УДК 532.516 : 534.1

© 1995 г. Э.Н. Потетюнко, Д.Б. Рохлин

АСИМПТОТИКА ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В ОДНОМЕРНОЙ СРЕДЕ С МАЛОЙ ВЯЗКОСТЬЮ

Строятся асимптотические разложения фундаментального решения сингулярно возмущенного волнового уравнения, описывающего процесс распространения возмущений в вязкой среде. Получено, в частности, равномерное разложение вблизи фронта, которое описывает сглаживание разрыва, обусловленное наличием вязкости.

1. Постановка задачи. Примем, что процесс распространения возмущений в вязкой среде описывается уравнением

$$P\zeta=\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\zeta=f(x,t)$$

Это справедливо, в частности, для вязкого газа.

При $\varepsilon=0$ фундаментальное решение оператора P претерпевает разрыв на фронте: $\zeta=\theta(t-|x|)/2$, θ – функция Хевисайда. В случае $\varepsilon\neq 0$ оно непрерывно, и поэтому при $\varepsilon\to 0$ должно быть функцией типа пограничного слоя в окрестности фронта. Ниже строятся асимптотические разложения фундаментального решения оператора P при $t\to +0$ и при $\omega=t/\varepsilon^2\to\infty$, $\lambda=x/t=\mathrm{const}$. В первом случае применяется теорема о разложении изображения, во втором – метод перевала.

2. Асимптотика при $t\to +0$. Пусть ζ – фундаментальное решение медленного роста оператора P

$$P\zeta=\delta(x,t) \tag{2.1}$$

Применим к уравнению (2.1) преобразование Фурье по x, найдем решение соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения ([1], с. 200) и используем формулу обращения преобразования Фурье. Получим

$$\zeta=\frac{\theta(t)}{\pi}\int_0^{+\infty}\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2}r^2t\right)\frac{\operatorname{sh}\alpha_2(r)t}{\alpha_0(r)}\cos xr\,dr \tag{2.2}$$

$$\alpha_0(r)=\left(\frac{\varepsilon^4}{4}r^4-r^2\right)^{1/2}$$

Интегрированием по частям можно показать, что $\zeta=O(x^{-N})$ при любых N, $x\to\pm\infty$. В дальнейшем будем считать, что $x>0$.

Применим к соотношению (2.2) преобразование Лапласа:

$$\int_0^{+\infty}\exp(-pt)\zeta\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\cos xr}{p^2+\left(1+\varepsilon^2p\right)r^2}dr=\frac{\exp\left(-xp\left(1+\varepsilon^2p\right)^{-1/2}\right)}{2p\left(1+\varepsilon^2p\right)^{1/2}}$$

Законность перестановки порядка интегрирования следует из абсолютной сходимости повторного интеграла и теоремы Фубини. Далее использованы формулы ([2], с. 264) и (3.723.2) ([3], с. 420).

По формуле обращения при учете замены $p = (p-1)/\varepsilon^2$ находим

$$\zeta = \frac{1}{4\pi i}\int_{\gamma_0-i\infty}^{\gamma_0+i\infty}\exp\left(\frac{(p-1)t}{\varepsilon^2}\right)\exp\left(-\frac{xp^{1/2}}{\varepsilon^2}\right)\frac{\exp\left(\varepsilon^{-2}xp^{-1/2}\right)}{(p-1)p^{1/2}}dp \tag{2.3}$$

Подставляя в (2.3) асимптотическое разложение последнего сомножителя в подынтегральном выражении в бесконечно удаленной точке и интегрируя почленно, в соответствии с формулой (9.397) ([4], с. 433) получим

$$\zeta \sim \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\left(t+\frac{x^2}{8t}\right)\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{k/2}C_k t^{k/2+1/2}}{\sqrt{\pi}\varepsilon^{k+1}}D_{-k-2}\left(\frac{x}{\varepsilon\sqrt{2t}}\right),\ t\to +0 \tag{2.4}$$

$$C_k = \sum_{\substack{m+2n=k\\ m,n\geq 0}}\frac{x^m}{m!\varepsilon^{2m}}$$

где D_{-k} – функции параболического цилиндра.

Соотношение (9.246.1) ([3], с. 1079) показывает, что члены ряда (2.4) образуют асимптотическую шкалу. Оценка остатка, из которой следует, что разложение (2.4) действительно является асимптотическим, сделана в [5] (с. 326).

Один член этого разложения дает

$$\zeta = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\frac{t^{3/2}}{x^2}\left(1+O(t)\right)\exp\left(-\frac{x^2}{4\varepsilon^2 t}-\frac{t}{\varepsilon^2}\right)$$

3. Перевальная точка и линия наибыстрейшего спуска. Произведя в (2.3) замену $z=\sqrt{p}$, где берется аналитическое продолжение главного значения корня с вещественной оси в правую полуплоскость, получим

$$\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{E(z,\omega)}{z^2-1}dz,\ E(z,\omega)=\exp\left(\omega q(z)\right) \tag{3.1}$$

где

$$\lambda = x/t>0,\ \omega = t/\varepsilon^2,\ q(z)=z^2-1-\lambda(z-1/z)$$

контур C – образ вертикальной прямой при указанной замене переменных.

