{1/4}\operatorname{cn}[(4E)^{1/4}t, k], \quad k^2 = 1/2$$

Решение, инвариантное относительно оператора $X_1 + \upsilon X_2 + \alpha X_4$ ($\alpha = 0$ или 1, υ – произвольная постоянная), имеет при $\upsilon^2 \neq 1, c^2, (1+\delta^2c^2)/(1+\delta^2)$ вид (с точностью до первого преобразования эквивалентности (2.2) можно считать $C_1 = C_2 = 0$)

$$u = \sigma^{-1}\{\delta^2(\upsilon^2 - c^2)p(x - \upsilon t) + \eta\}, \quad w = \sigma^{-1}\{(1-\upsilon^2)p(x-\upsilon t) + \eta\} \tag{3.7}$$
$$\sigma = \delta^2(\upsilon^2 - c^2) + \upsilon^2 - 1$$
$$\eta = \alpha(1+\delta^2)\upsilon t x - \frac{\alpha}{2}[(1+\delta^2)t^2 + (1+\delta^2)x^2] + C_1 x - \upsilon t) + C_2$$

Здесь

$$p'' = -\lambda_1 p^3 - \mu_1, \quad \lambda_1 = \frac{\sigma}{(\upsilon^2 - 1)(\upsilon^2 - c^2)}, \quad \mu_1 = \frac{\alpha(1 - c^2)}{(\upsilon^2 - 1)(\upsilon^2 - c^2)} \tag{3.8}$$

Если $\lambda_1 > 0$, то выражение (3.8) с точностью до обозначений совпадает с (3.6). Следовательно, в этом случае решения уравнения (3.8) ограничены и описывают периодические бегущие волны. Волны могут распространяться со скоростями, лежащими в диапазоне

$$\upsilon^2 \in \,]S, M[\, \cup \,]L, +\infty[\tag{3.9}$$

$$\left(S = \min\{1, c^2\}, \quad M = \frac{1 + \delta^2 c^2}{1 + \delta^2}, \quad L = \max\{1, c^2\} \right)$$

В частности, при $\alpha = 0$ получаем решение в виде кноидальных волн

$$u = U\left(\frac{4E}{\lambda_1}\right)^{1/4} \mathrm{cn}[(4E\lambda_1)^{1/4}(x - \upsilon t), k] = Ww$$

$$U = \frac{\delta^2(\upsilon^2 - c^2)}{\sigma}, \quad W = \frac{\delta^2(\upsilon^2 - c^2)}{1 - \upsilon^2}, \quad k^2 \frac{1}{2}, \quad E > 0$$

