УДК 539:534.1

© 1995 г. А.А. Локшин

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН И МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ

Заметка состоит из двух частей. В первой части рассматривается взаимодействие падающей и отраженной волн в нелинейном стержне. Найдены точные формулы (а также оценки) для экстремальных значений напряжения в области взаимодействия падающей и отраженной волн. Во второй части, являющейся продолжением работ [1–6], строится факторизация нелинейного волнового уравнения "вблизи решения", что позволяет вывести обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, описывающее взаимодействие короткого импульса и простой волны, движущихся навстречу друг другу. Амплитуды рассматриваемых волн считаются конечными.

Метод, использованный в первой части работы, представляет собой развитие одной идеи из [7], где рассматривалась задача о вычислении максимального уровня воды на неподвижной стенке при накате простой волны на эту стенку. (См. также ([8], с. 34), где изложены результаты работы [7].) Отметим, однако, что прием, использованный в [7], пригоден для вычисления максимальной амплитуды результирующей волны лишь на границе области (на стенке канала). В то же время прием, предлагаемый в данной работе, позволяет исследовать экстремальные значения во всей области взаимодействия падающей и отраженной волн.

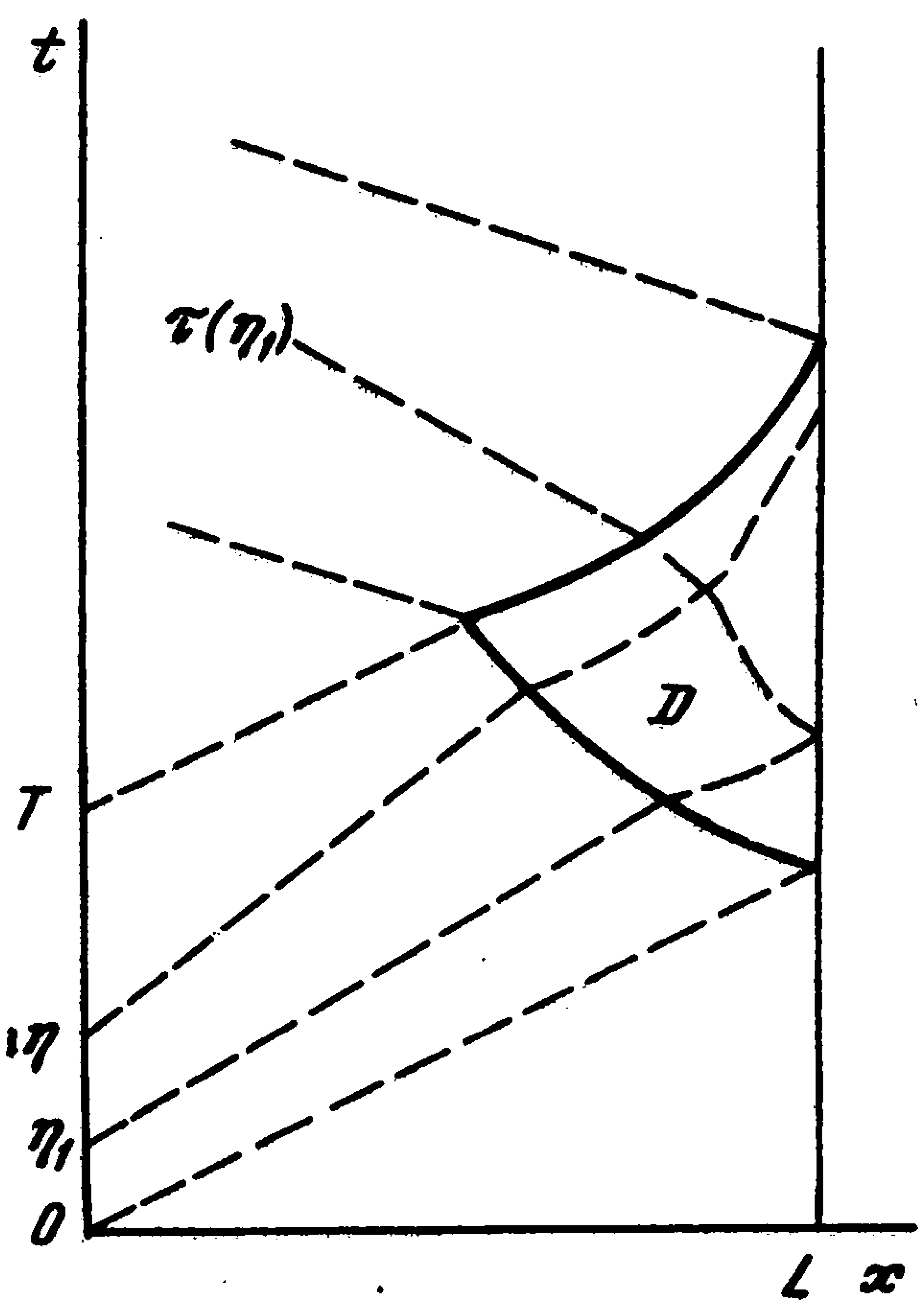
I. Рассмотрим нелинейно-упругий стержень плотности ρ = const, расположенный на участке $0 \leqslant x \leqslant L$ оси x; определяющее соотношение для материала стержня примем в виде $\varepsilon = a(\sigma)$. Здесь ε – деформация, σ – напряжение; нелинейная функция $a(\sigma)$ удовлетворяет условиям $a(0) = 0$, $0 < a'(\sigma) \leqslant$ const.

