ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА Том 59, Вып. 3, 1995

УДК 531; 521.135

 В.Н. Тхай

СИММЕТРИЧНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ ЗАДАЧИ МНОГИХ ТЕЛ. РЕЗОНАНСНОСТЬ И ПАРАД ПЛАНЕТ

Исследуется задача о движении механической системы, состоящей из $n + 1$ материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона. Получена обратимая система дифференциальных уравнений, которая описывает движение n точек относительно "основного тела". Вводится малый параметр, при нулевом значении которого каждая из n точек подвержена влиянию только "основного тела" и порождающая система распадается на n задач двух тел. Рассмотрены два типа порождающих, симметричных относительно неподвижного множества M автоморфизма, периодических орбит: 1) эксцентриситеты и наклонения равны нулю, 2) наклонения равны нулю.

Показано, что указанные орбиты продолжаются по малому параметру, в результате исследуемая система имеет периодические решения первого и второго рода. Все эти орбиты резонансны: средние движения тел относятся как целые числа. Кроме того, в моменты времени, кратные полупериоду, тела располагаются на одной прямой и наблюдается "парад планет".

Результаты применимы также для системы типа "Солнце–планета–спутники".

В общетеоретической части предлагаются два способа решения задачи о продолжении по параметру симметричных периодических решений и оценивается верхняя граница области продолжимости.

1. Симметричные периодические решения обратимой системы. Рассмотрим 2π-периодическую систему

$$\mathbf{u}^{\cdot} = \mathbf{U}_0(\mathbf{u},\mathbf{v},t)+\mu\mathbf{U}_1(\mu,\mathbf{u},\mathbf{v},t) \tag{1.1}$$

$$\mathbf{v}^{\cdot} = \mathbf{V}_0(\mathbf{u},\mathbf{v},t)+\mu\mathbf{V}_1(\mu,\mathbf{u},\mathbf{v},t), \qquad \mathbf{u}\in\mathbb{R}^l, \quad \mathbf{v}\in\mathbb{R}^n \quad (l\geq n)$$

с неподвижным множеством $\mathbf{M} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\colon\ \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$ линейного автоморфизма системы; μ – малый параметр. Пусть при $\mu = 0$ система (1.1) имеет 2π-периодическое решение

$$\mathbf{u} = \varphi(t), \qquad \mathbf{v} = \psi(t); \qquad \varphi(-t) = \varphi(t), \qquad \psi(-t) = -\psi(t)$$

симметричное относительно множества $\mathbf{M}$. Поставим задачу о существовании 2π-периодических симметричных решений (1.1) при $\mu \neq 0$. Эти решения определяются теоремой Хейнбокла–Страбла [1]: если $\mathbf{u}^0$, $\mathbf{v}^0$ – значения переменных $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ при $t = 0$, то достаточным условием периодичности является существование решения у системы функциональных уравнений

$$\mathbf{v}^0 = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{v}(\mu,\mathbf{u}^0,\mathbf{v}^0,\pi) = \mathbf{0} \tag{1.2}$$

Если при $\mu = 0$ и $\mathbf{v}^0 = 0$ выполняется условие $\det\| \partial v_s(0, \mathbf{u}^0, \mathbf{0}, \pi)/\partial u_j \| \neq 0$, то по теореме о неявной функции при малых $\mu \neq 0$ симметричное периодическое решение продолжается единственным образом. Следовательно, возможность продолжения может гарантироваться только порождающей системой; достаточные условия продолжения, в том числе и в неизолированных по Пуанкаре случаях, получены ранее [2].

Отметим, что граничное значение μ^* области продолжимости по параметру μ симметричных периодических движений принадлежит этой области. В противном случае нарушается непрерывная зависимость функции $\| \mathbf{v}(\mu, \mathbf{u}^0, 0, \pi) \|$ от μ при $\mu = \mu^*$.

Для решения конкретных механических задач поступим следующим образом. Перейдем к возмущениям $\mathbf{p} = \mathbf{u} - \varphi(t)$, $\mathbf{q} = \mathbf{v} - \psi(t)$. Тогда полученные уравнения

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}^{\cdot} &= \mathbf{A}(t)\,\mathbf{p} + \mathbf{B}(t)\,\mathbf{q} + \mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) + \mu \mathbf{U}(\mu, \mathbf{p} + \varphi(t), \mathbf{q} + \psi(t), t) \\
\mathbf{q}^{\cdot} &= \mathbf{C}(t)\,\mathbf{p} + \mathbf{D}(t)\,\mathbf{q} + \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) + \mu \mathbf{V}(\mu, \mathbf{p} + \varphi(t), \mathbf{q} + \psi(t), t)
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

также обратимы с множеством $\mathbf{M}_1 = \{\mathbf{p}, \mathbf{q}: \mathbf{q} = \mathbf{0}\}$ неподвижных точек линейного автоморфизма. Если удается построить [2] фундаментальную систему решений

$$
\mathbf{S}(t) = \begin{Vmatrix} \mathbf{p}^+(t) & \mathbf{p}^-(t) \\ \mathbf{q}^-(t) & \mathbf{q}^+(t) \end{Vmatrix}
$$

линейной относительно $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ и не зависящей от μ части, то симметричные периодические решения продолжимы при выполнении условия $\det \mathbf{q}^-(\pi) \neq 0$.

Другой способ решения задачи удобен в случае, когда указанную линейную часть удается привести к системе с постоянными коэффициентами. В этом случае можно [2] записать:

$$
\begin{aligned}
&\xi^{\cdot} = \Xi(\mu, \xi, \eta, \zeta, t), \qquad \xi \in \mathbb{R}^{l-n} \\
&\eta^{\cdot}_{1,s} = H_{1,s}(\mu, \xi, \eta, \zeta, t), \qquad \zeta^{\cdot}_{1,s} = \eta_{1,s} + Z_{1,s}(\mu, \xi, \eta, \zeta, t) \\
&\eta^{\cdot}_{1,s} = \zeta_{j-1,s} + H_{j,s}(\mu, \xi, \eta, \zeta, t), \qquad \zeta^{\cdot}_{j,s} = \eta_{j,s} + Z_{j,s}(\mu, \xi, \eta, \zeta, t) \\
&\eta^{\cdot}_{1,\nu} = \kappa_\nu \zeta_{1,\nu} + H_{j,\nu}(\mu, \xi, \eta, \zeta, t), \qquad \zeta^{\cdot}_{1,\nu} = \kappa_\nu \eta_{1,\nu} + Z_{1,\nu}(\mu, \xi, \eta, \zeta, t) \\
&\eta^{\cdot}_{k+1,\nu} = \kappa_\nu \zeta_{k+1,\nu} + \zeta_{k,\nu} + H_{k+1,\nu}(\mu, \xi, \eta, \zeta, t) \\
&\zeta^{\cdot}_{k+1,\nu} = \kappa_\nu \eta_{k+1,\nu} + \eta_{k,\nu} + Z_{k+1,\nu}(\mu, \xi, \eta, \zeta, t)
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

и в случае автоморфизма $(t, \xi, \eta, \zeta) \to (-t, \xi, \eta, -\zeta)$ решения продолжимы при всех некритических значениях $\kappa_\nu \neq Ni$ ($N \in \mathbb{Z}$). Очевидно, такой подход особенно полезен, когда линейная часть системы (1.3) не зависит явно от t.