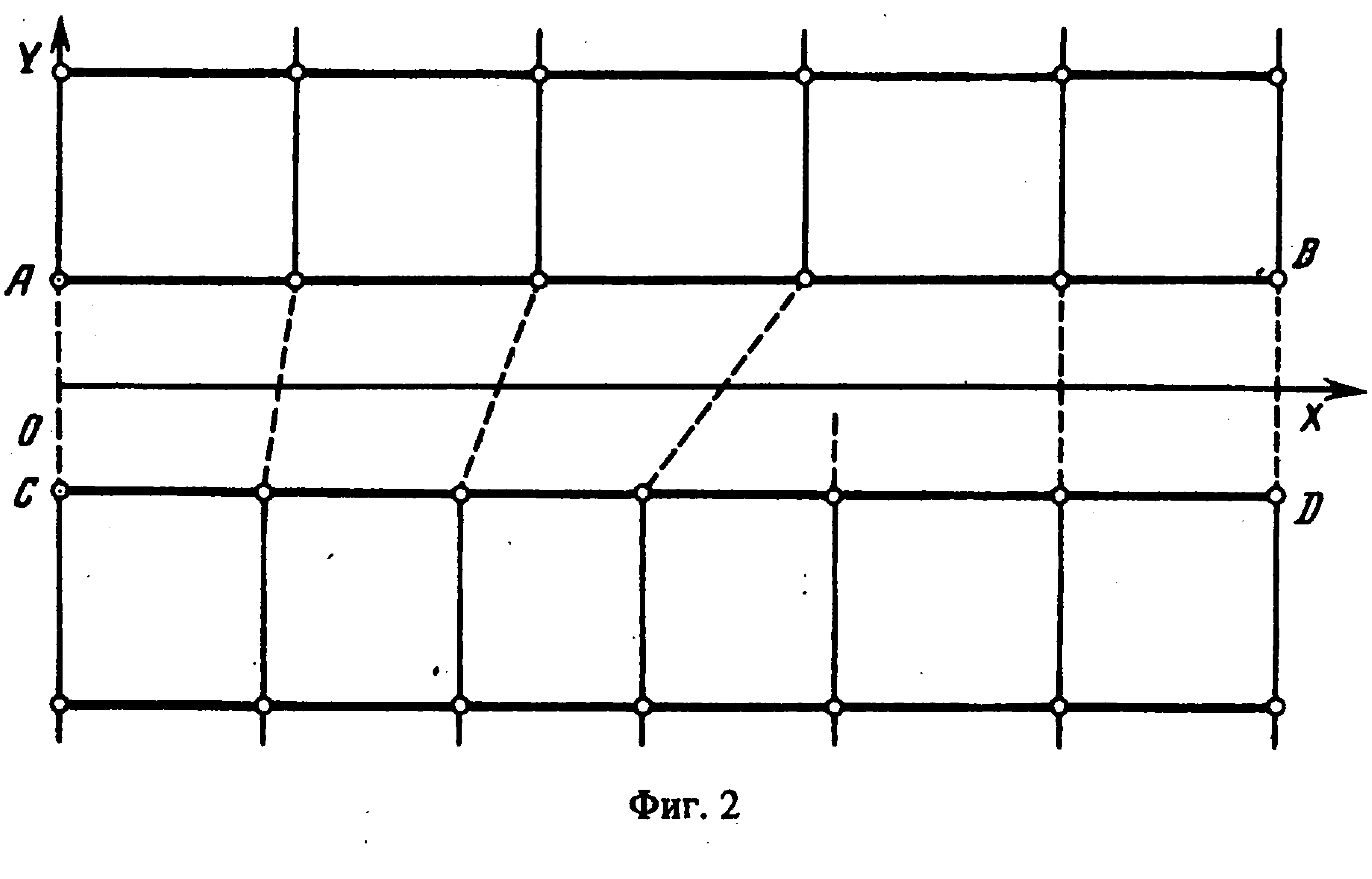
Если $\lambda_1 < 0$, то (3.8) можно рассматривать как уравнение движения частицы в поле потенциального горба $U(p) = -|\lambda_1| p^4/4 + \mu_1 p$, в этом случае нетривиальных ограниченных решений не существует.

Используя допускаемые уравнениями (3.2) отражения (3.4), можно получить решения с другими комбинациями знаков.

4. Пусть силовая функция имеет вид $f(u, w) = \cos(\delta u - w) - 1$. Заменой $\tilde{u} = \delta u$, $\tilde{w} = w$ система уравнений (1.2) приводится в этом случае к виду (тильду опускаем)

$$u_{tt} - u_{xx} = -\delta^2 \sin(u - w), \quad w_{tt} - c^2 w_{xx} = \sin(u - w) \tag{4.1}$$

Изучаемая подмодель является возможным обобщением модели дислокации Френкеля – Конторовой (ФК) [4, 5]. Если в модели ФК рассматривается сдвиг одной части кристалла относительно другой его части, считающейся неподвижной, то здесь предполагается, что деформируются обе части кристалла (фиг. 2). Считая, что полуплоскости $x = \mathrm{const}$, $y > 0$ и $x = \mathrm{const}$, $y < 0$ совершают поступательное движение



Фиг. 2

вдоль X, приходим к модели связанных цепочек частиц (AB и CD на фиг. 2). Принимая для длинноволновых движений потенциал нелинейного взаимодействия в виде гармонической функции относительного смещения частиц в цепочках, в обезразмеренных переменных получим уравнения (4.1), в которых следует считать $\delta^2 = m_2/m_1$. Размерные и безразмерные переменные связаны соотношениями

$$\tilde{t} = \chi t, \quad \tilde{x} = \chi c_1 x, \quad \tilde{u} = \frac{a}{2\pi} u, \quad \tilde{w} = \frac{a}{2\pi} w, \quad \chi = \left(\frac{am_2}{2\pi\tau}\right)^{1/2}$$

где τ – константа взаимодействия, имеющая размерность силы.

Переход от (4.1) к модели ФК осуществляется при $\delta \to 0$ ($m_1 \gg m_2$). Действительно, полагая $u = 0$, для смещений частиц массы m_2 в этом случае получим известное синус-уравнение Гордона, к которому приводит и модель ФК.

Базис допускаемой уравнениями (4.1) алгебры Ли составляют первые шесть операторов базиса (3.3). Уравнения (4.1) допускают также отражения (3.4).

