

УДК 531.31

© 1995 г. Ю.И. Неймарк, Н.А. Фуфаев

## ПАРАДОКСЫ ПЭНЛЕВЕ И ДИНАМИКА ТОРМОЗНОЙ КОЛОДКИ

С использованием опыта исследования известного примера Пэнлеве–Клейна [1, 2] строится математическая модель тормозной колодки, лишенная парадоксов Пэнлеве. Качественный анализ этой модели (в частности, методом точечных отображений) позволил ответить на вопрос о характере возможных движений тормозной колодки, а также обнаружить автоколебания, механизм возбуждения которых вызван сухим трением с характеристикой, не имеющей падающего участка. Это явление, обычное для систем автоматического регулирования, в простых механических системах (без сервосвязей), насколько известно авторам, обнаруживается впервые.

Парадоксы Пэнлеве [3] встретились [4] при составлении уравнений движения тормозной колодки. Оказалось, что при некоторых соотношениях физических параметров уравнения движения или противоречивы, или неоднозначны. В предположении, что тормозная колодка при соприкосновении с колесом испытывает "удар трением" были рассмотрены возможные следствия этого предположения и в заключении сделаны следующие выводы: отсутствие экспериментальных данных не позволяет дать окончательное решение задачи, окончательных ответов на поставленные вопросы нет до сих пор.

Ниже, во всяком случае для тормозной колодки, на эти вопросы даются ответы: составляются с учетом либо тангенциальной либо нормальной упругостей колодки уравнения движения, исключаяющие парадоксы Пэнлеве; на их основе качественно исследуется динамика тормозной колодки и условия возникновения ударных взаимодействий колодки с колесом при неограниченном возрастании тангенциальной жесткости; обнаруживается возможность автоколебаний колодки при учете ее нормальной жесткости.

**1. Уравнения движения тормозной колодки и парадоксы Пэнлеве.** Пусть тормозная колодка  $P$ , на которую действует постоянная сила  $F$ , может вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси  $O_1$  (фиг. 1). Колесо  $Q$ , на которое действует постоянный момент  $M$ , вращается вокруг неподвижной оси  $O$ , параллельной оси  $O_1$ . Тела  $P$  и  $Q$  взаимодействуют при соприкосновении посредством сил кулоновского (сухого) трения.

Согласно обозначениям на фиг. 1, уравнения движения этой системы, составленные в соответствии с законами классической механики в случае, когда колодка прижата к колесу, имеют вид

$$J\omega = M - rT, \quad b(N - F) = aT, \quad T = -f|N|\operatorname{sgn}\omega \quad (1.1)$$

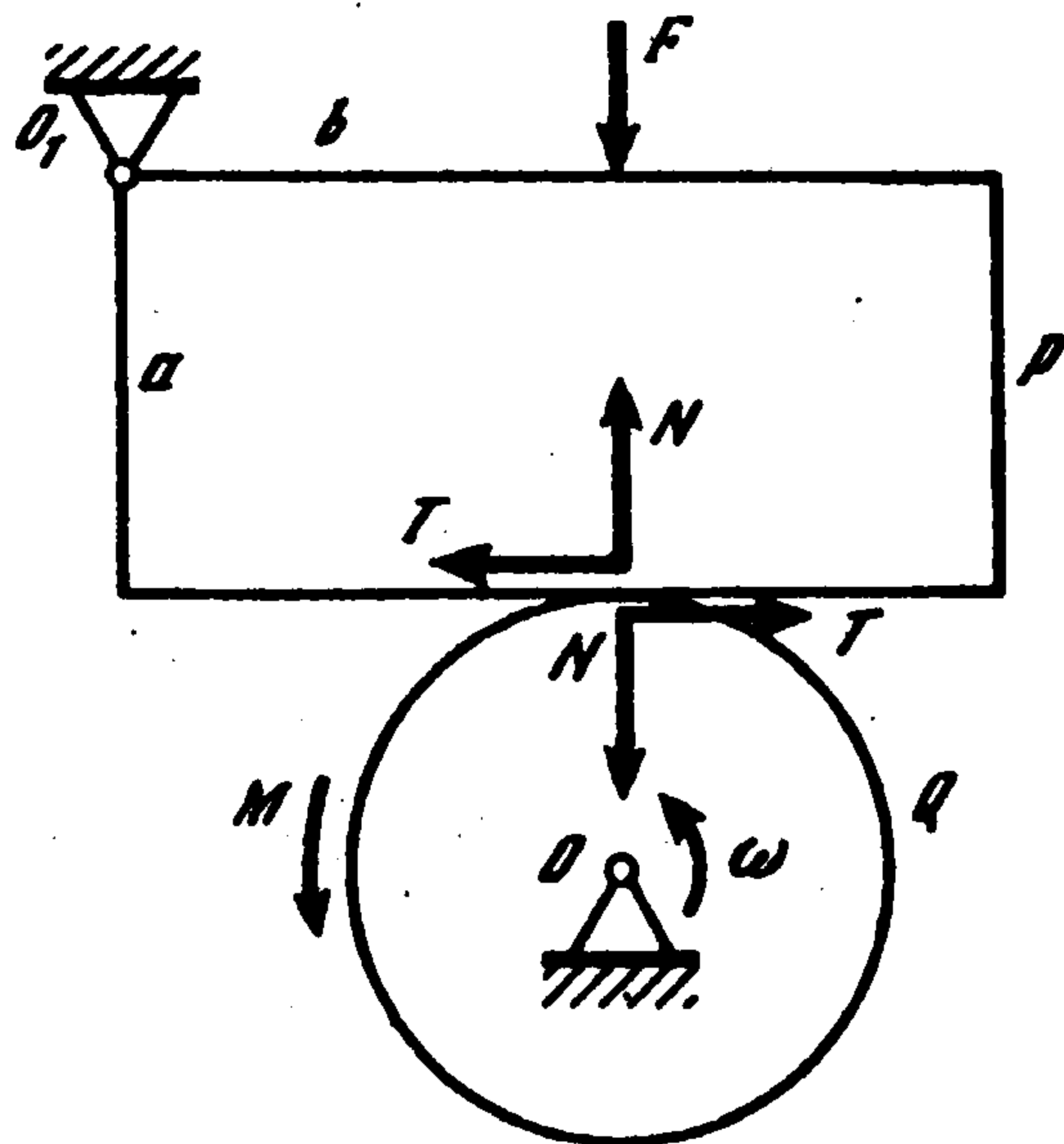
где  $f$  – коэффициент трения скольжения,  $J$  – момент инерции колеса;  $T, N$  – тангенциальная и нормальная составляющие силы взаимодействия колеса и колодки. Из (1.1) следует, что