В лагранжевых координатах уравнения движения стержня имеют вид

$$\rho\frac{\partial \upsilon}{\partial t}=\frac{\partial \sigma}{\partial x},\quad \frac{\partial \upsilon}{\partial x}=\frac{\partial a(\sigma)}{\partial t} \tag{1.1}$$

где υ – скорость материального элемента. Зададим начальные условия в виде

$$\upsilon(0,x)=0,\quad \sigma(0,x)=0 \tag{1.2}$$



Наконец, поставим граничные условия для напряжений

$$\sigma(t,0)=f(t),\quad \sigma(t,L)=0 \tag{1.3}$$

Здесь $f(t)$ – гладкая функция, обращающаяся в нуль при $t \leqslant 0$ и при $t \geqslant T > 0$ (предполагается, что на отрезке $[0, T]$ функция $f(t)$ отлична от тождественного нуля).

Требуется найти (или оценить) экстремальные значения напряжения σ_{max} и σ_{min} на множестве D – замыкании области взаимодействия падающей и отраженной волн (фигура). При этом предполагается, что отраженная от конца стержня $x = L$ волна впервые достигает конца стержня $x = 0$ при $t > T$. Кроме того, предполагается, что в D ударные волны не возникают.

Введем обозначения

$$\psi(\sigma)=2\int\limits_0^{\sigma}\sqrt{\frac{a'(\sigma)}{\rho}}d\sigma$$

$$f_{\max}=\max_{0\leqslant t\leqslant T}f(t);\quad f_{\min}=\min_{0\leqslant t\leqslant T}f(t) \tag{1.4}$$

Пусть t^* – наименьшее значение $t\in[0,T]$, при котором $f(t)=f_{\min}$, а t^{**} – наименьшее значение $t\in[0,T]$, при котором $f(t)=f_{\max}$. Поскольку $f(t)\not\equiv 0$ $[0,T]$, имеем $t^*\neq t^{**}$.

Теорема 1. Пусть выполнены сделанные выше предположения. Тогда, если $t^*<t^{**}$, то

$$\sigma_{\max}=\psi^{-1}(\psi(f_{\max})-\psi(f_{\min})),\quad \sigma_{\min}\geqslant\psi^{-1}(\psi(f_{\min})-\psi(f_{\max})) \tag{1.5}$$

Если же $t^*>t^{**}$, то в первом из соотношений (1.5) знак равенства заменяется на $\leqslant$, а во втором – знак $\geqslant$ заменяется на знак равенства.