В аналитическом случае область аналитичности решения по μ определяется теоремой Пуанкаре [3]. Пусть степенные ряды в правых частях системы (1.3) сходятся при $\| \mathbf{p} \|, \| \mathbf{q} \|, | \mu | \leqslant \alpha$, $| t | \leqslant \pi$. Тогда решение системы (1.3) можно представить рядами по степеням начальных значений $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{q}^0$ и параметра μ, сходящимся при

$$
\| \mathbf{p}^0 \|, \quad \| \mathbf{q}^0 \|, \quad |\mu| \leqslant \alpha^*, \quad |t| < \pi \tag{1.5}
$$

Число α^* зависит от α и постоянной Липшица L системы (1.3) и может быть сделано сколь угодно близким к числу $\operatorname{Inf}\{\alpha/2, \alpha[\exp(\pi L) - 1]^{-1}/2\}$.

В области (1.5) симметричные периодические решения строятся в виде рядов по параметру μ с коэффициентами, зависящими от начальных условий

$$
\begin{aligned}
\xi &= \xi_0(t) + \mu \xi_1(t) + \mu^2 \xi_2(t) + \ldots \\
\eta &= \eta_0(t) + \mu \eta_1(t) + \mu^2 \eta_2(t) + \ldots \\
\zeta &= \zeta_0(t) + \mu \zeta_1(t) + \mu^2 \zeta_2(t) + \ldots
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Слагаемые $\xi_0(t)$, $\eta_0(t)$, $\zeta_0(t)$ характеризуют возмущения порождающей системы, которая, конечно, может иметь и другие симметричные периодические движения, отличные от $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, $\mathbf{q} = \mathbf{0}$.

Интересуясь возможностью продолжения выбранного ($\mathbf{p} = \mathbf{0}$, $\mathbf{q} = \mathbf{0}$) периодического движения, положим в рядах (1.6) $\boldsymbol{\xi}_0(t) \equiv \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\eta}_0(t) \equiv \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\zeta}_0(t) \equiv \mathbf{0}$. Тогда уравнения для k-го приближения имеют вид

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_k = \mathbf{f}_k(t), \qquad \dot{\boldsymbol{\eta}}_k = \mathbf{G}\boldsymbol{\zeta}_k + \mathbf{g}_k(t), \qquad \dot{\boldsymbol{\zeta}}_k = \mathbf{R}\boldsymbol{\eta}_k + \mathbf{r}_k(t) \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1.7}$$

где $\mathbf{f}_k(t)$, $\mathbf{g}_k(t)$, $\mathbf{r}_k(t)$ – 2π-периодические функции t, известные на k-ом шаге, а структура постоянных матриц $\mathbf{G}$ и $\mathbf{R}$ ясна из (1.4). В силу четности функции $\boldsymbol{\varphi}(t)$ и нечетности функции $\boldsymbol{\psi}(t)$ при $k = 1$ имеем: $\mathbf{f}_1(t)$, $\mathbf{g}_1(t)$ – нечетные функции t, $\mathbf{r}_1(t)$ – четная функция t. Если среднее за период значение функции $\mathbf{r}_1(t)$ отлично от нуля, то присоединим это число как слагаемое к переменной $\boldsymbol{\eta}_1$. Тогда периодическое решение, определяемое из (1.7), состоит из четных функций $\boldsymbol{\xi}_1(t)$, $\boldsymbol{\eta}_1(t)$ и нечетной функции $\boldsymbol{\zeta}_1(t)$. При этом решение всегда содержит произвольную постоянную $\boldsymbol{\xi}_1^0 = \boldsymbol{\xi}_1(0)$; начальное значение для η_1 определяется единственным образом, а $\boldsymbol{\zeta}_1(0) = \mathbf{0}$.

Теперь четность (нечетность) функций $\mathbf{f}_k(t)$, $\mathbf{g}_k(t)$, $(\mathbf{r}_k(t))$ при $k = 2, 3, \ldots$ следует немедленно, если учесть, что роль функций $\boldsymbol{\varphi}(t)$, $\boldsymbol{\psi}(t)$ теперь играют эти функции плюс сумма первых $k - 1$ членов рядов (1.6).

Таким образом, симметричное периодическое движение (1.6) представится четными функциями $\boldsymbol{\xi}(\mu, t)$, $\boldsymbol{\eta}(\mu, t)$ и нечетной функцией $\boldsymbol{\zeta}(\mu, t)$. Из выбранного решения $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ единственным образом рождается семейство от $l - n$ произвольных постоянных $\boldsymbol{\xi}_1^0$ и параметра μ; начальные значения $\boldsymbol{\xi}^0$ и $\boldsymbol{\eta}^0$ представятся рядами от μ, сходящимися при $|\mu| \leqslant \alpha^*$.

По теореме Пуанкаре число α^* зависит от постоянной Липшица L, которую можно определить как верхнюю грань модулей частных производных. Это число зависит от $|\kappa_\nu|$, и в случае чисто мнимых κ_ν все $|\kappa_\nu|$ можно сделать меньшими единицы, если выполнить преобразование $\eta_{j,\nu} + i\,\zeta_{j,\nu} \to (\eta_{j,\nu} + i\,\zeta_{j,\nu})\exp(ik_\nu t)$, $k_\nu \in \mathbb{Z}$. Кроме того, линейные относительно μ и не зависящие от $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\zeta}$ члены уничтожаются дополнительным линейным преобразованием с 2π-периодическими по t коэффициентами. Последнее эквивалентно определению функций $\boldsymbol{\xi}_1(t)$, $\boldsymbol{\eta}_1(t)$, $\boldsymbol{\zeta}_1(t)$ в (1.6).

Таким образом, всегда можно считать, что в (1.4) чисто мнимые κ_ν по модулю не превышают единицы, а невыписанные явно члены являются нелинейными по совокупности переменных μ, $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$, $\boldsymbol{\zeta}$.