$$N = bF[b - af \operatorname{sgn}(\omega N)]^{-1} \quad (1.2)$$

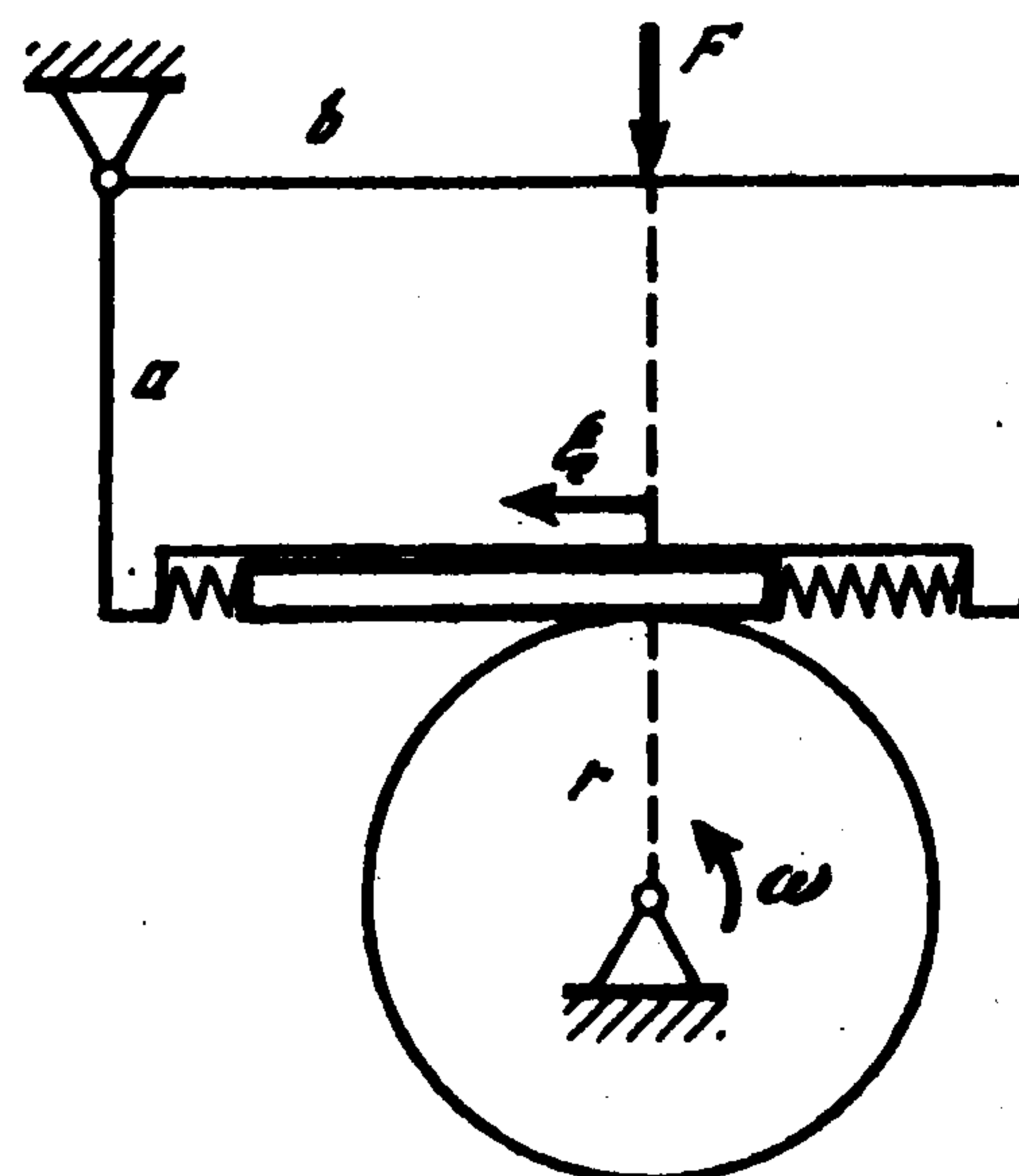
Задавая различные знаки величин  $F, \omega, b - af, N$  и определяя знак  $N$  из выражения (1.2), получаем таблицу, где нижняя строка указывает знаки нормальной реакции  $N$ , находимые из формулы (1.2), согласно сделанным в предыдущих строчках предположениям о знаках  $F, \omega, b - af$  и  $N$ .

$F$	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-
$\omega$	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-
$b-af$	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+
$N$	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
$N$	+	+	-	+	+	+	+	-	-	-	+	-	-	+

Эта таблица составлена в предположении, что связь колодки с колесом является двусторонней. При односторонней связи предположение  $N < 0$  следует исключить. Парадоксы Пэнлеве состоят в том, что, как следует из таблицы, при  $b-af < 0$ ,  $\omega > 0$  ни одна из гипотез не проходит: если предположить, что  $N > 0$  то из (1.2) следует, что  $N < 0$ , а если предположить, что  $N < 0$ , то из (1.2) следует, что  $N > 0$ . При  $\omega < 0$  напротив, обе гипотезы  $N > 0$  и  $N < 0$  допустимы.



Фиг. 1



Фиг. 2

Как известно [1-3, 5, 6], парадоксы Пэнлеве могут быть устранены путем учета продольной или поперечной упругости одного из соприкасающихся тел. Ниже рассматриваются две модели тормозной колодки: в первой модели учитывается продольная (тангенциальная) жесткость  $k$  колодки, а во второй модели – поперечная (нормальная) жесткость  $k_1$ .

**2. Учет тангенциальной упругости колодки.** При учете тангенциальной упругости колодки расчетная модель тормозного устройства изображена на фиг. 2, где пластинка П пренебрежимо малой массы, прикрепленная к колодке с помощью пружин, может перемещаться вдоль колодки. Пусть  $\xi$  – смещение пластинки из положения, при котором пружины расслаблены. Составим уравнения движения рассматриваемой системы в случае, когда пластинка П, взаимодействующая с вращающимся колесом при помощи кулоновых сил, не скользит вдоль колеса, т.е. выполняется соотношение

$$\dot{\xi} = r\omega \quad (2.1)$$

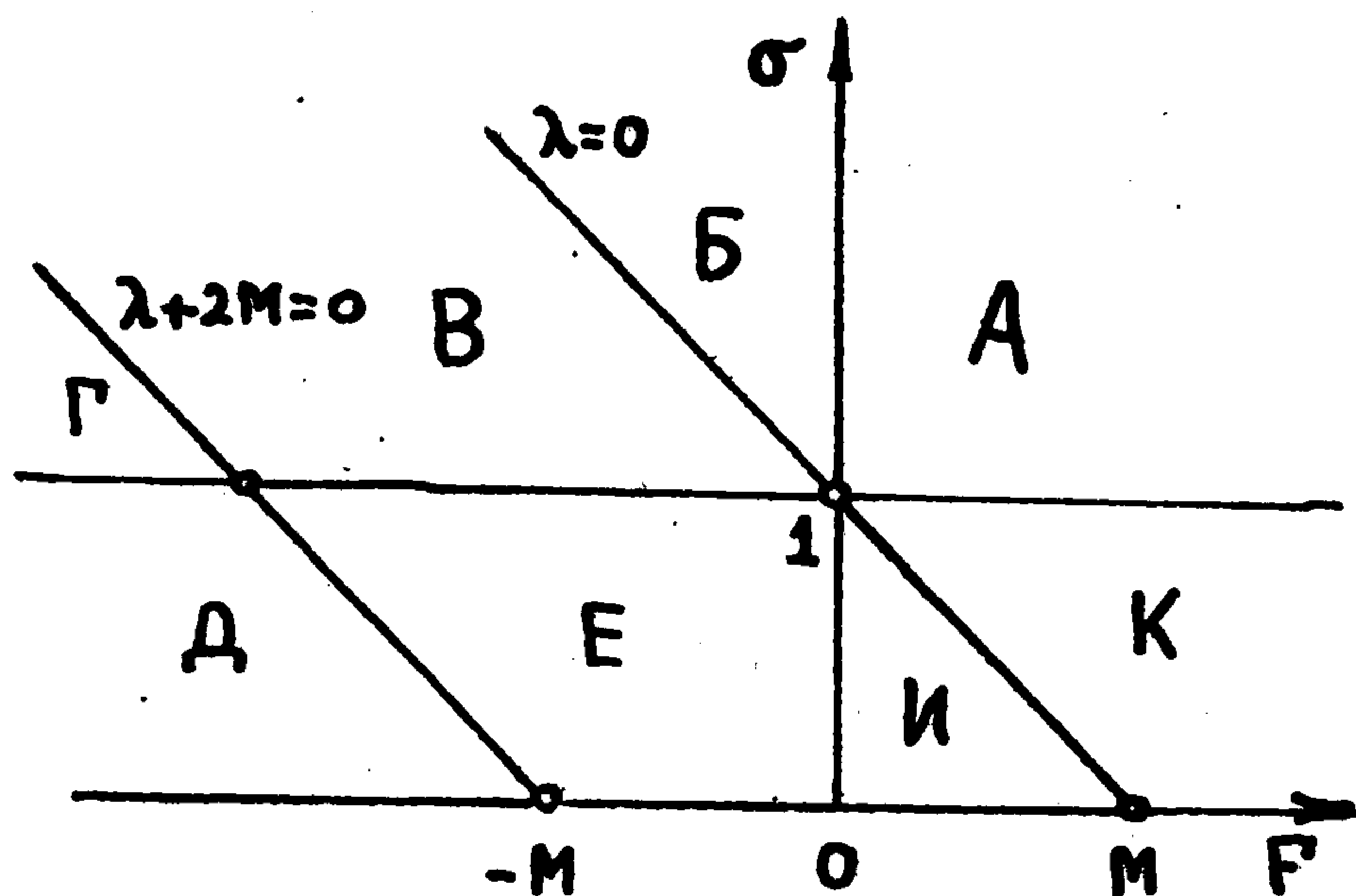
Для этого согласно закону Кулона должно выполняться условие

$$k|\xi| \leq fN \quad (2.2)$$

В таком случае уравнения динамики записываются в виде

$$J\dot{\omega} = M - rk\xi, \quad b(N - F) = ak\xi \quad (2.3)$$

Уравнения (2.1), (2.3) описывают движения изображающей точки на фазовой плоскости  $(\xi, \omega)$  в полосе, содержащей начало координат, границы которой определяются из условия (1.2).