Доказательство. Введем римановы инварианты для системы (1.1) по формулам

$$r=\psi(\sigma)/2+\upsilon,\quad s=\psi(\sigma)/2-\upsilon \tag{1.6}$$

Как известно, инварианты r и s постоянны на соответствующих семействах характеристик. А именно,

$$r=r(\tau)$$

$$\tau(t,x)=\text{const}\quad \text{при}\ \ dt/dx=-\sqrt{\rho a'(\sigma)};\quad \tau=t\quad \text{при}\ \ x=L \tag{1.7}$$

Аналогично,

$$s=s(\eta)$$

$$\eta(t,x)=\text{const}\quad \text{при}\ \ dt/dx=\sqrt{\rho a'(\sigma)};\quad \eta=t\quad \text{при}\ \ x=0 \tag{1.8}$$

Из (1.6)–(1.8) следует, что

$$\sigma(t,x)=\psi^{-1}(r(\tau)+s(\eta)) \tag{1.9}$$

Рассмотрим теперь характеристику положительного наклона, исходящую из точки $t=\eta$, $x=0$, где $0\leqslant\eta\leqslant T$ (фигура). Пусть эта характеристика пересекается с прямой $x=L$ при $t=\tau$. Тогда в D величина τ, сохраняющаяся на характеристиках отрицательного наклона, оказывается функцией от $\eta:\tau=\tau(\eta)$ при $(t,x)\in D$. Возьмем произвольную точку $(t,x)\in D$ и проведем через нее характеристики положительного и отрицательного наклона. Пусть характеристика положительного наклона пересекается с прямой $x=0$ при $t=\eta$, а характеристика отрицательного наклона – с прямой $x=L$ при $t=\tau(\eta_1)$. Таким образом, (1.9) принимает вид

$$\sigma(t,x)=\psi^{-1}\{r(\eta_1))+s(\eta)\} \tag{1.10}$$

Из фигуры геометрически очевидно, что $0\leqslant\eta_1\leqslant\eta$ и что

$$\eta_1=\eta\quad \text{при}\quad x=L \tag{1.11}$$

Выразим теперь $s(\eta)$ через граничное значение на левом конце стержня (первое из условий (1.3). В простой волне, исходящей от конца $x=0$, очевидно, имеем $r=0$, откуда в силу (1.6) $\upsilon=-\psi(\sigma)/2$. Следовательно, в упомянутой простой волне $s=\psi(\sigma)$. Полагая здесь $x=0$ и учитывая, что $\eta=t$ при $x=0$, имеем в силу первого из условий (1.3)

$$s(\eta)=\psi(f(\eta)),\quad 0\leqslant\eta\leqslant T \tag{1.12}$$

Воспользуемся теперь граничным условием на правом (свободном) конце стержня. Из второго из условий (1.3) и (1.10), (1.11) имеем

$$r(\tau(\eta))+s(\eta)=0$$

откуда вследствие (1.12) получаем

$$r(\tau(\eta))=-\psi(f(\eta)),\quad 0\leq\eta\leq T \tag{1.13}$$

Подставляя (1.12), (1.13) в выражение (1.10), имеем в D:

$$\sigma(t,x)=\psi^{-1}\{\psi(f(\eta))-\psi(f(\eta_1))\} \tag{1.14}$$

Пусть теперь $t^*<t^{**}$. Тогда очевидно, что характеристика положительного наклона, исходящая из точки $t=t^{**}$, $x=0$, пересечется в D с характеристикой отрицательного наклона, исходящей из точки $t=t^*$, $x=L$. Теперь в силу монотонности функций ψ^{-1} и ψ (вытекающей из монотонности $a(\sigma)0$ следует, что максимальное значение $\sigma(t,x)$ в D достигается именно в точке пересечения двух упомянутых характеристик. Тем самым доказано первое из соотношений (1.5). Справедливость второго из соотношений (1.5) непосредственно следует из (1.14). Соответствующие соотношения для случая $t^*>t^{**}$ доказываются аналогично. Теорема доказана.

Замечание. Аналогичным образом могут быть исследованы задачи о взаимодействии падающей и отраженной волн при иных граничных условиях. Например, вместо задачи о стержне со свободным концом $x=L$ можно было бы рассмотреть задачу с закрепленным концом, задачу о точечном грузе на конце стержня и т.п.