2. Уравнения движения. Рассмотрим основную задачу небесной механики – задачу о движении механической системы, состоящей из $n + 1$ материальных точек $\mathbf{M}_0, \mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_n$ с массами соответственно $m_0, m_1, \ldots, m_n$, взаимно притягивающихся по закону Ньютона. Положение каждой из точек $\mathbf{M}_j$ ($j = 1, \ldots, n$) определим относительно точки $\mathbf{M}_0$ тройкой величин (ξ_j, η_j, ζ_j). Тогда уравнения движения системы имеют вид

$$\begin{aligned}
&\ddot{\xi}_s + \frac{k_s\xi_s}{r_{0s}^3} + \mu\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{n} k_j^*\left[\frac{\xi_s - \xi_j}{r_{sj}^3} + \frac{\xi_j}{r_{0j}^3}\right] = 0\\
&\ddot{\eta}_s + \frac{k_s\eta_s}{r_{0s}^3} + \mu\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{n} k_j^*\left[\frac{\eta_s - \eta_j}{r_{sj}^3} + \frac{\eta_j}{r_{0j}^3}\right] = 0\\
&\ddot{\zeta}_s + \frac{k_s\zeta_s}{r_{0s}^3} + \mu\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{n} k_j^*\left[\frac{\zeta_s - \zeta_j}{r_{sj}^3} + \frac{\zeta_j}{r_{0j}^3}\right] = 0
\end{aligned} \tag{2.1}$$

$r_{0s}^2 = \xi_s^2 + \eta_s^2 + \zeta_s^2$, $r_{sj}^2 = (\xi_s - \xi_j)^2 + (\eta_s - \eta_j)^2 + (\zeta_s - \zeta_j)^2$ ($s, j = 1, \ldots, n$; $s \neq j$), где $k_s = k(1 + \mu_s)$, $\mu = \max\limits_j \mu_j$, $k_j^* = k\,\mu_j/\mu$, $\mu_j = m_j/m_0$, $k = fm_0$, а f – гравитационная постоянная.

В уравнениях (2.1) первое слагаемое в выражении для силы характеризует взаимодействие тел M_0 и M_s, второе – влияние тел M_j ($j \neq s$) на движение тела M_s. Если массы μ_s малы, то μ мало, и это влияние на основную задачу – задачу двух тел M_0 и M_s будет малым.

Другое достоинство системы (2.1) заключается в ее инвариантности относительно некоторых линейных преобразований при одновременной замене времени t на $-t$. Таким преобразованием будет, например, изменение знака в одной из групп переменных на противоположный. Не ставя целью дать полное описание всех линейных автоморфизмов системы (2.1), укажем только, что свойство обратимости позволяет доказывать существование и строить симметричные периодические движения.

3. Периодические решения первого рода. Перейдем в системе (2.1) к цилиндрическим координатам (ρ, θ, ζ): $\xi_s = \rho_s \cos\theta_s$, $\eta_s = \rho_s \sin\theta_s$ ($s = 1, \ldots, n$). Тогда уравнения движения примут вид:

$$\begin{aligned}
&\rho_s^{\cdot\cdot} - \rho_s \theta_s^{\cdot 2} + \frac{k_s \rho_s}{(\rho_s^2 + \zeta_s^2)^{3/2}} + \mu \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{n} k_j^* \left[\frac{\rho_s}{r_{sj}^3} + \left(\frac{1}{r_{0j}^3} - \frac{1}{r_{sj}^3} \right) \rho_j \cos(\theta_s - \theta_j) \right] = 0 \\
&\frac{d}{dt}(\rho_s^2 \theta_s^{\cdot}) + \mu \rho_s \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{n} k_j^* \left[\frac{1}{r_{sj}^3} - \frac{1}{r_{0j}^3} \right] \rho_j \sin(\theta_s - \theta_j) = 0 \qquad (3.1) \\
&\zeta_s^{\cdot\cdot} + \frac{k_s \zeta_s}{(\rho_s^2 + \zeta_s^2)^{3/2}} + \mu \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{n} k_j^* \left[\frac{\zeta_s - \zeta_j}{r_{sj}^3} + \frac{\zeta_j}{r_{0j}^3} \right] = 0 \quad (s = 1, \ldots, n) \\
&r_{sj}^2 = \rho_s^2 + \rho_j^2 - 2\rho_s \rho_j \cos(\theta_s - \theta_j) + (\zeta_s - \zeta_j)^2, \qquad r_{0j}^2 = \rho_j^2 + \zeta_j^2
\end{aligned}$$

При $\mu = 0$ получим порождающую систему, которая имеет частное периодическое решение вида

$$\rho_s = a_s(\text{const}), \quad \theta_s^{\cdot} = \omega_s(\text{const}), \quad \zeta_s = 0, \quad \omega_s^2 a_s^3 = k_s \quad (s = 1, \ldots, n) \qquad (3.2)$$

В этом решении каждое из тел M_s движется по окружности радиуса a_s с постоянной угловой скоростью ω_s, причем все окружности лежат в одной и той же неподвижной плоскости и имеют общий центр в точке M_0. Как и в задаче трех тел [4], периодические решения, рождающиеся из (3.2) при $\mu \neq 0$, назовем решениями первого рода.

В окрестности порождающего решения положим $\rho_s = a_s(1 + p_s)$, $\theta_s = \omega_s t + \psi_s$ ($s = 1, \ldots, n$). Тогда для переменных ρ_s, ψ_s, ζ_s получим условно-периодическую по t систему с набором частот $\{\omega_2 - \omega_1, \ldots, \omega_n - \omega_1\}$. Эта система будет периодической по времени, если $\omega_s - \omega_1 = l_s \omega$ ($\omega > 0$), $l_s \in \mathbb{Z}$ ($s = 1, \ldots, n$). Очевидно, в этом случае ω_s некратно ω, если ω_1 некратно ω. Если теперь перейти к новому безразмерному времени $\tau = \omega t$ и безразмерной переменной $\zeta(\zeta_s \to a_s \zeta_s)$, то уравнения примут вид

$$\begin{aligned}
&p_s^{\cdot\cdot} - (1 + p_s)(\omega_s / \omega + \psi_s^{\cdot})^2 + \frac{\omega_s^2}{\omega^2} \frac{(1 + p_s)}{[(1 + p_s)^2 + \zeta_s^2]^{3/2}} + \\
&+\mu \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{n} \frac{k_j^*}{\omega^2} \left\{ \frac{1 + p_s}{r_{sj}^3} + \left(\frac{1}{r_{0s}^3} - \frac{1}{r_{sj}^3} \right) \frac{a_j}{a_s} (1 + p_j) \cos[(l_s - l_j)\tau + \psi_s - \psi_j] \right\} = 0 \\
&\psi_s^{\cdot\cdot} + 2 \frac{\omega_s / \omega + \psi_s^{\cdot}}{1 + p_s} p_s^{\cdot} + \frac{\mu}{(1 + p_s)} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq s}}^{n} \frac{k_j^* a_j}{\omega^2 a_s} \left[\frac{1}{r_{sj}^3} - \frac{1}{r_{0j}^3} \right] (1 + p_j) \sin[(l_s - l_j)\tau + \psi_s - \psi_j] = 0
\end{aligned}$$

$$\zeta_s'' + \frac{\omega_s^2}{\omega^2}\frac{\zeta_s}{[(1+p_s)^2+\zeta_s^2]^{3/2}} + \mu\sum_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{n}\frac{k_j^*}{\omega^2}\left[\frac{\zeta_s}{r_{sj}^3} + \left(\frac{1}{r_{0j}^3}-\frac{1}{r_{sj}^3}\right)\frac{a_j}{a_s}\zeta_j\right] = 0 \tag{3.3}$$

$$r_{sj}^2 = a_s^2(1+p_s)^2 + a_j^2(1+p_j)^2 - 2a_s a_j(1+p_s)(1+p_j)\cos[(l_s-l_j)\tau+\psi_s-\psi_j] +$$
$$+(a_s\zeta_s - a_j\zeta_j)^2, \qquad r_{0j}^2 = a_j^2[(1+p_j)^2+\zeta_j^2]$$

где штрих означает дифференцирование по τ.