Фиг 3

Введем безразмерные величины:  $\xi_0 = \xi r^{-1}$ ,  $\tau = \text{trk}^{1/2} J^{-1/2}$ ,  $F_0 = fFk^{-1}r^{-1}$ ,  $N_0 = fNk^{-1}r^{-1}$ ,  $M_0 = Mk^{-1}r^{-2}$ ,  $\sigma = afb^{-1}$ . Тогда, оставляя за величинами  $\xi_0, F_0, N_0, M_0$  прежние обозначения, уравнения движения запишем в виде

$$\dot{\xi} = \omega, \quad \dot{\omega} = M - \xi \quad (2.4)$$

Отсюда следует, что фазовые траектории представляют семейство концентрических окружностей с центром в точке  $\xi = M, \omega = 0$ , а при учете малого вязкого трения – семейство скручивающихся спиралей. Из (2.2) и (2.3) находим, что область  $\Phi$  на фазовой плоскости  $(\xi, \omega)$ , в которой справедливы уравнения (2.4), определяются неравенствами  $|\xi| \leq |F + \sigma\xi|$ , откуда следует, что границами области  $\Phi$  являются значения  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , которые определяются выражениями

$$\xi_1 = F(1 - \sigma)^{-1}, \quad \xi_2 = -F(1 + \sigma)^{-1} \quad (2.5)$$

и сама область  $\Phi$  определяется неравенствами  $\xi_2 < \xi < \xi_1$ , если  $\sigma > 1, F > 0$ ;  $\xi_1 < \xi < \xi_2$ , если  $\sigma < 1, F < 0$ ;  $\xi > \xi_2$  и  $\xi < \xi_1$ , если  $\sigma > 1, F > 0$ ;  $\xi > \xi_1$  и  $\xi < \xi_2$ , если  $\sigma > 1, F < 0$ .

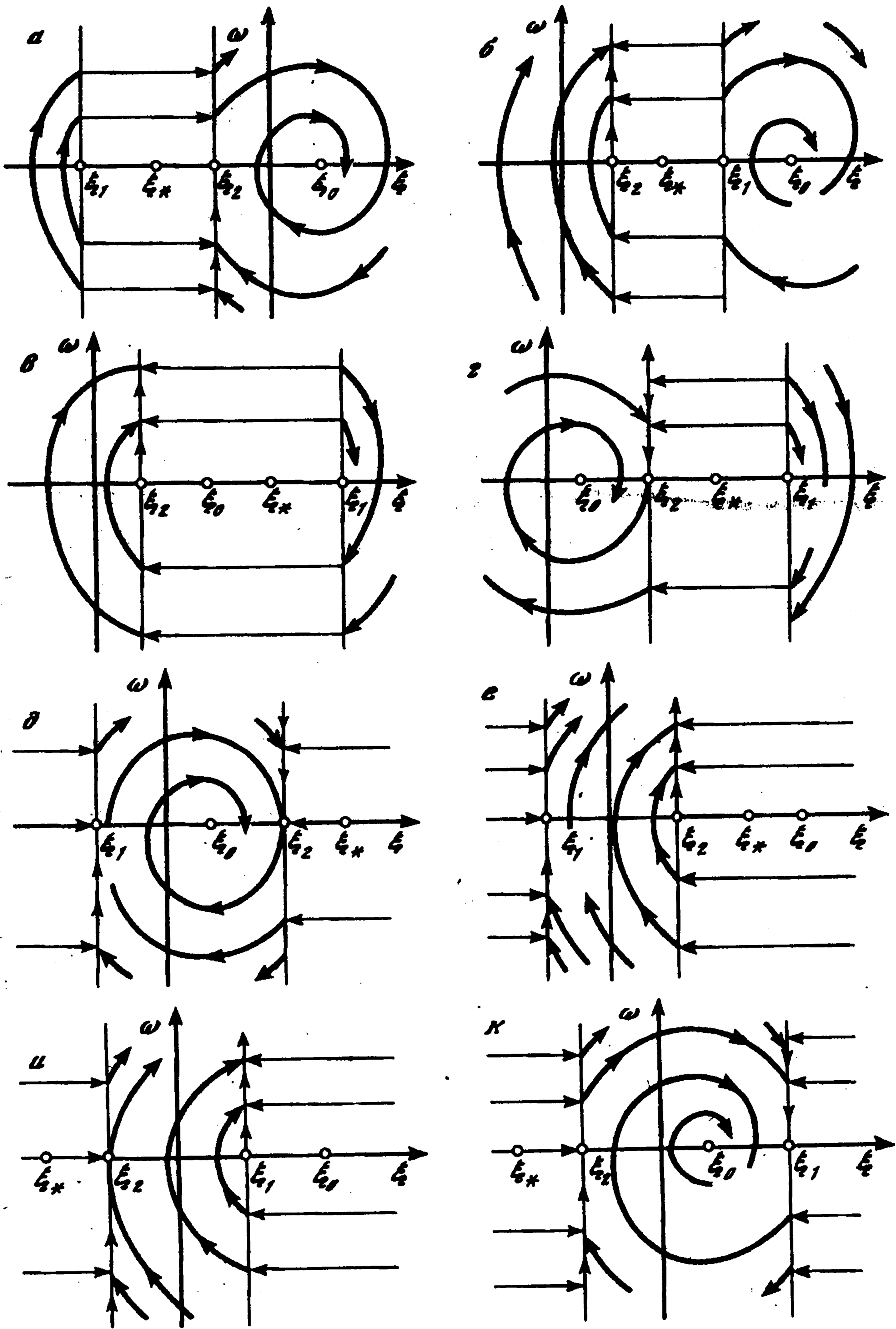
Вне области  $\Phi$  фазовые траектории представляет семейство прямых, параллельных оси  $\xi$ , вдоль которых изображающая точка скачком перемещается до границы области  $\Phi$ . Физически такой скачок соответствует бесконечно быстрому скольжению безмассовой пластинки, на которую действует конечная сила.