Рассмотрим некоторые решения уравнений (4.1). Решение, инвариантное относительно оператора $X_2 + \alpha X_5$ (α – неотрицательная постоянная), имеет вид (3.5), где функция $p(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{p} = -\lambda \sin p - \mu, \quad \lambda = 1 + \delta^2, \quad \mu = \alpha(c^2 - 1) \tag{4.2}$$

Интеграл энергии уравнения (4.2) запишем в виде

$$(\dot{p})^2 + 2\lambda(1 - \cos p) + 2\mu p - 2E^* = 2E$$
$$E^* = \lambda - (\lambda^2 - \mu^2)^{1/2} + \mu p_0, \quad p_0 = -\arcsin \mu / \lambda \tag{4.3}$$

Если выполняется условие

$$|\mu| < \lambda \tag{4.4}$$

то любому значению E из области

$$0 < E < 2\lambda - \pi|\mu| - 2R^* \tag{4.5}$$

соответствует ограниченное периодическое решение уравнения (4.2), описывающее нелинейные колебания около положения равновесия $p = p_0$ в области $p \in [p_1, p_2]$, где p_1 и p_2 – соответственно наименьший и наибольший вещественные корни уравнения $\lambda(1 - \cos p) + \mu p - E^* = E$ на интервале $]-\pi + \arcsin a/\lambda, \pi + \arcsin a/\lambda[$. Предполагается, что $p_0 \in\ ]-\pi/2, \pi/2[$.

Пусть $\alpha = 0$. Тогда (4.2) имеет вид уравнения колебаний математического маятника и интегрируется в эллиптических функциях (см., например, [6]). Соответствующее пространственно однородное решение уравнений (4.1), описывающее колебания частиц около положения равновесия, имеет вид

$$u = \frac{2\delta^2}{1+\delta^2} \arcsin\{k \operatorname{sn}[(1+\delta^2)^{1/2} t, k]\} = -\delta^2 w, \quad 0 < k < 1$$

Решение, инвариантное относительно оператора $X_1 + \upsilon X_2 + \alpha X_4$ (υ – произвольная, а α – неотрицательная постоянные), имеет при $\upsilon^2 \neq 1$, c^2, $(1 + \delta^2 c^2)/(1 + \delta^2)$ вид (3.7), где функция $p(x - \upsilon t)$ удовлетворяет уравнению

$$p'' = -\lambda_1 \sin p - \mu_1 \tag{4.6}$$

причем λ_1 и μ_1 – те же, что в (3.8).

Если $\lambda_1 < 0$, то заменой $\tilde{p} = p + \pi$ уравнение (4.6) приводится к виду $\tilde{p}'' = -|\lambda_1| \sin \tilde{p} - \mu_1$. Поэтому при анализе уравнения (4.6) можно считать $\lambda_1 > 0$, тогда оно с точностью до обозначений совпадает с (4.3). Следовательно, при выполнении условий вида (4.4), (4.5) решения уравнения (4.6) ограничены и описывают периодические бегущие волны. При $\lambda_1 > 0$ волны распространяются со скоростями из диапазона (3.9), при $\lambda_1 < 0$ – из диапазона

$$\upsilon^2 \in [0, S[\cup]M, L[\tag{4.7}$$

В частности, при $\alpha = 0$ получаем следующие решения уравнений (4.1) в форме периодических бегущих волн:

"быстрые" волны, распространяющиеся со скоростями из диапазона (3.9)

$$u = 2U \arcsin\{k \operatorname{sn}[\lambda_1^{1/2}(x - \upsilon t), k]\} = Ww$$

"медленные" волны, распространяющиеся со скоростями из диапазона (4.7)

$$u = 2U \arcsin\{\operatorname{dn}[|\lambda_1|^{1/2}(x - \upsilon t), k]\} = Ww$$

Здесь $0 < k < 1$.

В предельно нелинейном случае $k = 1$ периодические "медленные" волны превращаются в уединенные движущиеся волны (солитоны):

$$u = 4U \operatorname{arctg}\{\exp[|\lambda_1|^{1/2}(x - \upsilon t)]\} = Ww$$

Используя отражения (3.4), можно получить решения с другими комбинациями знаков.