2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 a(\sigma)}{\partial t^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}=0 \tag{2.1}$$

являющееся следствием системы (1.1). Возможность точной факторизации уравнения (2.1) была установлена в [1], специальная асимптотическая факторизация этого уравнения исследовалась в [5]. Здесь будет установлен следующий, более общий, чем в [5], результат:

Теорема 2. В области гладкого изменения $\sigma=\sigma(t,x)$ справедливо тождество

$$\frac{\partial^2 a(\sigma)}{\partial t^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}+N(t,x,\sigma)\equiv\left\{\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{a'(\sigma)}\mp\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial}{dx}+C(t,x)\frac{d}{d\sigma}[a'(\sigma)]^{-1/4}\right\}\times$$

$$\times\left\{\sqrt{a'(\sigma)}\frac{\partial}{\partial t}\pm\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial\sigma}{dx}+C(t,x)[a'(\sigma)]^{-1/4}\right\} \tag{2.2}$$

$$N(t,x,\sigma)\equiv-C^2(t,x)\frac{a''(\sigma)}{4[a'(\sigma)]^{3/2}}+[a'(\sigma)]^{-1/4}C_t'(t,x)\mp\frac{1}{\sqrt{\rho}}[a'(\sigma)]^{-1/4}C_x'(t,x) \tag{2.3}$$

$C(t,x)$ – произвольная гладкая функция. (В (2.2) и (2.3) одновременно выбираются либо верхние, либо нижние знаки.)

Замечания. 1°. В данной работе принято следующее соглашение: в произведении операторов (дифференцирования или умножения на функцию) раньше действует оператор, стоящий правее. Например,

$$\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{a'(\sigma)}\sqrt{a'(\sigma)}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\equiv\frac{\partial^2 a(\sigma)}{\partial t^2}$$

2°. Из (2.3) следует, что в частном случае, когда $C(t,x)\equiv 0$, имеем $N\equiv 0$ и представление (2.2) переходит в точную факторизацию нелинейного волнового оператора, установленную в [1]. При $C(t,x)=\left[a'(\rho g(L-x))\right]^{1/4}$, $g=\text{const}$, представление (2.2) переходит в результат работы [5].

3°. В дальнейшем будем придерживаться следующего соглашения, касающегося обозначения производных. Если $f=f(t, x, \sigma)$, то f_t' и f_x' обозначают частные производные при $\sigma = \mathrm{const}$, в то время как

$$\frac{\partial f}{\partial t}=f_t'+f_\sigma'\frac{\partial\sigma}{\partial t},\quad \frac{\partial f}{\partial x}=f_x'+f_\sigma'\frac{\partial\sigma}{\partial x}$$

Доказательство теоремы. Приведем соображения, на основе которых было получено тождество (2.2), (2.3), ограничиваясь для простоты случаем верхних знаков. Рассмотрим произведение

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{a'(\sigma)}-\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial}{\partial x}+\varphi\right\}\left\{\sqrt{a'(\sigma)}\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\psi\right\} \tag{2.4}$$

где $\varphi=\varphi(t, x, \sigma)$, $\psi=\psi(t, x, \sigma)$, и постараемся подобрать заранее не определенные функции φ и ψ так, чтобы выражение (2.4) отличалось от нелинейного волнового оператора из (2.1) лишь на члены, не содержащие производных от $\sigma(t, x)$. Перемножим операторные скобки в (2.4), придерживаясь указанных выше соглашений. Тогда (2.4) примет вид

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 a(\sigma)}{\partial t^2}-\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{a'(\sigma)}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\varphi\sqrt{a'(\sigma)}\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{a'(\sigma)}\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial\sigma}{\partial x}-\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}+\varphi\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{a'(\sigma)}\psi-\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\varphi\psi\end{gathered} \tag{2.5}$$

Заметим, что поскольку справедливо следующее общее тождество [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t}f(\sigma)\frac{\partial\sigma}{\partial x}\equiv\frac{\partial}{\partial x}f(\sigma)\frac{\partial\sigma}{\partial t}$$