Характер разбиения фазовой плоскости на траектории зависит от соотношения физических параметров. В данной задаче есть три существенных физических параметра:  $F, \sigma, M$ , которые могут принимать любые значения в пределах:  $-\infty < F < \infty$ ,  $0 \leq \sigma < \infty$ ,  $0 \leq M < \infty$ . Качественная особенность фазового портрета на плоскости  $(\xi, \omega)$  определяется взаимным расположением, точек  $\xi_0, \xi_1, \xi_2$  и начала координат. Из выражения (2.5) и  $\xi_0 = M$  следует, что

$$\begin{aligned} \xi_1 - \xi_0 &= \lambda(1 - \sigma)^{-1}, \quad \xi_1 - \xi_2 = 2F(1 - \sigma)^{-1} \\ \xi_0 - \xi_2 &= (\lambda + 2M)(1 + \sigma)^{-1}, \quad \lambda = F + M(\sigma - 1) \end{aligned} \quad (2.6)$$

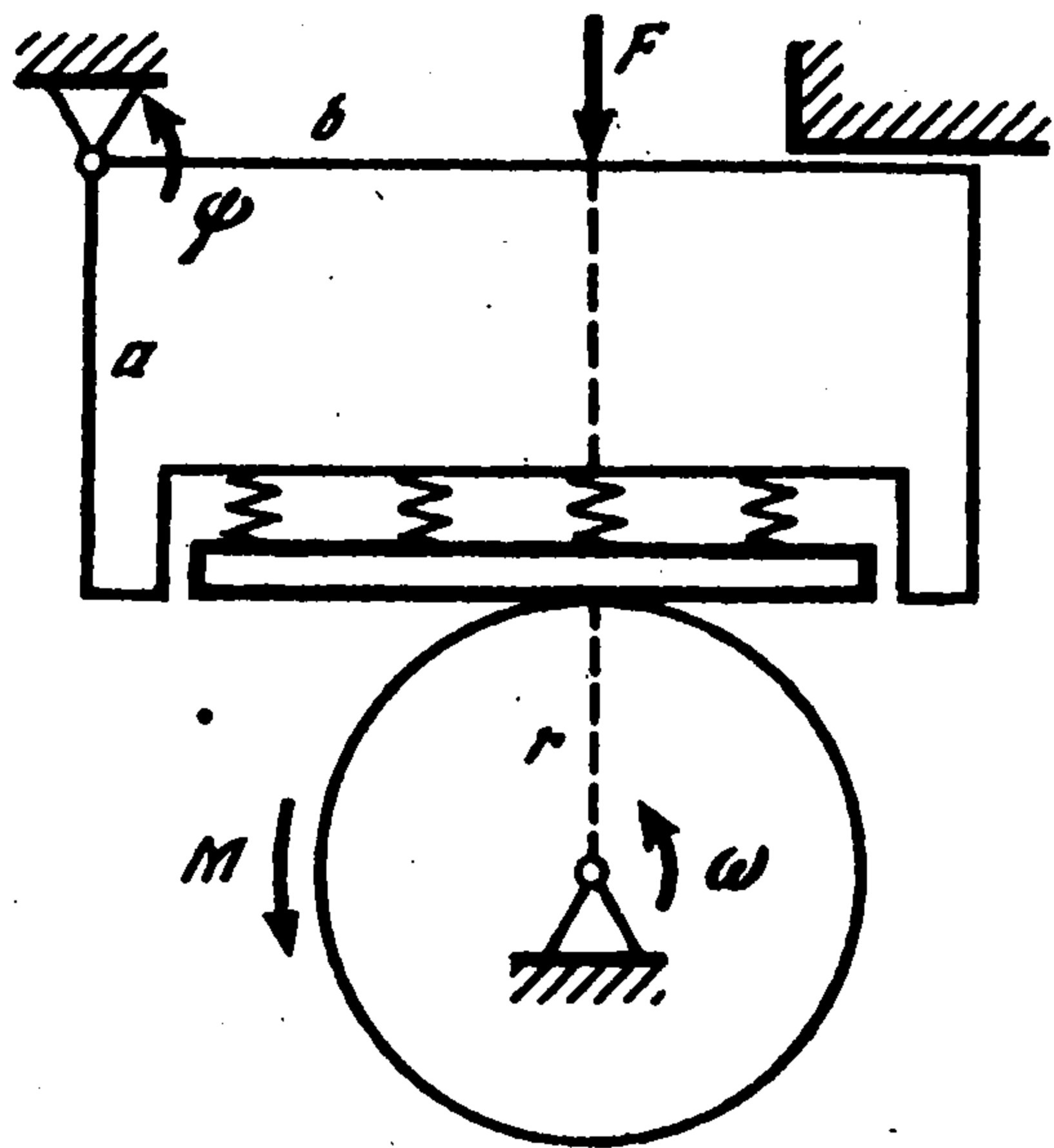
На основании выражений (2.5), (2.6) можно утверждать, что бифуркационными границами на полуплоскости параметров  $(F, \sigma)$ ,  $(\sigma > 0)$  являются прямые  $F = 0, \sigma = 1, \lambda = 0, \lambda = -2M$ , которые разбивают эту полуплоскость на восемь областей, изображенных на фиг 3. Фазовые портреты, соответствующие значениям параметров в этих областях, показаны на фиг. 4. Движение изображающей точки вдоль границы  $\xi = \xi_1$  или  $\xi = \xi_2$  осуществляется лишь на участке стыковки фазовых траекторий [7, 8] и подчиняется уравнениям

$$\dot{\omega} = \xi_0 - \xi_{1,2} \quad (2.7)$$

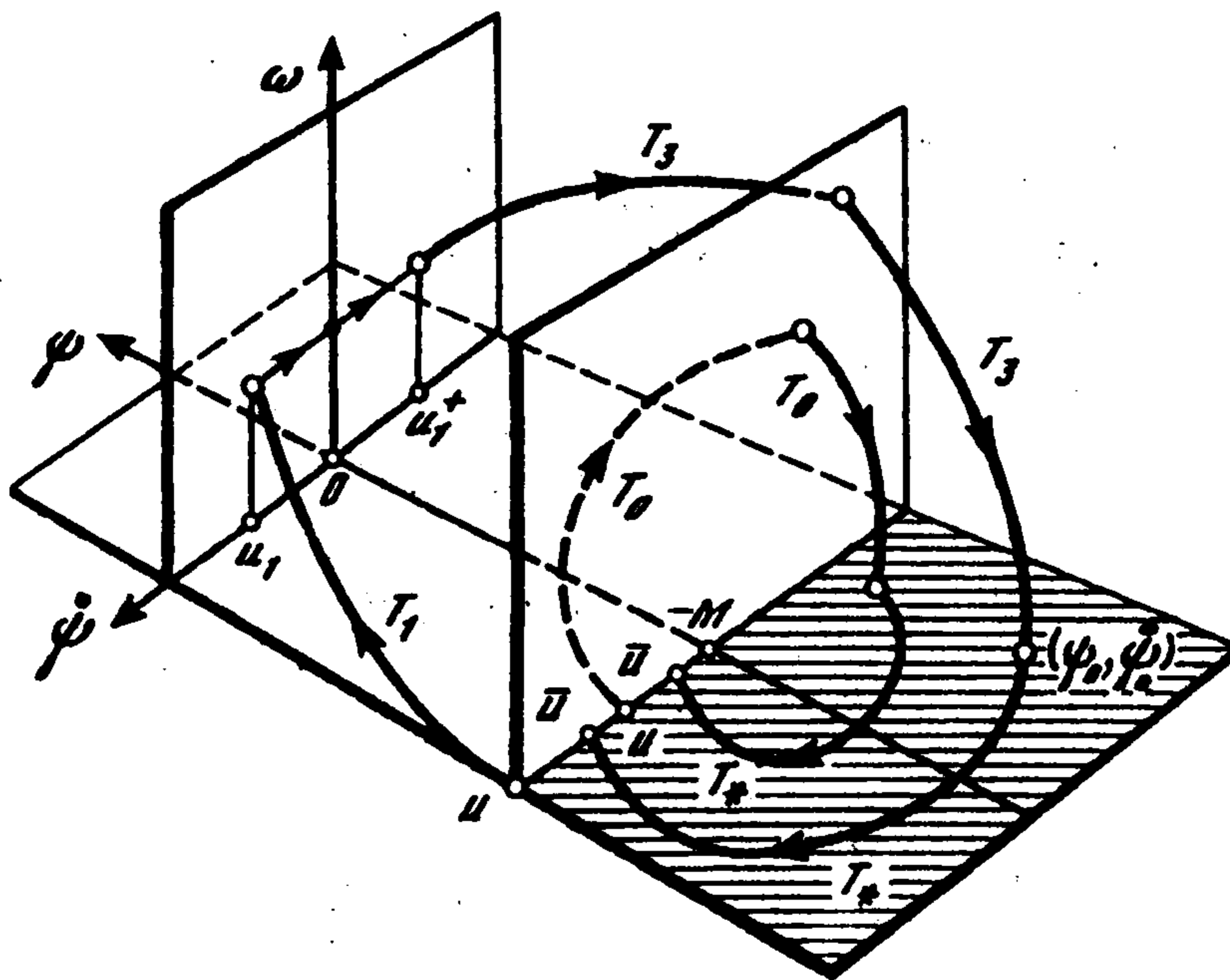


Фиг. 4

Направление движения изображающей точки вдоль границы определяется знаком правой части уравнений (2.7) в соответствии с выражениями (2.6). Фазовые портреты на фиг. 4 и разбиение плоскости параметров на области различного поведения системы (фиг. 3) представляют полное решение поставленной задачи динамики в предположении, что связь между колодкой и колесом является двусторонней. Согласно этим фазовым портретам система из тормозной колодки и колеса после нескольких "ударов трением" или без них может стремиться к равновесию или переходит в равноускоренное движение колеса. В обычном случае односторонней связи колесо и колодка