При $m_1 \gg m_2$ ($\delta \to 0$) солитоны могут распространяться со скоростями $\upsilon^2 \in [0, c^2[$. При этом сдвиг частиц в кристалле не зависит от скорости распространения волны. В случае, когда массы m_1 и m_2 соизмеримы, солитоны могут распространяться со скоростями из диапазона (4.7), т.е. имеет место

$$\upsilon^2 \in [0, 1[\cup]M, c^2[\text{ при } c^2 > 1; \quad \upsilon^2 \in [0, c^2[\cup]M, 1[\text{ при } c^2 < 1$$

Следовательно, если звуковые скорости невзаимодействующих цепочек различны ($c^2 \neq 1$), то в спектре скоростей солитонов появляется щель, т.е. система служит своеобразным солитонным фильтром. Здесь относительный сдвиг ("верхних" частиц относительно "нижних") остается таким же, как и в модели ФК (на период цепочки), а абсолютное значение сдвига зависит от скорости распространения волны.

5. На основе построенных в разд. 3 и 4 решений и найденных преобразований эквивалентности могут быть получены некоторые решения, описывающие длинноволновую динамику рассматриваемой механической системы при наличии дополнительных сдвиговых сил.

Используя (3.5) и третье преобразование эквивалентности (2.2), в котором нужно заменить

$$u \to u/\delta, \quad \tilde{u} \to \tilde{u}/\delta \tag{5.1}$$

и положить $\kappa = \alpha(1 - c^2)/(1 + \delta^2)$, получим решение

$$u = \frac{\delta^2}{1 + \delta^2} p(t) = -\delta^2 w$$

[функция $p(t)$ удовлетворяет уравнению (3.6) или (4.2)], описывающее колебания частиц "верхней" и "нижней" цепочек, на которые дополнительно действуют равные по величине и противоположные по направлению сдвиговые силы.

Используя (3.5) и второе преобразование эквивалентности (2.2), в котором нужно сделать замену (5.1) и положить

$$A = 0, \quad \tilde{A} = \frac{\alpha(1 - c^2)}{\delta c^2} M$$

получим решение

$$u = \frac{\delta^2}{1+\delta^2} p(t) + \omega, \quad w = -\frac{1}{1+\delta^2} p(t) + \omega, \quad \omega = \frac{\alpha(c^2-1)}{2c^2(1+\delta^2)} x^2$$

($p(t)$ удовлетворяет уравнению (3.6) или (4.2)), описывающее смещения частиц в случае, когда дополнительные сдвиговые силы действуют только на "верхнюю" цепочку.

Аналогичные решения можно построить и для бегущих волн. Действительно, используя (3.7), первое и третье преобразования эквивалентности (2.2), в которых нужно сделать замену (5.1) и положить

$$a_8 = \frac{\alpha(1+\delta^2)\upsilon}{\delta\sigma}, \quad a_9 = a_{10} = 0, \quad \kappa = \frac{\alpha(c^2-1)}{\sigma},$$

получим решение

$$u = Up(x - \upsilon t) = Ww$$

(функция $p(x-\upsilon t)$ удовлетворяет уравнению (3.8) или (4.6)), описывающее бегущие волны в цепочках, на которые дополнительно действуют равные по величине и противоположные по направлению сдвиговые силы.

Используя первое и второе преобразования (2.2) с теми же значениями a_8, a_9, a_{10} и со значениями

$$A = 0, \quad \tilde{A} = \frac{\alpha(c^2-1)(1+\delta^2 c^2)}{\delta c^2 \sigma}$$

и производя замену (5.1), получим из (3.7) решение вида

$$u = \sigma^{-1}\{\delta^2(\upsilon^2 - c^2)p(x-\upsilon t) - (1+\delta^2)\omega\}, \quad w = \sigma^{-1}\{(1-\upsilon^2)p(x-\upsilon t) - (1+\delta^2)\omega\}$$

($p(x-\upsilon t)$ удовлетворяет уравнению (3.8) или (4.6)). Здесь дополнительные сдвиговые силы действуют только на "верхнюю" цепочку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
2. CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations. V. 1. Symmetries. Exact Solutions and Conservation Laws / Ed. by N.H. Ibragimov. Boca Raton: CRC Press Inc., 1994. 429 p.
3. *Жибер А.В., Ибрагимов Н.Х., Шабат А.Б.* Уравнения типа Лиувилля // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249. № 1. С. 26–29.
4. *Конторова Т.А., Френкель Я.И.* К теории пластической деформации и двойникования I // ЖЭТФ. 1938. Т. 8. № 1. С. 89–95.
5. *Конторова Т.А., Френкель Я.И.* К теории пластической деформации и двойникования II // ЖЭТФ. 1938. Т. 8. № 12. С. 1340–1348.
6. *Сикорский Ю.С.* Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. М.; Л.: Главн. ред. общетехн. лит-ры и номогр., 1936. 365 с.

Уфа

Поступила в редакцию
30.V.1994