Точки перевала находим из уравнения

$$z^3-\lambda z^2/2-\lambda/2=0 \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2) имеет единственный вещественный корень $z_1>0$. Ниже учитываем, что $q(z_1)<0$ при $\lambda\neq 1$, $q''(z_1)>0$, а также тот факт, что функция $z_1 = z_1(\lambda)$ монотонно возрастающая и $z_1(1)=1$.

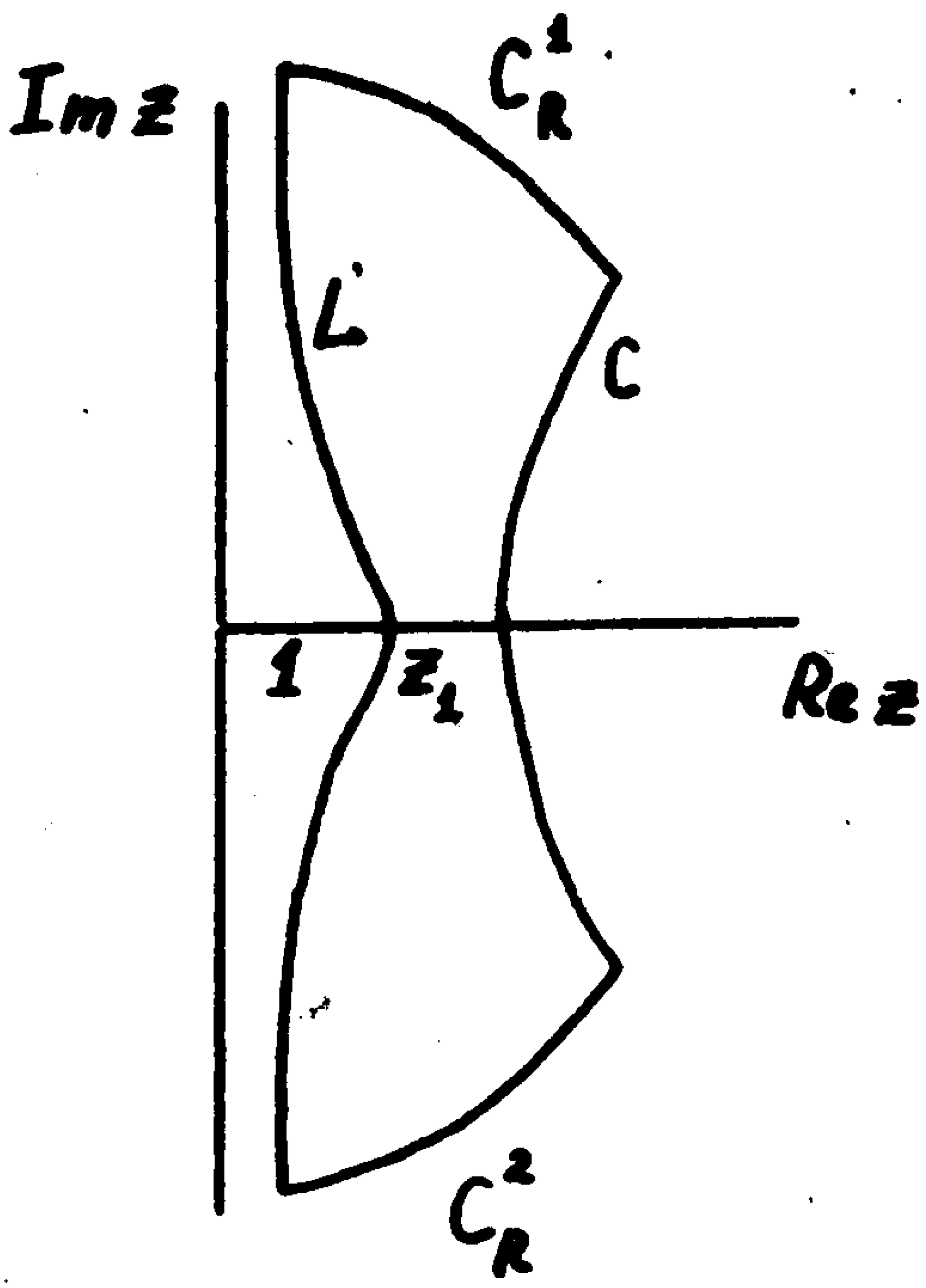
При помощи диаграммы Ньютона или непосредственно из формулы Кардано получаем следующие асимптотические представления для z_1:

$$z_1=\left(\frac{\lambda}{2}\right)^{1/3}+\frac{\lambda}{6}+\ldots,\ \lambda\to 0;$$

$$z_1=\frac{\lambda}{2}+\frac{2}{\lambda}+\ldots,\ \lambda\to\infty;\ z_1=1+\frac{\lambda-1}{2}+\ldots\ \lambda\to 1$$