Фиг. 5



Фиг. 6

могут только давить друг на друга, поэтому должно быть выполнено дополнительное условие  $N \geq 0$ , которое сводится к неравенству

$$\xi \geq \xi_* = -F\sigma^{-1}, \quad (2.8)$$

вытекающему из второго уравнения (2.3).

На фазовых портретах фиг. 4 нанесена точка  $\xi_*$ , указывающая в какой части плоскости сохраняется вид фазового портрета. За его пределами  $N < 0$ . Из приведенных на фиг. 4 случаев видно, что только в случае А, К и И фазовая точка при своем движении не может покинуть область фазовой плоскости, определяемую условием  $\xi > \xi_*$ . В остальных случаях, кроме случая В, она ее покидает. Случай В соответствует как возможности фазовой точки оставаться в области  $N > 0$ , приближаясь к устойчивому равновесию  $\xi_0$ , так и уйти из нее, переходя в равноускоренное движение вдоль линии  $\xi = \xi_2$ . Размеры области притяжения устойчивого равновесия  $\xi_0$  невелики и уменьшаются с ростом  $k$ , поскольку  $\xi_0 - \xi_1 \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ . Этот случай парадоксального равновесия отмечался [4], однако при  $k = \infty$  его следует считать нереализуемым.

**3. Учет нормальной упругости.** При учете нормальной упругости расчетная модель тормозной колодки и колеса изображена на фиг. 5. В отличие от предыдущей модели безмассовая пластинка, прикрепленная к колодке с помощью пружин жесткости  $k_1$ , может смещаться только в поперечном направлении. Предполагается еще, что с другой стороны от колодки помещен ограничитель, ударяясь о который сразу же после отрыва, она испытывает удар с коэффициентом восстановления  $\kappa < 1$ . Угол  $\psi$  поворота колодки отсчитывается от ее положения, при котором пластинка соприкасается с колесом, а пружины расслаблены. Углы поворота колеса и колодки считаются положительными в направлении, противоположном ходу часовой стрелки.

Составим уравнения движения колодки и колеса в области  $\psi < 0$  ( $J_1$  и  $J$  – момент инерции колодки и колеса)

$$J_1 \psi'' = (af \operatorname{sgn} \omega - b)k_1 b \psi - bF, \quad J \omega' = M - rfbk_1 \operatorname{sgn} \omega \quad (3.1)$$

При  $\psi = 0$  и  $\psi' > 0$ , когда контакт колеса с колодкой нарушается, происходит удар об ограничитель, так что послеударная скорость  $\psi'_+$  связана с доударной  $\psi'_-$  соотношением

$$\psi'_+ = -\kappa \psi'_- \quad (0 \leq \kappa \leq 1) \quad (3.2)$$

В безразмерных величинах  $\tau = btk^{1/2}J^{-1/2}$ ,  $\sigma =afb^{-1}$ ,  $F_0 = Fb^{-1}k_1^{-1}$ ,  $M_0 = M(rfbk_1)^{-1}$ ,  $J_0 = bJ(brJ_1)^{-1}$  уравнения движения (2.1), (2.2) для  $\omega > 0$ ,  $\psi \leq 0$  имеют вид (нулевой индекс далее опущен)

$$\psi'' = (\sigma - 1)\psi - F, \quad J\dot{\omega} = \psi \operatorname{sgn} \psi + M \quad (\psi < 0) \quad (3.3)$$

$$\psi'_+ = \psi'_-, \quad J\dot{\omega} = M \quad (\psi = 0) \quad (3.4)$$

Уравнения (3.1) описывают движение изображающей точки в трехмерном фазовом полупространстве  $(\psi, \psi', \omega)$ ,  $\psi < 0$ . Из них следует, что при любых начальных значениях в области  $\omega < 0$  изображающая точка через конечный промежуток времени оказывается в полупространстве  $\omega \geq 0$  и в дальнейшем его не покидает. Поэтому достаточно изучить структуру фазового пространства в области  $\omega \geq 0$ , т.е. исследовать решение уравнений (3.3), (3.4). На границе  $\omega = 0$  этого полупространства имеется область  $\psi \leq -M$  "скользящих" движений [7], в которой движение изображающей точки подчиняется уравнению

$$\psi'' + \psi = F - \sigma M, \quad (\omega = 0) \quad (3.5)$$

Оно получается из уравнений (3.1), записанных в виде ( $T$  – тангенциальная составляющая реакции)  $J_1\psi'' = -aT - b^2k_1 - bF$ ,  $M - rT = 0$  после исключения неизвестной  $T$ .

Согласно (3.5) в области скользящих движений  $\psi = -M$ ,  $\omega = 0$  фазовые траектории представляют собой семейство концентрических окружностей

$$(\psi')^2 + (\psi + F + \sigma M)^2 = \text{const} \quad (3.6)$$

с общим центром в точке  $\psi = -F - \sigma M$ ,  $\psi' = 0$ ,  $\omega = 0$ .