Явный вид уравнений (3.3) позволяет немедленно оценить область аналитичности, которая, очевидно, определяется возможностью разложения в ряды величин, обратных расстояниям. Во всяком случае за радиус α шара сходимости можно взять любое число, не превосходящее, например, $1/2$. Тогда постоянная Липшица L зависит от α и определяется из частных производных. При выбранном α постоянная L является функцией параметров a_s, ω_1, ω, μ.

Для полного формального совпадения рассматриваемой задачи с задачей разд. 1 полагаем выполненной в (3.1) замену $(\rho_s, \theta_s) \to (\rho_s, \overset{*}{\theta}_s)$, $\overset{*}{\theta}_s = \theta_s - \omega_1 t$, что означает переход к равномерно вращающейся с угловой скоростью ω_1 системе координат. Тогда в новых переменных на порождающем решении имеет $\theta_s^* = l_s\omega$, а неподвижное множество автоморфизма совпадает с осью ξ_s^* ($\xi_s^* = \rho_s\cos\theta_s^*$, $\eta_s = \rho_s\sin\theta_s^*$). Понятно, что при этом система (3.3) сохранит свой вид.

Система (3.3) 2π-периодична по τ. Поэтому, если линейное приближение удовлетворяет условиям продолжимости симметричного периодического движения (3.2) по μ, то такие движения существуют при реальных значениях $\mu \leqslant \mu^*$. Имея в виду, что применение результатов к конкретной системе Солнце–планеты составит предмет отдельного исследования, включающего построения периодических движений, остановимся здесь только на качественном аспекте проблемы.

Обратимся к линейной относительно $\mathbf{p}$, $\boldsymbol{\psi}$, $\boldsymbol{\zeta}$ и не зависящей от μ части системы (3.3)

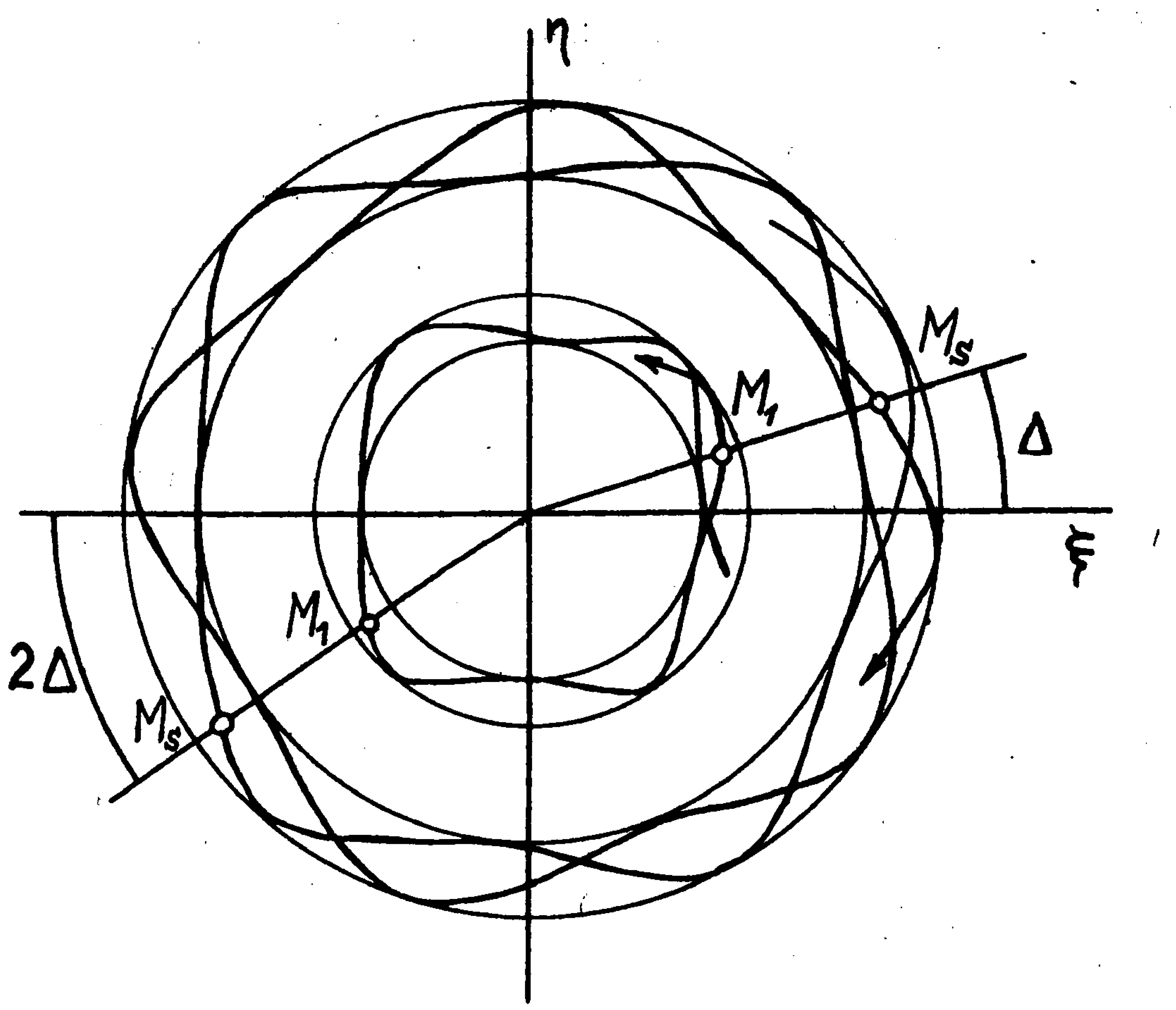
$$p_s'' - 3\omega_s^{*2} p_s - 2\omega_s\psi_s' + \ldots = 0 \quad (\omega_s^* = \omega_1/\omega + l_s)$$
$$\psi_s'' + 2\omega_s^* p_s' + \ldots = 0, \quad \zeta_s'' + \omega_s^{*2}\zeta_s + \ldots = 0 \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.4}$$

Элементарное преобразование позволяет переписать первые два уравнения в виде

$$p_s'' + \omega_s^{*2} p_s - 2c_s + \ldots = 0, \quad \psi_s' = c_s - 2\omega_s^* p_s, \quad c_s' + \ldots = 0$$

Теперь с учетом автоморфизма $(\tau, \mathbf{p}, \mathbf{p}', \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}', \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}') \to (-\tau, \mathbf{p}, -\mathbf{p}', -\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi}', \boldsymbol{\zeta}, -\boldsymbol{\zeta}')$ немедленно получим достаточное условие $\omega_1/\omega + l_s \neq l \in \mathbb{Z}$ продолжимости симметричных периодических движений (3.2). В силу существования нулевого решения для переменной $\boldsymbol{\zeta}$ и единственности продолжения получим плоские орбиты.