второй и четвертый члены в (2.5) взаимно уничтожаются. Далее сумма третьего и седьмого членов в (2.5), очевидно, может быть переписана в виде

$$\left\{\varphi\sqrt{a'}+(\sqrt{a'}\psi)_\sigma'\right\}\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\sqrt{a'}\psi_t' \tag{2.6}$$

а сумма шестого и восьмого членов в (2.5) – в виде

$$\left\{\varphi\frac{1}{\sqrt{\rho}}-\psi_\sigma'\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right\}\frac{\partial\sigma}{\partial x}-\frac{1}{\sqrt{\rho}}\psi_x' \tag{2.7}$$

Приравняем нулю содержимое фигурных скобок в (2.6) и (2.7):

$$\varphi\sqrt{a'+(\sqrt{a'}\psi')_\sigma'}=0,\quad \varphi=\psi_\sigma' \tag{2.8}$$

Ясно, что если φ и ψ удовлетворяют уравнениям (2.8), то выражение (2.5) будет отличаться от левой части уравнения (2.1) на величину

$$N=\varphi\psi+\sqrt{a'(\sigma)}\psi_t'-\psi_x'/\sqrt{\rho} \tag{2.9}$$

Таким образом, осталось только решить систему (2.8). Отметим, что уравнения (2.8) оказываются обыкновенными дифференциальными (по σ), а переменные t, x участвуют в них лишь как параметры. Подставляя выражение для φ из второго уравнения (2.8) в первое, получаем уравнение с разделяющимися переменными. Интегрируя его, находим

$$\psi=C(t, x)[a'(\sigma)]^{-1/4} \tag{2.10}$$

откуда в силу второго уравнения (2.8)

$$\varphi = C(t,x)\frac{d}{d\sigma}[a'(\sigma)]^{-1/4} \tag{2.11}$$

Наконец, подставляя функции (2.10), (2.11) в (2.9), получаем требуемое выражение для невязки N. Теорема доказана.

Поставим теперь следующие граничные условия для уравнения (2.1):

$$\sigma(t,0) = \sigma_0(t/\gamma), \quad 0 < \gamma \ll 1 \tag{2.12}$$

$$\sigma(t,L) = \sigma_1(t) \tag{2.13}$$

Здесь $\sigma_0(t)$ – гладкая функция, обращающаяся в нуль при $t \leqslant 0$ и при $t \geqslant T > 0$; $\sigma_1(t)$ – гладкая функция, обращающаяся в нуль при $t \leqslant 0$; наконец $L = \mathrm{const} > 0$. Кроме того, поставим начальные условия:

$$\sigma(0,x) = \sigma_t'(0,x) = 0 \tag{2.14}$$

При исследовании поставленной задачи ограничимся временами, на которых не возникают ударные волны и, кроме того, импульсы, заданные на каждой из границ, не успевают отразиться от противоположной границы.

Далее обозначим решение задачи (2.1), (2.13), (2.14), определенное на луче $x \leqslant L$ через $\overline{\sigma}(t,x)$. Очевидно, что до возникновения разрывов функция $\overline{\sigma}(t,x)$ удовлетворяет уравнению простой волны, распространяющейся влево:

$$\sqrt{a'(\overline{\sigma})}\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial t} - \frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial x} = 0 \tag{2.15}$$

и может быть аналитически найдена методом характеристик.

Теперь рассмотрим выражение во внутренних скобках в произведении из правой части (2.2) при выборе верхних знаков и приравняем его нулю. Очевидно, что получающееся уравнение

$$\sqrt{a'(\sigma)}\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial\sigma}{\partial x} + \frac{C(t,x)}{[a'(\sigma)]^{1/4}} = 0 \tag{2.16}$$

описывает некоторую волну, распространяющуюся *вправо*. Потребуем теперь, чтобы функция $\overline{\sigma}(t,x)$, введенная выше, удовлетворяла уравнению (2.16). Так как функция $C(t,x)$ до сих пор оставалась произвольной, очевидно, можно положить

$$C(t,x) = -\left[\sqrt{a'(\overline{\sigma})}\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial x}\right][a'(\overline{\sigma})]^{1/4} \tag{2.17}$$