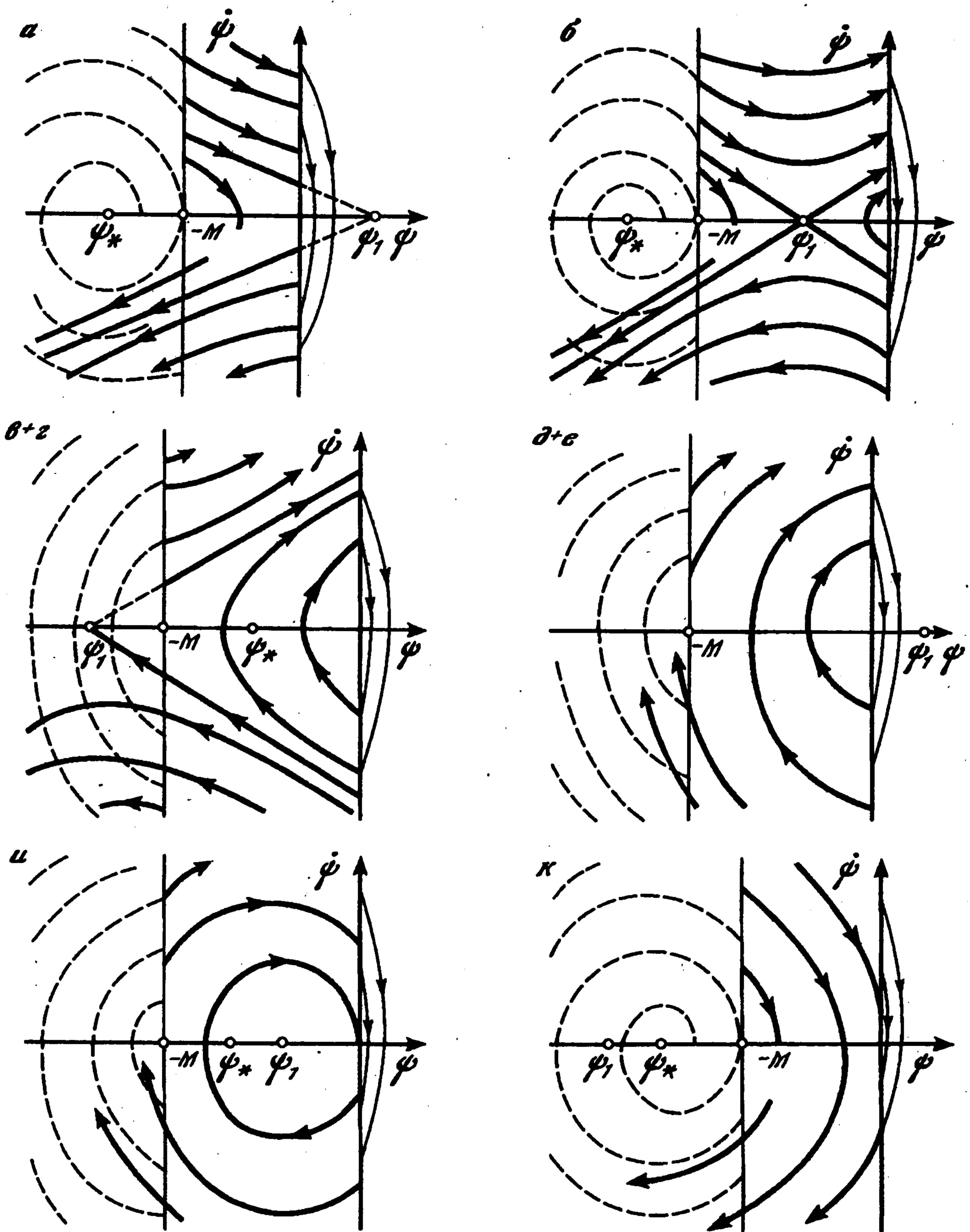
Характер фазовых траекторий в полупространстве  $\omega > 0$  определяется соотношением существенных параметров  $F$ ,  $\sigma$ ,  $M$ , которые по своему смыслу совпадают с соответствующими параметрами предыдущей модели. Заметим, что при движении в полупространстве  $\omega \geq 0$  изображающая точка в области  $\psi > -M$  удаляется от граничной плоскости  $\omega = 0$ , а в области  $\psi < -M$  приближается к ней. Отсюда следует, что замкнутая траектория, если она существует, обязательно содержит участок "скользящего" движения, поэтому отыскание предельного цикла [7] сводится к изучению точечного отображения полупрямой  $\psi = -M$ ,  $\psi' > 0$  в себя (см. фиг. 6, где область "скользящих" движений заштрихована). Независимость изменения  $\psi$ ,  $\psi'$  от переменной  $\omega$  позволяет рассматривать фазовые траектории в проекции на плоскость  $(\psi, \psi')$ , что значительно облегчает исследование.

Из уравнений (3.3), (3.5) следует, что качественное разбиение фазового полупространства  $(\psi, \psi', \omega \geq 0)$  на траектории в проекции на плоскость  $(\psi, \psi')$  определяется взаимным расположением точек  $\psi_1 = F(\sigma - 1)^{-1}$ ,  $\psi_2 = -M$ ,  $\psi_* = -(F + \sigma M)$ , причем

$$\psi_2 - \psi_* = \sigma\lambda(\sigma - 1)^{-1}, \quad \psi_1 - \psi_2 = \lambda(\sigma - 1)^{-1}, \quad \lambda = F + (\sigma - 1)M \quad (3.7)$$

Согласно этому приходим к бифуркационным границам  $F = 0$ ,  $\lambda = 0$  и  $\sigma = 1$ . Полученный бифуркационный портрет совпадает с бифуркационным портретом, показанным на фиг. 3, если на нем объединить области  $B$  и  $G$ , и  $D$  и  $E$  соответственно (для фазового портрета граница  $\lambda + 2M = 0$  оказывается несущественной).

Используя (3.7) и уравнения (3.3), находим всевозможные качественно разные разбиения плоскости  $(\psi, \psi')$  на траектории (фиг. 7). Для значений  $\psi < 0$ ,  $\psi' > 0$  изображены лишь те траектории, по которым изображающая точка начинает движение от плоскости  $\psi = -M$ . Штрихами показаны траектории "скользящих" движений,



Фиг. 7

для которых учтено малое вязкое трение, превращающее особую точку типа "центр" в особую точку типа "устойчивый фокус". Кривые со стрелками справа от линии  $\psi = 0$  изображают мгновенный скачок фазовой точки в результате удара колодки об ограничитель. Как уже отмечалось, движение фазовой точки  $(\psi, \psi')$  не зависит от  $\omega$ . Изменение же  $\omega$  определяется тем, как движется точка  $(\psi, \psi')$ . При  $\psi < -M$   $\omega$  убывает, а при  $\psi > -M$  возрастает.

Согласно приведенным на фиг. 7 всем возможным видам фазовых портретов после переходных процессов возможен приход к устойчивому равновесию либо в точке  $\psi = \psi' = 0$  либо на поверхности скользящих движений в точке  $\psi = \psi_* < -M, \psi' = 0$ . В первом случае  $\omega$  неограниченно растет (равноускоренное движение), во втором

случае  $\omega = 0$ . Однако кроме таких финальных движений возможны еще и автоколебания по переменным  $\psi$  и  $\psi'$ , сопровождающиеся периодическими изменениями  $\omega$  с положительной средней величиной.

Автоколебания могут быть обнаружены путем построения и исследования точечного отображения полупрямой  $\psi = -M, \psi' \geq 0$ , поскольку образование замкнутой фазовой траектории на плоскости  $\psi, \psi'$  возможно только с пересечением этой полупрямой. Так, например, в случае А согласно фиг. 6 точечное отображение  $\bar{u} = \bar{u}(u), (u = \psi')$  для траекторий, не пересекающих плоскость  $\psi = 0$ , будет состоять из двух преобразований:  $T_0$  и  $T_*$ , т.е.  $T^{(1)} = T_*T_0$ . В противном случае оно будет состоять из  $T_1, T_2, T_3$  и  $T_*$ , т.е.  $T^{(2)} = T_*T_3T_2T_1$ .

Рассмотрим сначала  $T^{(1)} = T_*T_0$ . В области величина  $\alpha^2 \equiv \sigma - 1 > 0$ , поэтому запишем уравнения (2.3) для  $\psi < 0$  в виде

$$\psi'' - \alpha^2 \psi = -\alpha^2 \psi_1, \quad J\omega' = \psi + M \quad (3.8)$$

Решение уравнений (3.8) для значений  $\psi < 0$  при начальных условиях  $t = 0, \psi = -M, \psi' = u, \omega = 0$  имеет вид

$$\begin{aligned} \psi &= \alpha^{-1} u \operatorname{sh} \alpha t + (M + \psi_1) \operatorname{ch} \alpha t - \psi_1, \quad \psi' = u \operatorname{ch} \alpha t - \alpha(M + \psi_1) \operatorname{sh} \alpha t \\ \alpha^2 J\omega &= u(\operatorname{ch} \alpha t - 1) - \alpha(M + \psi_1)(\operatorname{sh} \alpha t - \alpha t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Пусть в момент времени  $t = \tau_0 \alpha^{-1}$ :  $\psi = \psi_0, \psi' = \psi'_0, \omega = 0$ . Тогда из полученного решения (3.9) приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} \alpha \psi_0 &= u \operatorname{sh} \tau_0 - \lambda \alpha^{-1} \operatorname{ch} \tau_0 + F \alpha^{-1}, \quad \psi'_0 = u \operatorname{ch} \tau_0 - \lambda \alpha^{-1} \operatorname{sh} \tau_0 \\ \alpha u &= (\operatorname{ch} \tau_0 - 1) - \lambda(\operatorname{sh} \tau_0 - \tau_0) = 0, \quad \lambda = F + (\sigma - 1)M, \quad \alpha^2 = \sigma - 1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Соотношения (3.10) и представляют точечное отображение  $T_0$ . Для отыскания точечного отображения  $T_*$  обратимся к дифференциальному уравнению (3.5) и его интегралу (3.6), который в рассматриваемом случае записывается в виде

$$(\psi')^2 + (\psi + \lambda + M)^2 = (\psi'_0)^2 + (\psi_0 + \lambda + M)^2 \quad (3.11)$$

