УДК 532.5

© 1995 г. Г.П. Панасенко

ОСРЕДНЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Рассматривается система уравнений движения вязкой жидкости (с малым коэффициентом вязкости) в периодической пористой среде. Отношение периода структуры среды к характерному размеру задачи является малым параметром. Размер пор и период структуры имеют одинаковый порядок. Строится формальное асимптотическое решение, выводится осредненное уравнение – аналог уравнения Буссинеска.

В качестве модели пористой среды принимается сплошная среда с периодически расположенными полостями (см., например [1]). Пусть K – куб $\{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < \xi_j < 1,\ j = 1, 2, 3\}$. Поместим в K некоторое множество, состоящее из конечного числа областей, и продолжим его периодически (с периодом единица) на все пространство R^3. Пусть A – объединение всех полученных множеств. Предположим, что граница ∂A – гладкое многообразие и область $\Omega = R^3 \setminus A$ – связная, A_ε – множество, полученное из A гомотетичным сжатием в ε^{-1} раз (ε – малый параметр), т.е. $A_\varepsilon = \{x \in R^3 \mid x/\varepsilon \in A\}$.

В качестве геометрической модели системы пор примем область $\Omega_\varepsilon = R^3 \setminus A_\varepsilon$ и рассмотрим на этом множестве систему уравнений движения вязкой жидкости с малым коэффициентом вязкости μ_ε:

$$\begin{gathered}\rho(\partial \upsilon / \partial t + (\upsilon, \nabla)\upsilon) = -\nabla p + \mu_\varepsilon \Delta \upsilon + f_\varepsilon(x/\varepsilon, x, t, \upsilon) \\ \partial \rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho \upsilon) = 0, \quad \rho = Q(p), \quad \rho, \upsilon \in R^3 \\ \mu_\varepsilon = \varepsilon^\gamma \mu, \quad \gamma < 2, \quad \mu = \text{const}, \quad f_\varepsilon(\xi, x, t, \upsilon) = f(\xi, x, t\varepsilon^{2-\gamma}, \upsilon)\end{gathered} \tag{1}$$

$x \in \Omega_\varepsilon$ и $t > 0$ (ρ – плотность, υ – вектор скорости, p – давление), $f(\xi, x, \tau, \upsilon)$ и μ не зависят от ε, функция f 1-периодична по $\xi \in \Omega$, Q – заданная гладкая функция.

На границе области Ω_ε задано условие прилипания

$$\upsilon|_{\partial\Omega_\varepsilon} = 0 \tag{2}$$

и начальные значения неизвестных функций

$$t = 0: \quad \upsilon = 0, \quad p = 0 \tag{3}$$

Изучается предельное поведение решения задачи (1)–(3) при $\varepsilon \to 0$ (строится формальное асимптотическое решение).

Исследованию различных уравнений, заданных в областях типа посвящена обширная литература (например [2–8]). В частности рассматривались [5–8] системы уравнений Стокса и Навье–Стокса в пористых средах и были получены осредненные модели типа закона Дарси [5–8], нелинейного закона Дарси [8], а также закона Бринкмана [9]. Ниже для задачи (1)–(3) будет получена осредненная модель типа уравнения Буссинеска [10].

Формальное асимптотическое решение отыскивается в виде функций быстрых и медленных переменных:

$$\begin{gathered}\upsilon = \varepsilon^{2-\gamma}(\bar{\upsilon}(x,\tau) + V(x/\varepsilon, x, \tau)) \\ p = \bar{p}(x,\tau) + \varepsilon P(x/\varepsilon, x, \tau), \quad \rho = \bar{\rho}(x,\tau) + \varepsilon R(x/\varepsilon, x, \tau) \\ \tau = t\varepsilon^{2-\gamma}, \quad \langle V \rangle = \int\limits_{K \setminus A} V(\xi, x, \tau) d\xi = 0\end{gathered} \tag{4}$$

где $P(\xi,x,\tau)$, $V(\xi,x,\tau)$, $R(\xi,x,\tau)$ – 1-периодические функции ξ.

Подставляя (4) в (1) и применяя формулу дифференцирования сложной функции, получаем:

$$-\mu\Delta_\xi V+\nabla_x\overline{p}+\nabla_\xi P-f(\xi,x,\tau,\varepsilon^{2-\gamma}(\overline{\upsilon}+V))+\varepsilon^{3-2\gamma}\overline{\rho}(\overline{\upsilon}+V)\nabla_\xi V+$$

$$+\varepsilon^{2(2-\gamma)}(\overline{\rho}\partial(\overline{\upsilon}+V)/\partial\tau+R(\overline{\upsilon}+V)\nabla_\xi V+(\overline{\rho}+\varepsilon R)(\overline{\upsilon}+V)\nabla_x(\overline{\upsilon}+V))+ \tag{5}$$