Теорема 1. При $\mu \leqslant \mu^*$ задача многих тел имеет решения, в которых тела $\mathbf{M}_s$ ($s = 1, \ldots, n$) движутся, во вращающейся с постоянной угловой скоростью ω_1 системе координат $\xi^*\eta^*\zeta$, по замкнутым плоским орбитам. Эти орбиты симметричны относительно оси ξ^*, период движения $\mathbf{M}_j$ ($j = 2, \ldots, n$) по орбите вокруг $\mathbf{M}_0$ равен $T_j = 2\pi/|\, l_j\omega\, |$ ($l_j \in \mathbb{Z}$, $l_j \neq 0$, l_j – разные), а тело $\mathbf{M}_1$ совершает $T_1 = 2\pi/\omega$ – периодические колебания около расположенного на оси ξ^* на расстоянии a_1 от $\mathbf{M}_0$ положения относительного равновесия. При $\mu \to 0$ орбиты превращаются в концентрические окружности с центром в $\mathbf{M}_0$ и радиусами $a_s = [f(m_0+m_s)/\omega_s^2]^{1/3}$, где $|\,\omega_s\,| = |\,\omega_1 + l_s\omega\,|$ – средние движения тел M_s по орбитам в неподвижном пространстве, причем $\omega_s/\omega + l_s \neq l \in \mathbb{Z}$.



Фиг. 1

В неподвижном пространстве установленные движения описываются функциями

$$\xi_s = a_s[1+p_s(\tau)]\cos[(\omega_1/\omega+l_s)\tau+\psi_s(\tau)]$$

$$\eta_s = a_s[1+p_s(\tau)]\sin[(\omega_1/\omega+l_s)\tau+\psi_s(\tau)], \quad \zeta_s = 0 \quad (s=1,\dots,n)$$

где $p_s(\tau)$, $\psi_s(\tau)$ – 2π-периодические функции τ. Тем не менее это решение не является периодическим в силу рациональной независимости чисел ω_1 и ω.

Во вращающейся с угловой скоростью ω_1 системе координат тела M_0, M_1, ..., M_n в моменты времени, кратные π/ω, располагаются на одной и той же неподвижной прямой – оси ξ^*. Очевидно, в эти моменты времени тела образуют прямую и в неподвижной системе координат (фиг. 1). Однако в этом случае сама прямая перемещается на угловое расстояние, кратное $\Delta = \omega_1\pi/\omega$.

Таким образом, установленные периодические движения указывают возможный путь для объяснения резонансности Солнечной системы и явления "парада планет".

Выпишем первое по μ приближение задачи

$$c_s' + \mu \sum_{j=1}^{n} \frac{k_j^* a_j}{\omega^2 r_{sj}^3 a_s}\sin[(l_s-l_j)\tau] = 0, \qquad \psi_s' = c_s - 2\omega_s^* p_s$$

$$p_s'' + \omega_s^{*2} p_s - 2c_s + \mu \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} \frac{k_j^*\{a_s - a_j\cos[(l_s-l_j)\tau]\}}{\omega^2 r_{sj}^3 a_s} = 0 \quad (s=1,\dots,n)$$

Интегрируя группу уравнений для c_s, получим

$$c_s = \frac{\mu}{\omega^2 a_s}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} \frac{k_j^*}{(l_s-l_j)\, r_{sj}} + \text{const}$$

Тогда оставшиеся уравнения дают p_s и ψ_s в виде эллиптических функций τ.

В порождающей системе переменная c_s имеет смысл вариации постоянной площадей в задаче двух тел $\mathbf{M}_0$ и $\mathbf{M}_s$ и сохраняет постоянное значение. При $\mu \neq 0$ величина c_s на симметричном периодическом решении является периодической функцией τ, причем колебание c_s происходит около нулевого среднего значения. В этом случае

$$\sum_{s=1}^{n} a_s c_s k_s^* = 0$$

что отражает факт сохранения кинетического момента.

4. Периодические решения второго рода. При $\mu = 0$ система (2.1) распадается на n подсистем (по номеру s), каждая из которых описывает невозмущенное кеплеровское движение задачи двух тел $\mathbf{M}_0$ и $\mathbf{M}_s$. Получим орбиты в виде кривых второго порядка

$$\rho_s(\theta_s) = \frac{\lambda_s}{1 + e_s \cos\theta_s}, \quad \rho_s^2 \dot{\theta}_s = c_s(\text{const}), \quad \lambda_s = \frac{c_s^2}{k_s}, \quad e_s = \frac{\sqrt{k_s^2 + h_s^2 c_s^2}}{k_s} \tag{4.1}$$

где c_s и h_s – постоянные площадей и энергии в s-й задаче. При этом движения будут происходить по эллипсам, если все $0 < e_s < 1$. Оси эллипсов могут совпадать в случае симметричных периодических движений как с осями ξ_s, так и с осями η_s одновременно по всем s (фиг. 2). Значит, связь между декартовыми и полярными координатами реализуется в одной из форм