Изображающая точка приходит на полупрямую  $\psi = -M, \psi' > 0$ , имея координаты  $\psi = -M, \psi' = \bar{u}$ . Подставляя это в (3.7), находим

$$\bar{u}^2 = (\psi')^2 + (\psi_0 + \lambda + M) - \lambda^2 \quad (3.12)$$

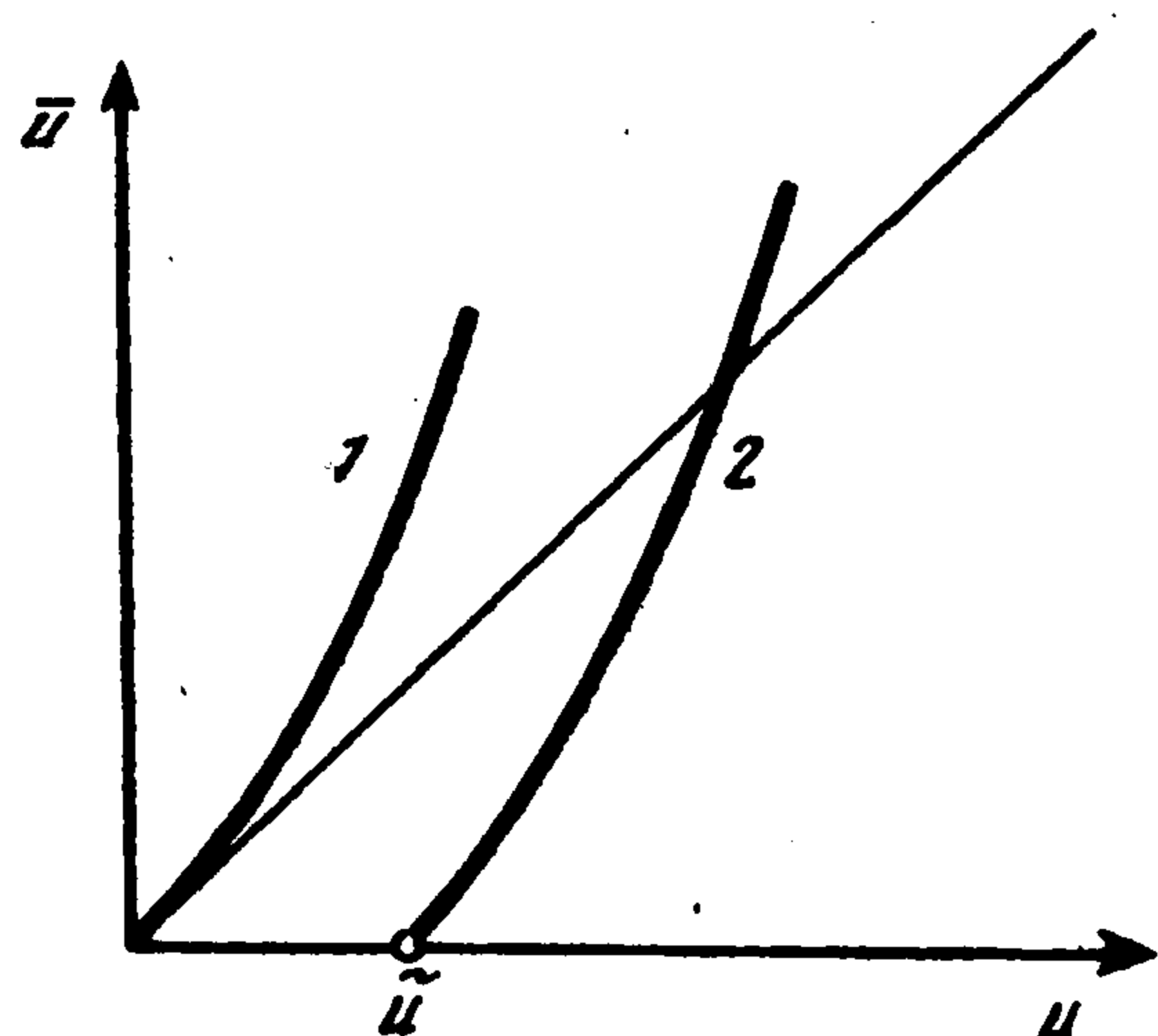
Найденные выражения (3.9), (3.12) и представляют точечное отображение  $T^{(1)} = T_*T_1$  для  $u \leq u_*$ , где величина  $u_* = \sqrt{M(\lambda + F)}$  определяется из условия соприкосновения фазовой траектории с прямой  $\psi = 0$  в начале координат плоскости  $(\psi, \psi')$ .

Найдем теперь явное выражение точечного отображения  $T^{(1)}$  для  $u \ll 1$ . В этом случае из уравнений (4.10) получаем

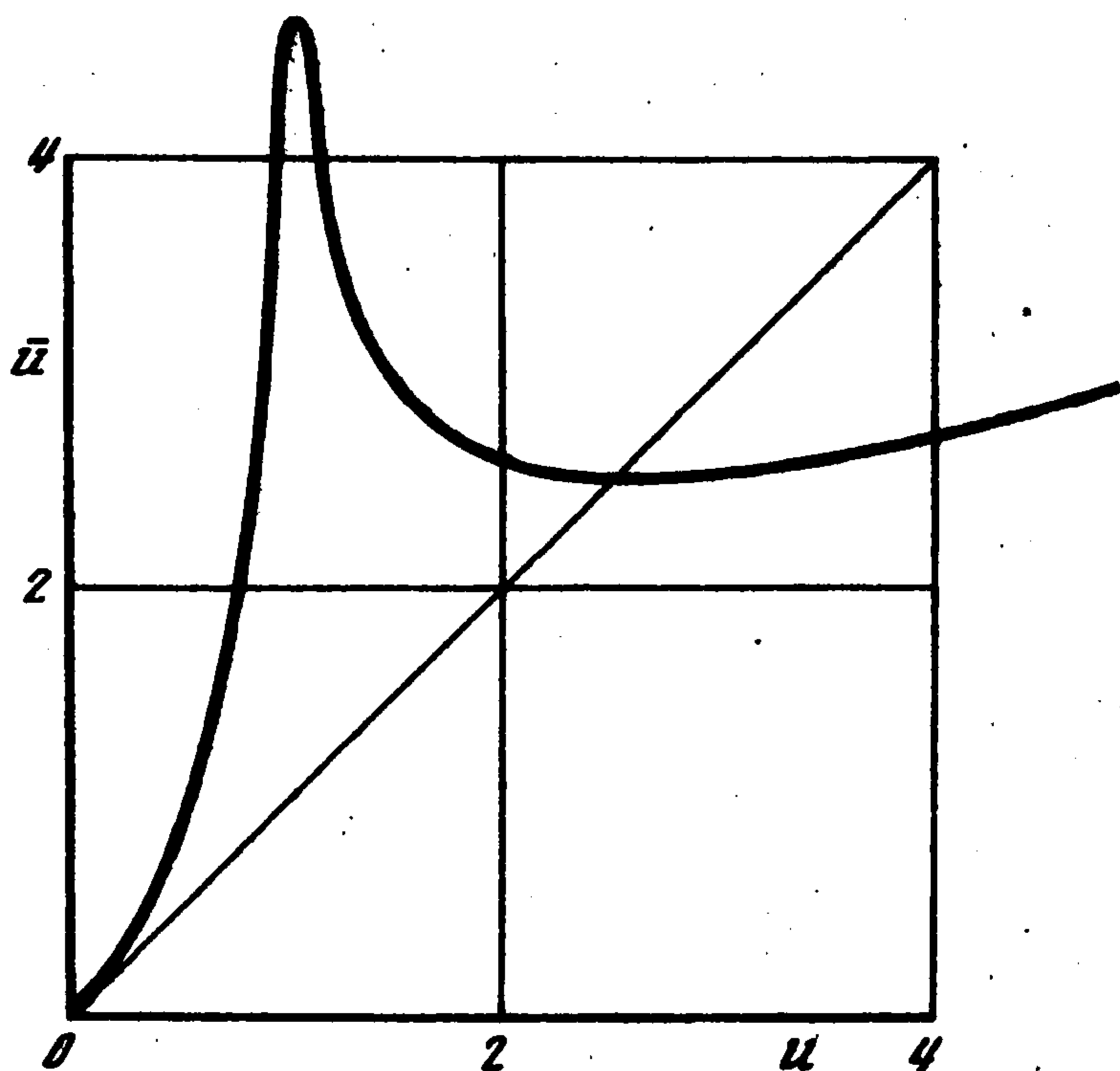
$$\psi_0 = -M - 3u^2(2\lambda)^{-1}, \quad \psi'_0 = -2u$$