$$+\varepsilon^{5-2\gamma}R\partial(\overline{\upsilon}+V)/\partial\tau+\varepsilon(\nabla_x p-2\mu\Delta_{x\xi}V)-\varepsilon^2\mu\Delta_x(\overline{\upsilon}+V)-h\overline{\upsilon}-\tilde{h}(x,\tau)=0$$

$$\varepsilon^{-1}\operatorname{div}_\xi(\overline{\rho}V)+\partial\overline{\rho}/\partial\tau+\operatorname{div}_x(\overline{\rho}(\overline{\upsilon}+V))+\operatorname{div}_\xi(R(\overline{\upsilon}+V))+\varepsilon(\partial R/\partial\tau+\operatorname{div}_x(R(\overline{\upsilon}+V))) \tag{6}$$

$$\overline{\rho}-Q(\overline{p})+\varepsilon R-(Q(\overline{p}+\varepsilon P)-Q(\overline{p}))=0 \tag{7}$$

$$\Delta_{x\xi}=\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial\xi_i}$$

h – постоянная (3×3)-матрица, $\tilde{h}(x,\tau)$ – вектор-функция, выбираемая из условия $\langle V\rangle=0$

На границе $\partial\Omega_\varepsilon$

$$\overline{\upsilon}+V=0 \tag{8}$$

Функции $\overline{p},\overline{\upsilon},\overline{\rho},\tilde{h},P,V,R$ отыскиваются в виде регулярных рядов по параметрам $\varepsilon_1=\varepsilon,\ \varepsilon_2=\varepsilon^{3-2\gamma},\ \varepsilon_3=\varepsilon^{2-\gamma}$

Подставляя эти ряды в уравнения (5)–(8), получаем

$$\sum_{k,l,m=0}^{\infty}\varepsilon_1^k\varepsilon_2^l\varepsilon_3^m(\nabla_x\overline{p}_{klm}+h\overline{\upsilon}_{klm}+\tilde{h}_{klm})+\sum_{k,l,m=0}^{\infty}\varepsilon_1^k\varepsilon_2^l\varepsilon_3^m(-\mu\Delta_\xi V_{klm}+\nabla_\xi P_{klm})=0$$

$$\varepsilon^{-1}\sum_{k,l,m=0}^{\infty}\varepsilon_1^k\varepsilon_2^l\varepsilon_3^m(\operatorname{div}_\xi(\overline{\rho}_{000}V_{klm})-\varphi^1_{klm})=0$$

$$\overline{\rho}_{000}-Q(\overline{p}_{000})+\sum_{\substack{k,l,m=0\\(k,l,m)\neq(0,0,0)}}^{\infty}\varepsilon_1^k\varepsilon_2^l\varepsilon_3^m\left(\left(R_{klm}-\left.\frac{\partial Q}{\partial p}\right|_{p=\overline{p}_{000}}P_{klm}-\varphi^3_{klm}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\overline{\rho}_{k+1,l,m}-\left.\frac{\partial Q}{\partial p}\right|_{p=\overline{p}_{000}}P_{k+1,l,m}\right)=0\right. \tag{9}$$

$$V_{klm}=-\upsilon_{klm},\quad \xi\in\partial\Omega$$

Нижние три индекса соответствуют номеру коэффициента в регулярном разложении по степеням $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$; φ^j_{klm} зависят от $\overline{\rho}_{qsr}$, $\overline{\upsilon}_{qsr}$, $\overline{p}_{qsr}$, R_{qsr}, V_{qsr}, P_{qsr} с индексами (q,s,r), такими, что $q\leqslant k, s\leqslant l, r\leqslant m$, причем хотя бы одно из этих неравенств строгое, φ^3_{klm} зависят также от $\overline{p}_{klm}$.

Заметим, что

$$\langle\varphi^1_{0lm}\rangle=0,\quad \langle\varphi^1_{k+1,l,m}\rangle=\partial\overline{\rho}_{klm}/\partial\tau+\operatorname{div}_x(\overline{\rho}_{klm}\overline{\upsilon}_{000}+\overline{\rho}_{000}\overline{\upsilon}_{klm})+$$

$$+\langle\operatorname{div}_x(\overline{\rho}_{klm}V_{000})+\operatorname{div}_x(\overline{\rho}_{000}V_{klm})\rangle+\overline{\psi}_{klm}(x,\tau) \tag{10}$$

где $\overline{\psi}_{klm}(x,\tau)$ также зависят от $\overline{\rho}_{qsr}$, $\overline{\upsilon}_{qsr}$ с индексами q,s,r, удовлетворяющими тем же неравенствам, что и выше, $(k,l,m)\neq(0,0,0)$.