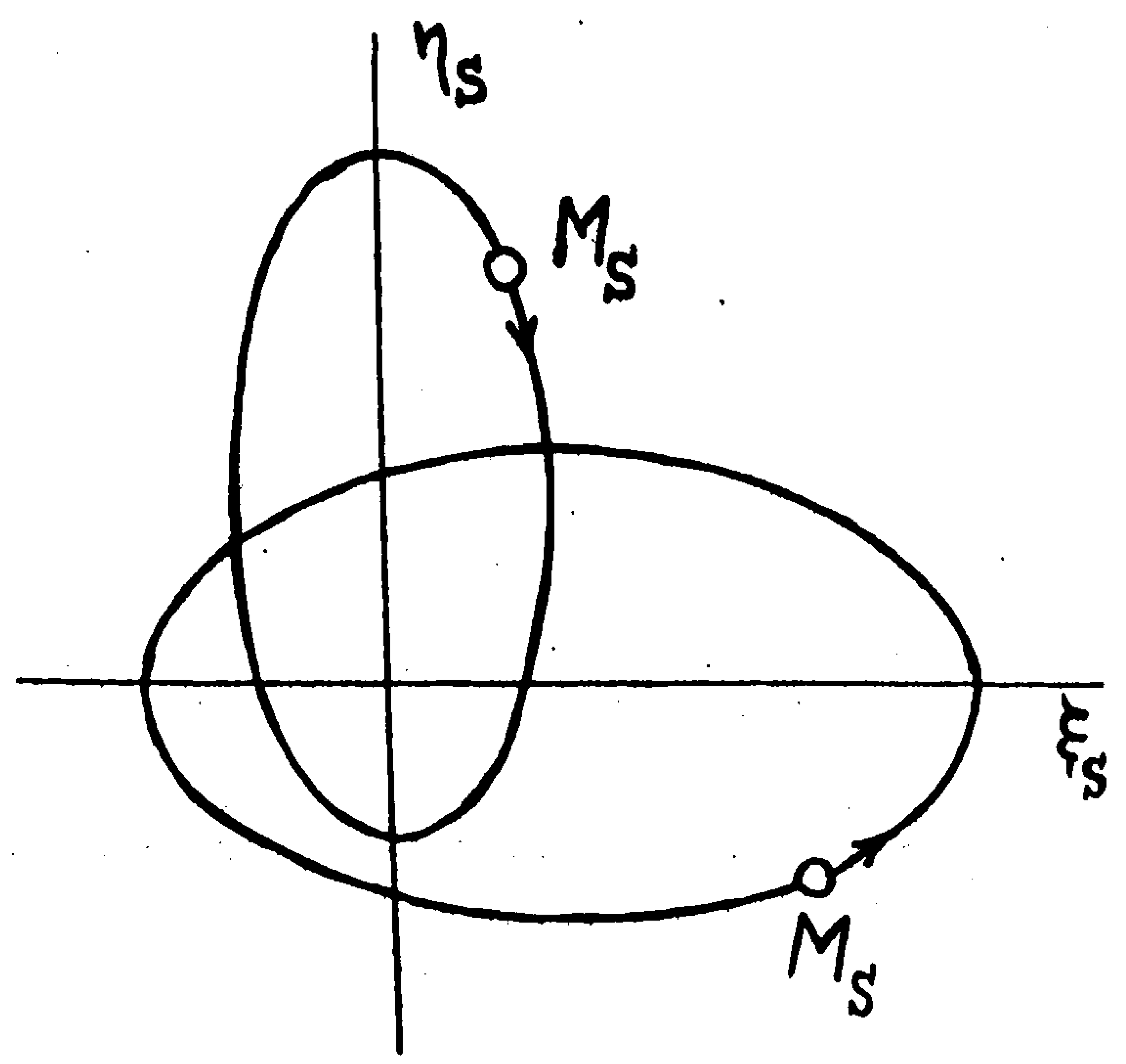
$$\xi_s = \rho_s(\theta_s)\begin{cases}\cos\theta_s \\ \sin\theta_s\end{cases}, \quad \eta_s = \rho_s(\theta_s)\begin{cases}\sin\theta_s \\ \cos\theta_s\end{cases} \tag{4.2}$$

Эллиптическое движение (4.2) является периодическим в s-й подсистеме. Для всей порождающей системы решение (4.1) образует $2n$-параметрическое от начальных условий (c_s, h_s) семейство симметричных условно-периодических движений. Среди множества этих движений существуют периодические движения, для которых выполнены условия

$$n_s = \sqrt{k_s} / a_s^{3/2} = l_s\omega \quad (l_s \in \mathbb{Z}), \quad \lambda_s = a_s(1 - e_s^2) \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{4.3}$$

где a_s – большие полуоси эллипсов, а ω – некоторое положительное число. Соотношения (4.3) означают, что средние движения по порождающим эллипсам относятся как натуральные числа.

Условия (4.3) числом $n - 1$ накладываются на $2n$ постоянных c_s, h_s. Следовательно, имеем $(n + 1)$-параметрическое от начальных условий семейство периодических движений. Отметим также, что условия (4.3) накладываются только на полуоси a_s эллипсов, не затрагивая эксцентриситетов e_s, а направление движения по каждому из эллипсов определяется индивидуально.



Фиг. 2

Периодические решения, полученные продолжением по параметру μ эллиптических решений (4.1), назовем периодическими решениями второго рода.

Пусть в соотношениях (4.2) реализуется верхний из двух возможных вариантов. В этом случае в окрестности порождающего решения (4.1) примем

$$\xi_s + i\eta_s = \rho_s(\theta_s)\, e^{i\theta_s}(1+p_s), \quad \xi_s - i\eta_s = \rho_s e^{-i\theta_s}(1+q_s) \quad (s=1,\dots,n)$$

(во втором случае в этих соотношениях необходимо поменять местами ξ_s и η_s). В результате получим уравнения для p_s и q_s, которые позволяют оценить область аналитичности и постоянную Липшица. Не приводя эти громоздкие уравнения полностью, выпишем только линейную относительно p_s и q_s и не зависящую от μ часть

$$\begin{gathered}\frac{d^2 p_s}{d\theta_s^2} + 2i\frac{dp_s}{d\theta_s} - \frac{3\rho_s}{2\lambda_s}(p_s+q_s) + \ldots = 0 \\ \frac{d^2 q_s}{d\theta_s^2} - 2i\frac{dq_s}{d\theta_s} - \frac{3\rho_s}{2\lambda_s}(p_s+q_s) + \ldots = 0 \quad (s=1,\dots,n)\end{gathered} \tag{4.4}$$

Невыписанные слагаемые – 2π-периодические функции $\theta_1, \dots, \theta_n$, а при выполнении условий (4.3) – 2π-периодические по одной переменной $\theta = \omega t$. Эту величину и выберем в качестве новой независимой переменной. При этом углы $\theta_s = l_s\theta + f_s(l_s\theta)$ [5], где f_s – ряд Фурье относительно θ_s. Имея это в виду, тем не менее для дальнейшего рассмотрения удобно в качестве переменной для s-й подсистемы сохранить угол θ_s.

Проведя элементарное преобразование системы (4.4), получим окончательную систему

$$\begin{gathered}\frac{dc_s}{d\theta_s} + \ldots = 0, \qquad \frac{d(p_s - q_s)}{d\theta_s} + 2i(p_s+q_s) - c_s + \ldots = 0 \\ \frac{d^2(p_s+q_s)}{d\theta_s^2} + \left[4 - \frac{3}{1+e_s\cos\theta_s}\right](p_s+q_s) + 2ic_s + \ldots = 0\end{gathered} \tag{4.5}$$

инвариантную относительно замены $(\theta_s, c_s, p_s - q_s, p_s + q_s) \to (-\theta_s, c_s, -(p_s - q_s), p_s + q_s)$ $(s = 1, \dots, n)$. Система (4.5) распадается в линейном приближении на n подсистем. Более того, при каждом s построение общего решения выписанной части требует анализа одного уравнения второго порядка

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + g(\theta)\frac{dx}{d\theta} + f(\theta) = 0, \quad f(\theta+2\pi) = f(\theta), \quad g(\theta+2\pi) = g(\theta) \tag{4.6}$$

инвариантного относительно замены $(\theta, x, x') \to (-\theta, x, -x')$, $x' = dx/d\theta$.