Подставляя эти выражения в (3.12), находим

$$\bar{u}^2 = u^2 + \frac{9}{4} \lambda^{-2} u^4 \quad (3.13)$$



Фиг. 8



Фиг. 9

Отсюда следует, что кривая Ламерея в окрестности начала координат имеет вид кривой 1 на фиг. 8, что свидетельствует о возникновении колебаний с нарастающей амплитудой. При учете вязкого трения кривая Ламерея в окрестности начала координат примет вид кривой 2. Точка  $u = \tilde{u}$  соответствует наличию в фазовом пространстве неустойчивого предельного цикла. При возмущениях  $u < \tilde{u}$  система приходит к состоянию покоя, а при возмущениях  $u > \tilde{u}$  возбуждаются колебания, т.е. имеет место жесткое возбуждение колебаний.

Для того чтобы показать, что в рассматриваемой системе существуют автоколебания, достаточно убедиться, что при  $u > \tilde{u}$  кривая Ламерея обязательно пересечет биссектрису координатного угла в обратном направлении. Эта точка может соответствовать наличию в фазовом пространстве устойчивого предельного цикла, а может при неустойчивости указывать на наличие более сложных автоколебаний.

В соответствии с обозначениями на фиг. 6 при  $u > u_*$  точечное отображение  $T^{(2)}$  состоит из последовательности преобразований  $T_1, T_2, T_3$  и  $T_*$ . Рассмотрим их по порядку. Преобразование  $T_1$  получается из решения (3.9) уравнений (3.8) с начальными условиями  $t = 0, \psi = -M, \psi' = u, \omega = 0$ . Пусть в момент времени  $t = \tau_1 \alpha^{-1}: \psi = 0, \psi' = u_1, \omega = \omega_1$ . Тогда преобразование  $T_1$  определяется выражениями

$$\begin{aligned} \alpha u \operatorname{sh} \tau_1 - \lambda \operatorname{ch} \tau_1 + F = 0, \quad \alpha u_1 = \alpha u \operatorname{ch} \tau_1 - \lambda \operatorname{sh} \tau_1 \\ \alpha^3 J \omega_1 = \alpha u (\operatorname{ch} \tau_1 - 1) - \lambda (\operatorname{sh} \tau_1 - \tau_1) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Преобразование  $T_2$ , описывающее результат неупругого удара колодки об ограничитель, оставляет неизменными величины  $\psi = 0$  и  $\omega = \omega_1$ , а величина  $\psi'$  мгновенно принимает значение  $\psi'_+ = k u_1$ . Для получения преобразования  $T_3$  воспользуемся решением уравнений (3.8) при начальных условиях  $t = 0, \psi = 0, \psi' = k u_1, \omega = \omega_1$ .

Пусть в момент времени  $t = \tau_2 \alpha^{-1}$  фазовые переменные принимают значения  $\psi = \psi_0, \psi' = \psi'_0, \omega = 0$ . Тогда находим выражение преобразования  $T_3$  в виде

$$\begin{aligned} \psi_0 = -k \alpha^{-1} u_1 \operatorname{sh} \tau_2 - \psi_1 (\operatorname{ch} \tau_2 - 1), \quad \psi'_0 = -\alpha \psi_1 \operatorname{sh} \tau_2 - k u_1 \operatorname{ch} \tau_2, \\ \alpha^2 J \omega_1 = \alpha \psi_1 \operatorname{sh} \tau_2 + k u_1 (\operatorname{ch} \tau_2 - 1) - \alpha (\psi_1 + M) \tau_2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Соотношения (3.14), (3.15) вместе с (3.12) представляют искомое точечное отображение  $T^{(2)}$  для значений  $u \geq u_* = \sqrt{M(\lambda + F)}$ .

Найдем теперь явное выражение отображения  $\bar{u} = \bar{u}(u)$  для  $u \geq 1$ . Из (3.18) следует, что при  $u \rightarrow \infty$  имеем  $\tau_1 \rightarrow 0$ ,  $u \rightarrow \alpha M \tau_1^{-1}$ ,  $u_1 \rightarrow \alpha M \tau_1^{-1}$ ,  $J\omega_1 \rightarrow M\tau_1(2\alpha)^{-1}$ . Подставляя это в (3.15), получаем следующее предельное соотношение:

$$\frac{1}{2}\alpha M \tau_1 = \alpha \psi_1 \operatorname{sh} \tau_2 + \alpha \kappa M \tau_1^{-1} (\operatorname{ch} \tau_2 - 1) - \alpha(\psi_1 + M)\tau_2$$

которое при  $\tau_1 \rightarrow 0$  может быть выполнено, если величина  $\tau_2$  также стремится к нулю. Для  $\tau_2 \ll 1$  это соотношение превращается в квадратное уравнение относительно  $\tau_2$ , решая которое, находим

$$\tau_2 = \tau_1 \kappa^{-1} (1 + \sqrt{1 + \kappa})$$

Отсюда и из (3.15) следует, что

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi_0 = -M(1 + \sqrt{1 + \kappa}), \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \psi'_0 = -\kappa u$$

Подставляя эти выражения в (3.12), получаем

$$\bar{u}^2 = \kappa^2 u^2 + M^2(1 + \kappa) - 2\lambda M \sqrt{1 + \kappa}$$

Таким образом, с ростом  $u$  кривая  $\bar{u} = \bar{u}(u)$  приближается к асимптоте  $\bar{u} = \kappa u + \operatorname{const}(\kappa < 1)$ , которая заведомо пересекает биссектрису первого квадранта плоскости  $(u, \bar{u})$ . Эта точка пересечения и свидетельствует о наличии в фазовом пространстве системы либо устойчивого предельного цикла, либо более сложных автоколебаний.

Точечное отображение  $\bar{u} = \bar{u}(u)$  было построено по формулам (3.10)–(3.12) для  $\bar{u} < \bar{u}_*$  и по формулам (3.13)–(3.15) для  $u > u_*$  с помощью ЭВМ при следующих числовых значениях физических параметров из области А (фиг. 3):  $\sigma = 1,36$ ;  $M = 1,0$ ;  $F = 0,36$ ;  $\kappa = 0,44$ ;  $u_* = 1,04$ . Соответствующая диаграмма Ламерея приведена на фиг. 9. Она отвечает наличию простого однократного автоколебания. В точке пересечения диаграммы Ламерея с биссектрисой производная по модулю меньше единицы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Фуфаев Н.А. Динамика системы в примере Пэнлеве–Клейна: О парадоксах Пэнлеве // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 4. С. 48–53.
2. Неймарк Ю.И. Еще раз о парадоксах Пэнлеве // Изв. РАН. МТТ. 1995. № 1. С. 17–21.
3. Пэнлеве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат. 1954. 316 с.
4. Самсонов В.А. Очерки о механике: Некоторые задачи, явления и парадоксы. Наука. 1980. 64 с.
5. Бутенин Н.В. Рассмотрение "вырожденных" динамических систем с помощью гипотезы "скачка" // ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 1. С. 3–22.
6. Ле Суан Ань. Парадоксы Пэнлеве и закон движения механических систем с кулоновым трением // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 520–529.
7. Неймарк Ю.И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1972. 471 с.
8. Фуфаев Н.А. Теория движения систем с качением // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 1. С. 56–65.