Матрица h и вектор $\tilde{h}_{klm}$ выбираются из условия

$$\langle V_{klm}\rangle=0 \tag{11}$$

Построение коэффициентов $\overline{p}_{klm}$, $\overline{\upsilon}_{klm}$, $\overline{\rho}_{klm}$, $\tilde{h}_{klm}$, P_{klm}, V_{klm}, R_{klm} осуществляется по следующему алгоритму. Пусть $W(\xi)$ – (3×3)-матрица-функция, $F(\xi)$ – трехмерная вектор-строка, 1-периодические по ξ, являющиеся решением задачи

$$-\mu\Delta_\xi W+\nabla_\xi F=E,\quad \operatorname{div}_\xi W=0,\quad \xi\in\Omega \tag{12}$$

$$W=0;\quad \xi\in\partial\Omega$$

E – единичная (3×3)-матрица. Положим

$$V_{klm}=W(h\bar{\upsilon}_{klm}+\tilde{h}_{klm})+\tilde{V}_{klm}-\bar{\upsilon}_{klm} \tag{13}$$

где h и $\tilde{h}_{klm}$ выбираются из условия $\langle V_{klm}\rangle=0$, т.е. $(V_{klm},P_{klm},R_{klm})$ – решение задачи

$$-\mu\Delta_\xi V_{klm}+\nabla_\xi P_{klm}=\varphi^2_{klm},\quad \xi\in\Omega \tag{14}$$

$$\operatorname{div}_\xi(\rho_{000}V_{klm})=\varphi^1_{klm},\quad \xi\in\Omega \tag{15}$$

$$R_{klm}=\left.\frac{\partial Q}{\partial p}\right|_{p=\bar{p}_{000}}P_{klm}+\varphi^3_{klm},\quad \xi\in\Omega \tag{16}$$

$$\tilde{V}_{klm}=0,\quad \xi\in\partial\Omega \tag{17}$$

$$h=\langle W\rangle^{-1},\quad \tilde{h}_{klm}=-\langle W\rangle^{-1}\langle\tilde{V}_{klm}\rangle \tag{18}$$

Из (13), (18) следует, что действительно

$$\langle W(h\bar{\upsilon}_{klm}+\tilde{h}_{klm})+\tilde{V}_{klm}-\bar{\upsilon}_{klm}\rangle=0$$

Условие разрешимости задачи (14), (15), (17) ([2], с. 167)

$$\langle\varphi^1_{k+1lm}\rangle=0$$

и соотношения (9)–(11) дают уравнения для $\bar{\rho}_{klm}$, $\bar{p}_{klm}$, $\bar{\upsilon}_{klm}$:

$$h\bar{\upsilon}_{klm}+\tilde{h}_{klm}+\nabla_x\bar{p}_{klm}=0 \tag{19}$$

$$\partial\bar{\rho}_{klm}/\partial\tau+\operatorname{div}_x(\bar{\rho}_{klm}\bar{\upsilon}_{000}+\bar{\rho}_{000}\bar{\upsilon}_{klm})+\bar{\psi}_{klm}(x,\tau)=0$$

$$\bar{\rho}_{klm}=\left.\frac{\partial Q}{\partial p}\right|_{p=p_{000}}\bar{p}_{klm},\ (k,l,m)\neq(0,0,0)$$

$$\langle W\rangle^{-1}\bar{\upsilon}_{000}+\nabla\bar{p}_{000}-\langle W\rangle^{-1}\langle V_{000}\rangle=0 \tag{20}$$

$$\partial\bar{\rho}_{000}/\partial\tau+\operatorname{div}_x(\bar{\rho}_{000}\bar{\upsilon}_{000})=0,\quad \bar{\rho}_{000}=Q(\bar{p}_{000})$$

с однородными начальными условиями $t=0$: $\bar{p}_{klm}=0$, $\bar{\upsilon}_{klm}=0$

Система (20) – осредненная система уравнений нулевого порядка. Подставляя υ_{000} из первого уравнения и ρ_{000} из третьего во второе уравнение, получаем

$$\partial Q(\bar{p}_{000})/\partial\tau-\operatorname{div}_x(Q(\bar{p}_{000})\langle W\rangle(\nabla\bar{p}_{000}-\langle W\rangle^{-1}\langle\tilde{V}_{000}\rangle))=0 \tag{21}$$

где $\tilde{V}_{000}$ – решение задачи

$$-\mu\Delta_\xi V_{000}+\nabla_\xi P_{000}=f(\xi,x,\tau,0),\quad \xi\in\Omega$$

$$\operatorname{div}_\xi V_{000}=0,\quad \xi\in\Omega;\quad V_{000}|_{\partial\Omega}=0 \tag{22}$$

Уравнения (14)–(20) следует решать в таком порядке: при каждом фиксированном наборе k,l,m сначала решается задача (14), (15), (17) относительно пары $\tilde{V}_{klm}$, P_{klm} (при $(k,l,m)=(0,0,0)$ – задача (22)), затем определяем $\tilde{h}_{klm}$ из (18), далее решаются задачи (19),