Каждому решению $x = x(\theta)$, $x' = x'(\theta)$ уравнения (4.6) отвечает также решение $x = x(-\theta)$, $x' = x'(-\theta)$, а в силу линейности, решениями также будут функции

$$1)\ \ x = x(\theta) + x(-\theta), \quad x' = x'(\theta) - x'(-\theta), \qquad 2)\ \ x = x(\theta) - x(-\theta), \quad x' = x'(\theta) + x'(-\theta)$$

Для первого из этих решений имеем $x'(0) = 0$, а для второго – $x(0) = 0$. Поэтому, если характеристические показатели уравнения (4.6) равны $\pm\,\kappa$, то фундаментальная система решений уравнения (4.6) с единичной матрицей начальных условий имеет вид

$$\begin{Vmatrix} A_+(\theta,\kappa) & A_-(\theta,\kappa) \\ A_-^*(\theta,\kappa) & A_+^*(\theta,\kappa)\end{Vmatrix} \tag{4.7}$$

$$A_\pm(\theta,\kappa) = \alpha(\theta)\, e^{\kappa\theta} \pm \alpha(-\theta)\, e^{-\kappa\theta}, \qquad A_\pm^*(\theta,\kappa) = \alpha(\theta)\, e^{\kappa\theta} \pm \alpha^*(-\theta)\, e^{-\kappa\theta}$$

где 2π-периодические функции $\alpha(\theta)$, $\alpha^*(\theta)$ равны $1/2$ в нуле.

Пусть теперь $\pm\kappa_s$ – характеристические показатели уравнений для $p_s + q_s$ в системе (4.5). Так как в данном случае векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ из (1.3) имеют вид $\mathbf{p} = (c_s, p_s + q_s)^T$, $\mathbf{q} = (p_s - q_s, p'_s + q'_s)^T$, то при $\kappa_s \neq Ni$ ($N \in \mathbb{Z}$) имеем:

$$\mathbf{p}^+ = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \alpha_s^{**}(\theta_s) & A_+(\theta_s, \kappa_s) \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{q}^- = \begin{Vmatrix} \beta_s^*(\theta_s) + \theta_s & \Gamma_-^*(\theta_s, \kappa_s) \\ \gamma_s^{**}(\theta_s) & A_-^*(\theta_s, \kappa_s) \end{Vmatrix}$$

$$A_+(\theta_s, \kappa_s) = \alpha_s(\theta_s)\exp(\kappa_s\theta_s) + \alpha_s(-\theta_s)\exp(-\kappa_s\theta_s)$$

$$A_-^*(\theta_s, \kappa_s) = \alpha_s^*(\theta_s)\exp(\kappa_s\theta_s) - \alpha_s^*(-\theta_s)\exp(-\kappa_s\theta_s)$$

$$\Gamma_-^*(\theta_s, \kappa_s) = \gamma_s^*(\theta_s)\exp(\kappa_s\theta_s) - \gamma_s^*(-\theta_s)\exp(-\kappa_s\theta_s)$$

где все функции 2π-периодические по θ_s и, кроме того, $\beta_s^*(\theta_s)$ – нечетные по θ_s. Поэтому $\beta_s^*(l_s\pi) = 0$ и

$$\det q^-(\pi) = \pi^n \prod_{s=1}^{n} \alpha_s^*(0)\{\exp(\kappa_s l_s \pi) - \exp(-\kappa_s l_s \pi)\}$$

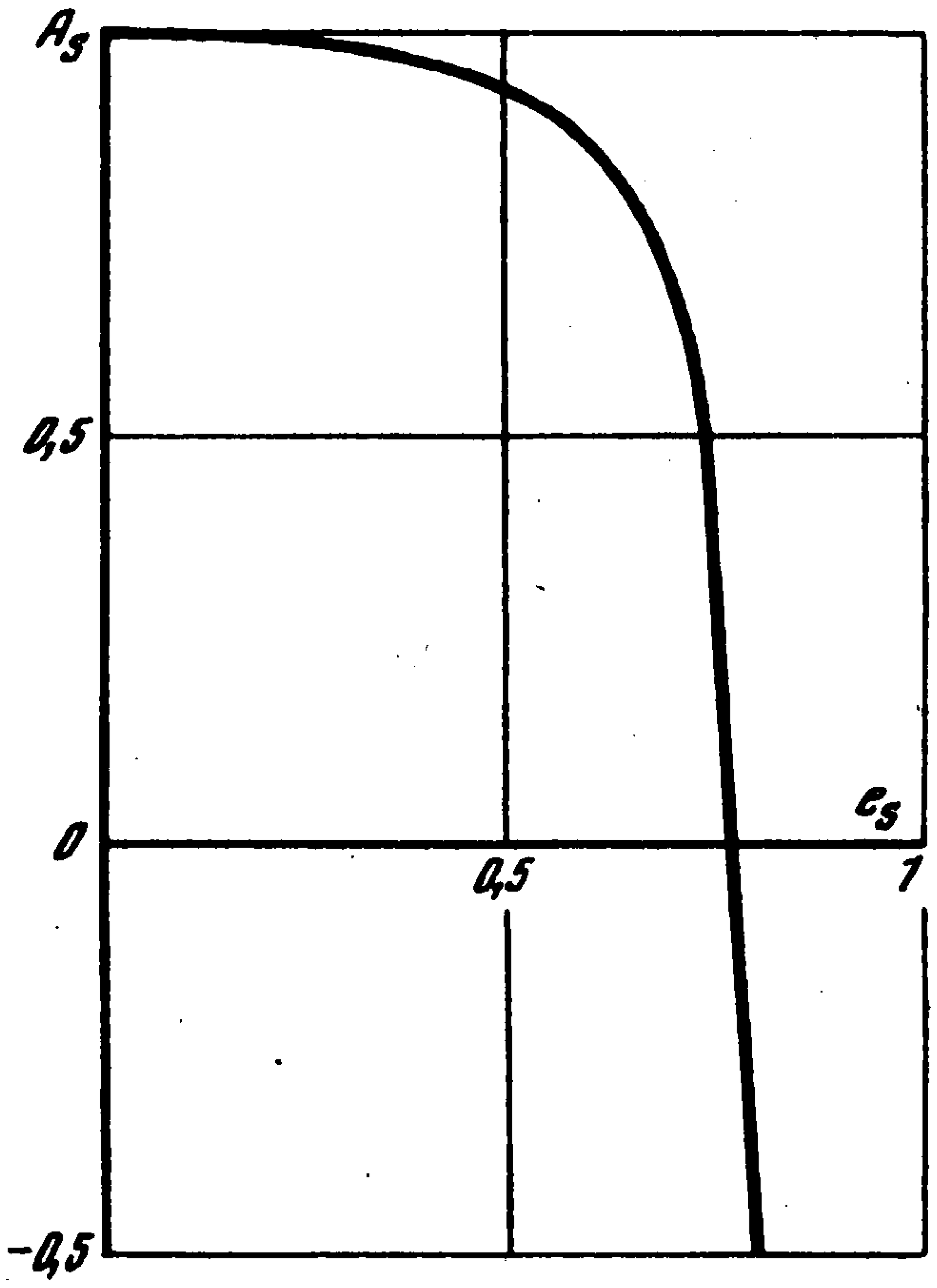
Следовательно, если $\kappa_s \neq \pm i\, \nu_s/l_s$ ($\nu_s = 1, \ldots, l_S$; $s = 1, \ldots, n$), то условия продолжимости по μ симметричных порождающих решений (4.1) выполнены.