откуда в силу (2.15)

$$C(t,x) = -\frac{2}{\sqrt{\rho}}\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial x}[a'(\overline{\sigma})]^{1/4}$$

Далее, заметим, что для функции $C(t,x)$, определенной формулой (2.17), имеем

$$N(t,x,\overline{\sigma}) \equiv 0 \tag{2.18}$$

Действительно, с одной стороны, функция $\overline{\sigma}$ обращает в нуль нелинейный волновой оператор (2.1), а с другой стороны, является решением уравнения (2.16). Таким образом, сделанное утверждение вытекает из тождества (2.2).

Теперь становится ясно, что рассматриваемая задача о взаимодействии волн (2.1), (2.12) – (2.14) асимптотически сводится к существенно более простой задаче (2.12), (2.16) (где функция $C(t,x)$ определена формулой (2.17)).

Действительно, обозначим через $\tilde{\sigma}(t,x)$ решение задачи (2.12), (2.16) и подставим $\tilde{\sigma}(t,x)$

в тождество (2.2), где выбраны верхние знаки. Ясно, что правая часть тождества (2.2) обращается в нуль при подстановке $\sigma = \tilde{\sigma}(t,x)$. Поэтому из (2.2) следует, что

$$\frac{\partial^2 a(\tilde{\sigma})}{\partial t^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 \tilde{\sigma}}{\partial x^2} + N(t,x,\tilde{\sigma}) = 0 \tag{2.19}$$

Далее очевидно, что вне узкой полосы, в которой сосредоточен носитель короткого импульса, бегущего вправо, имеем $\tilde{\sigma}(t,x) = \overline{\sigma}(t,x)$. Поэтому в силу (2.18) из (2.19) вытекает, что $\tilde{\sigma}(t,x)$ удовлетворяет уравнению (2.1) вне упомянутой узкой полосы.

С другой стороны, в узкой полосе, где расположен носитель рассматриваемого короткого импульса, члены нелинейного волнового оператора $\partial_t^2 a(\tilde{\sigma})$ и $\rho^{-1}\partial_x^2\tilde{\sigma}$ имеют, очевидно, порядок $1/\gamma^2$, в то время как $N(t,x,\tilde{\sigma}) = O(1)$ (ибо, как было замечено выше, в выражение для $N(t,x,\tilde{\sigma})$ не входят производные функции $\tilde{\sigma}$). Следовательно, можно пренебречь невязкой N в (2.19), откуда вытекает, что $\tilde{\sigma}$ – асимптотическое решение уравнения (2.1).

Наконец, выполнение обоих граничных условий (2.12), (2.13) и обоих начальных условий (2.14) для функции $\tilde{\sigma}(t,x)$ следует из ее построения.

Решение $\tilde{\sigma}$ очевидно, может быть построено методом характеристик. А именно, уравнения характеристик таковы:

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{\rho a'(\sigma)}, \quad \frac{d\tilde{\sigma}}{dx} = -\frac{\sqrt{\rho}}{[a'(\sigma)]^{1/4}} C(t,x) \tag{2.20}$$

Здесь $\tilde{\sigma}(t,0) = \sigma_0(t/\gamma)$, а функция $C(t,x)$ по-прежнему определена формулой (2.17).

Замечание. Очевидно, что система (2.20) приводится к одному уравнению второго порядка

$$\frac{d}{dx}F\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{dt}{dx}\right) = -\sqrt{\rho}\,C(t,x)$$

$$\left(F = g\cdot f,\ g(\sigma) = \int_0^\sigma [a'(\sigma)]^{1/4} d\sigma,\ f^{-1}(\sigma) = \sqrt{a'(\sigma)}\right)$$

Рассмотрим в заключение частный случай, когда амплитуда импульса σ_1 настолько мала, что (вне области взаимодействия с импульсом σ_0) этот импульс распространяется без нелинейных искажений. Иными словами, пусть

$$a'(\sigma) = \frac{1}{E} = \text{const} \quad \text{при } |\sigma| \le \max_t |\sigma_1(t)| \tag{2.21}$$