(20) и, наконец, определяется R_{klm} из (16).Заметим, что осредненная модель (21), (22) – аналог модели Буссинеска: она переходит в модель Буссинеска [10] в случае линейной зависимости $Q(p)$. Если $f(\xi, x, \tau, \upsilon) = 0$ при $\tau \in [0, \tau_0]$, $\tau_0 > 0$, то по индукции можно показать, что $\tilde{V}_{klm} = 0$ при $\tau \in (0, \tau_0)$, так что $\overline{\upsilon} + V$ асимптотически равны нулю при $t = 0$. Условия (1)–(3) удовлетворяются асимптотически точно.

По аналогии с задачей (1) в области Ω_ε может быть рассмотрена задача (1)–(3) в области $G_\varepsilon \times R$, где $G_\varepsilon = \{x' \in R^2,\ x'/\varepsilon \in G_1\}$, область G_1 – ограниченная в R^2 с кусочно-гладкой грани цей, $x' = (x_1, x_2)$; функция f_ε зависит лишь от $x'/\varepsilon, x_3, t, \upsilon$, причем ее первые две компоненты $f_{\varepsilon 1}, f_{\varepsilon 2}$ нулевые.

Такая задача моделирует движение вязкой жидкости в канале сложной формы. При построении асимптотики используем (4) с заменой x/ε на x'/ε, x на x_3, $\overline{\upsilon} = (0, 0, \overline{\upsilon}_3)^*$. Аналог оператора среднего $\langle\cdot\rangle$ – интеграл $\int\limits_{G_1} \cdot\, d\xi'$, $\xi' = (\xi_1, \xi_2)$ (третья компонента векторов $\langle V_{klm}\rangle$ равна нулю).

Процедура, изложенная выше применительно к задаче (1)–(3), в области $G_\varepsilon \times R$ дает в нулевом приближении задачу

$$\frac{\partial Q(\overline{p}_{000})}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(Q(\overline{p}_{000})\langle \hat{W}\rangle\left(\frac{\partial \overline{p}_{000}}{\partial x_3} - \langle \hat{W}\rangle^{-1}\langle \hat{V}_{000}\rangle\right)\right) = 0, \quad \overline{p}_{000}\big|_{t=0} = 0$$

где $\hat{W}(\xi')$ – решение уравнения Пуассона

$$-\mu\Delta_{\xi'}\hat{W} = 1, \quad \xi' \in G_1; \quad \hat{W}\big|_{\partial G_1} = 0$$

$\hat{V}_{000}(\xi')$ – решение уравнения Пуассона

$$-\mu\Delta_{\xi'}\hat{V}_{000} = f^3(\xi', x_3, \tau, 0), \quad \xi' \in G_1, \quad \hat{V}_{000}\big|_{\partial G_1} = 0$$

Таким образом, для нестационарной системы уравнений движения вязкой жидкости с малым коэффициентом вязкости процедура гомогенизации дает в нулевом приближении аналог уравнения Буссинеска.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (93-911-1729).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984. 352 с.
2. *Хруслов Е.Я.* Задача Дирихле в областях со случайной границей // Вестник Харьковского ун-та, Сер. мех.-матем. 1970. № 34. С. 14–37.
3. *Cioranescu D., Paulin S.J.* Homogenization in open sets with holes // J. Math. Anal. and Appl. 1979. V, 71. № 2. P. 590–607.
4. *Олейник О.А., Иосифьян Г.А., Панасенко Г.П.* Асимптотическое разложение решений системы теории упругости в перфорированных областях // Мат. сб. 1983. Т. 120. № 1. С. 22–41.
5. *Бердичевский В.Л.* Пространственное осреднение периодических структур // Докл. АН СССР. 1975. Т. 222. № 3. С. 565–567.
6. *Волков Д.Б.* Асимптотическое разложение для решений систем уравнений Стокса и теории упругости в областях специального вида // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1983. Т. 23. № 6. С. 1464–1476.
7. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и их колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с.
8. *Allaire G.* Homogenization of the Navier-Stokes Equations in open sets perforated with tiny holes // Arch. Rat. Mech. and Anal. I. 1991. V. 113. № 3. P. 209–259; II. 1991. V. 113. № 3. P. 261–298.
9. *Brinkman H.C.* A calculation of viscous forse exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles // Appl. Scient. Res. Ser. A. 1947. V. 1. № 1. P. 27–34.
10. *Boussinesq J.* Recherches theoretiques sur l'ecoulement des nappes d'eau infiltrees dans le sol et sur le debit des sources // J. math. pures et appl. 1904. V. 10. № 1. P. 5–78.

Москва

Поступила в редакцию