Из матрицы (4.7) видно, что определение характеристических показателей требует вычисления в точке $\theta = 2\pi$ только одного частного решения с начальными условиями, например, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$. Тогда $2A = 2x(2\pi) = e^{2\pi\kappa} + e^{-2\pi\kappa}$. Значит, решения продолжаются, если все числа $A_s \neq \cos(2\pi\nu_s/l_s)$. Зависимость числа A_s от эксцентриситета e_s приведена на фиг. 3 ($x = p_s + q_s$). Видно, что за исключением конечного числа значений числа A_s не принимают критических значений.

Теорема 2. При $\mu \leqslant \mu^*$ задача $n + 1$ тел имеет семейство $(n + 1)$-параметрических от начальных условий плоских симметричных периодических орбит, единственным образом рождающихся из эллиптических порождающих движений (4.1). Исключение составляет конечное число значений эксцентриситетов, для которых при $\mu \neq 0$ указанные симметричные периодические орбиты могут не существовать.

При движении по симметричным периодическим орбитам все тела одновременно пересекают множество неподвижных точек автоморфизма. Если это множество совпадает с осью ξ, то тела M_s периодически, через время $T = \pi/\omega$, выстраиваются на оси ξ, демонстрируя "парад планет". Движение системы при этом, конечно, будет резонансным: средние движения относятся как целые числа.

Отдельный интерес представляет случай малых эксцентриситетов e_s по-



Фиг. 3

рождающего решения (4.1). Здесь характеристические показатели равны [6]

$$\kappa_s = i(4 - 3/\sqrt{1-e_s^2}) + \ldots$$

и условия продолжимости по μ движений (4.1), очевидно, выполнены.

Теорема 3. При достаточно малых значениях эксцентриситетов e_s порождающего эллиптического движения (4.1) симметричные периодические орбиты существуют и при $\mu \neq 0$.

5. Система Солнце–планета–спутники. Установленные выше результаты применимы не только к системам типа Солнце–планеты. В самом деле, перепишем (2.1) в виде

$$\xi_1^{\cdot\cdot} + \frac{k_1\xi_1}{r_{01}^3} + \mu \sum_{j=2}^{n} k_j^* \left[\frac{\xi_1 - \xi_j}{r_{1j}^3} + \frac{\xi_j}{r_{0j}^3}\right] = 0$$

$$\xi_s^{\cdot\cdot} + \frac{k_s\xi_s}{r_{0s}^3} + \frac{k\mu_1}{r_{s1}^3}(\xi_s - \xi_1) + \mu \sum_{j=2}^{n} k_j^* \left[\frac{\xi_s - \xi_j}{r_{sj}^3} + \frac{\xi_j}{r_{0j}^3}\right] = 0 \quad (s = 2, \ldots, n)$$

где теперь $\mu = \max\limits_{2 \leqslant s \leqslant n} \{\mu_s\}$, а μ_1 может значительно превосходить величины $1 + \mu_s$ $(s = 2, \ldots, n)$. Тогда при $\mu = 0$ уравнения для $\mathbf{M}_1$ допускают решение, в котором $\mathbf{M}_1$ движется по окружности a_1 с постоянной угловой скоростью ω_1 $(\omega_1^2 a_1^3 = k\,\mu_1)$. С точки зрения механики понятно, что при достаточно больших a_1 (малых ω_1) влияние $\mathbf{M}_1$ на движение системы тел, состоящей из "планеты" $\mathbf{M}_0$ и "спутников" $\mathbf{M}_2, \ldots, \mathbf{M}_n$ будет малым, что математически должно выразиться малым параметром.

Для доказательства данного факта перейдем к переменным p_s, ψ_s, ζ_s, полагая, что постоянные a_s, ω_s $(s = 1, \ldots, n)$ задаются соотношениями (3.2). Тогда получим систему (3.3), в которой суммирование проводится с $j = 2$ до n, а слагаемое с $j = 1$ определяет влияние тела $\mathbf{M}_1$ на тела $\mathbf{M}_s$ $(s = 2, \ldots, n)$. Предполагая теперь $a_s \ll a_1$ $(s = 2, \ldots, n)$, положим $a_s^* = a_s/a_1$. Тогда при слагаемом с $j = 1$ появится множитель $[\mu_1/(1+\mu_1)]\,(\omega_1/\omega_s)^2$. Поэтому, при $(\omega_1/\omega_s)^2$ порядка μ, слагаемое с $j = 1$ также относится к возмущениям.

Полученная система допускает при $\mu = 0$ нулевое решение $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\psi} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$. Эти решения продолжаются по μ так же, как в разд. 3.

Таким образом, в системе Солнце–планета–спутники существуют резонансные периодические движения, в которых спутники, во вращающейся с угловой скоростью ω_1 системе координат, движутся вокруг планеты по симметричным замкнутым орбитам, близким к концентрическим окружностям. При $n = 2$ отсюда получим симметричные орбиты Луны в системе Солнце–Земля–Луна, построенные ранее [7] в рамках ограниченной задачи трех тел.

В заключение укажем, что эллиптические порождающие орбиты в системе Солнце–планета–спутники также продолжимы.

Автор благодарит В.В. Румянцева, привлекшего внимание автора к явлению резонансности в Солнечной системе, а также В.В. Белецкого за интерес к работе и замечания.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (94-010-1674а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Heinbockel J.H., Struble R.A.* Periodic solutions for differential systems with symmetries // J. Soc. Indust. Appl. Math. 1965. V. 13. № 2. P. 425–440.
2. *Тхай В.Н.* Нелинейные колебания обратимых систем // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 1. С. 38–50.
3. *Розо М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости. М.: Наука, 1971. 288 с.
4. *Пуанкаре А.* Избр. тр. Новые методы небесной механики. Т. 1. М.: Наука, 1971. 771 с.
5. *Дубошин Г.Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968. 799 с.
6. *Тхай В.Н.* Некоторые задачи об устойчивости обратимой системы с малым параметром // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 1. С. 3–12.
7. *Miele A.* Theorem of image trajectories in the earth-moon space // Austron. Acta. 1960. V. 6. № 5. P. 225–232.

Москва

Поступила в редакцию 28.IV.1994