Тогда, очевидно, на временах, предшествующих отражению импульса σ_1 от границы $x = 0$,

$$\overline{\sigma} = \sigma_1(t + (x - L)\sqrt{\rho/E})$$

Далее, подставляя последнее равенство в (2.17) и полагая

$$y = t + x\sqrt{\rho/E} \tag{2.22}$$

перепишем уравнения характеристик (2.20) в виде

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\rho}\left(\frac{1}{\sqrt{E}} + \sqrt{a'(\tilde{\sigma})}\right)$$
$$\frac{d\tilde{\sigma}}{dx} = \frac{2\sqrt{\rho}}{[a'(\tilde{\sigma})]^{1/4}E^{3/4}}\sigma_1'(y - L\sqrt{\rho/E}) \tag{2.23}$$

Эти уравнения (в отличие от более общих уравнений (2.20)) могут быть проинтегрированы в квадратурах. Действительно, деля второе из уравнений (2.23) на первое и интегрируя, имеем

$$\frac{E^{3/4}}{2}\int_{\sigma_0(\tau/\gamma)}^{\tilde{\sigma}}[a'(\sigma)]^{1/4}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}+a'(\sigma)\right)d\sigma=\sigma_1\left(y-\frac{L}{\sqrt{E/\rho}}\right)-\sigma_1\left(\tau-\frac{L}{\sqrt{E/\rho}}\right) \quad (2.24)$$

Здесь через τ обозначено значение t (а тем самым и y) при $x = 0$. Соотношение (2.24), очевидно, определяет функцию $\tilde{\sigma}=b(\tau,y)$. Подставляя это выражение для $\tilde{\sigma}$ в первое из уравнений (2.23) и интегрируя, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{\rho}}\int_{\tau}^{y}\frac{dy}{1/\sqrt{E}+\sqrt{a'(b(\tau,y))}}=x \quad (2.25)$$

Формулы (2.22), (2.24), (2.25) и определяют искомое асимптотическое решение поставленной выше задачи. Можно проверить, что в чисто линейном случае (т.е. при $a'(\sigma) = 1/E = \text{const}$) на временах, предшествующих отражению импульсов от границ $x=0$ и $x=L$, соотношения (2.22), (2.24), (2.25) дают

$$\tilde{\sigma}=\sigma_0\left(\frac{t-x\sqrt{\rho/E}}{\gamma}\right)+\sigma_1(t+x\sqrt{\rho/E})$$

т.е. построенное асимптотическое решение оказывается точным.

Отметим, что предложенный метод допускает распространение и на случай нелинейных волновых уравнений с переменными коэффициентами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Локшин А.А.* Нелинейная ударная волна в наследственной среде и точная факторизация нелинейного волнового оператора // Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 104–108.
2. *Локшин А.А.* Факторизация нелинейного волнового оператора и ее применение к исследованию ударных волн в нелинейной теории упругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1986. № 2. С. 134–141.
3. *Локшин А.А., Сагомонян Е.А.* Факторизация нелинейного волнового оператора и нелинейный аналог метода ВКБ в теории распространения упругих волн. // Изв. АН СССР. МТТ. 1987. № 1. С. 95–97.
4. *Локшин А.А., Сагомонян Е.А.* Нелинейные волны в механике твердого тела. М.: Изд-во МГУ, 1989. 144 с.
5. *Локшин А.А., Сагомонян Е.А.* О факторизациях нелинейного волнового уравнения // Мат. заметки. 1991. Т. 50. Вып. 6. С. 66–70.
6. *Lokshin A.A., Sagomonyan E.A.* Nonlinear Waves in Inhomogeneous and Hereditary Media. Berlin: Springer-Verlag, 1992. 121 p.
7. *Христианович С.А.* Отражение длинной волны конечной амплитуды, распространяющейся в призматическом канале // IV Гидрол. конф. балт. стран. Л., 1933. 12 с.
8. *Вольцингер Н.Е., Клеванный К.А., Пелиновский Е.Н.* Длинноволновая динамика прибрежной зоны. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 271 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.X.1993