Пусть $z=\xi+i\eta$. Уравнение линии наибыстрейшего спуска L находим из соотношений $\operatorname{Im}q(z)=\operatorname{Im}q(z_1)$, $\operatorname{Re}q(z)<\operatorname{Re}q(z_1)$:

$$F(\xi,\eta)=(2\xi-\lambda)\left(\xi^2+\eta^2\right)-\lambda=0 \tag{3.3}$$



Из уравнения (3.3) следует, что $\xi > \lambda/2$ и линия L симметрична относительно вещественной оси. Кроме того, L допускает явное представление $\xi = \xi(\eta)$, поскольку $\partial F/\partial\xi > 0$. Функция $\xi = \xi(\eta)$ – монотонно возрастающая при $\eta < 0$ и монотонно убывающая при $\eta > 0$.

При $z_1 > 1 (\lambda > 1)$ контур C можно деформировать в L. Действительно, на дугах окружностей радиуса R, расположенных между C и L (фиг.), имеем

$$\operatorname{Re} q(z) = R^2 \cos 2\varphi - \lambda R \cos\varphi + O(1) < 0$$

при достаточно больших $R (R = |z|,\ \varphi = \arg z)$. В случае $z_1 < 1 (\lambda < 1)$, при деформировании C в L нужно ещё учесть вычет подынтегральной функции относительно точки $z = 1$:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{E(z,\omega)}{z^2-1},\ 1\right) = \frac{1}{2} \tag{3.4}$$

4. Асимптотика при $\omega \to \infty$. Рассмотрим уравнение

$$q(z) - q(z_1) = -u^2 \tag{4.1}$$

По теореме об обратной функции существует голоморфная функция $z = z(u)$, определённая в некоторой окрестности начала координат на плоскости u, обращающая (4.1) в тождество и такая, что

$$z(0) = z_1,\ z'(0) = i(2/q''(z_1))^{1/2}$$

Здесь и ниже корень из вещественного положительного числа понимается в смысле главного значения.

Пусть δ – малое положительное число. Деформируем контур C в L и разобьём его на две части: $L_\delta \ni z_1$ – участок контура длины δ и $L \setminus L_\delta$. Для вычисления интеграла по L_δ сделаем в (3.1) замену $z = z(u)$. Оценивая интеграл по $L \setminus L_\delta$, получим

$$\zeta = \frac{E(z_1,\omega)}{2\pi i}\int_{-\alpha}^{\beta} \exp\left(-\omega u^2\right) G(u)\,du + \frac{1}{2}\theta(1-\lambda) + O\left(E(z_1,\omega), \exp(-\omega\gamma)\right),\ G(u) = \frac{1}{\left(z^2-1\right)}\frac{dz}{du} \tag{4.2}$$

где α, β, γ – некоторые положительные числа.

Второе слагаемое в правой части (4.2) добавлено в соответствии с формулой (3.4).

Используя лемму Ватсона ([6], с. 57), находим

$$\zeta = \frac{1}{2}\theta(t-x) + \frac{E(z_1,\omega)}{\omega^{1/2}}\left(\frac{1}{\left(z_1^2-1\right)\left(2\pi q''(z_1)\right)^{1/2}} + O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right) \tag{4.3}$$

Асимптотика (4.3) неравномерна вблизи фронта, т.е. при $\lambda \approx 1$ $(z_1 \approx 1)$. Для получения равномерного разложения представим функцию $G(u)$ в виде

$$G(u) = \frac{1}{2(u-b)} + T(u) \tag{4.4}$$

где $b = \sqrt{-q(z_1)}\, i \operatorname{sign}(\lambda - 1)$, а функция $T(u)$ голоморфна в некоторой окрестности начала координат при всех $\lambda \approx 1$.

В соответствии с [6] (с. 525) имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left(-\omega u^2\right)}{u-b} du = i\pi E(z_1, -\omega)\left(\operatorname{erfc}\left(-ib\omega^{1/2}\right) - 2\theta(1-\lambda)\right)$$

Подставляя (4.4) в (4.2) и используя последнее соотношение, находим

$$\zeta = \frac{1}{4}\operatorname{erfc}\left(-ib\omega^{1/2}\right) + \frac{E(z_1,\omega)}{2\pi i}\int\limits_{-\alpha}^{\beta} \exp\left(-\omega u^2\right) T(u) du + O\left(E(z_1,\omega)\exp(-\omega\gamma)\right)$$

Для вычисления главного члена разложения снова воспользуемся леммой Ватсона

$$\zeta = \frac{1}{4}\operatorname{erfc}\left(-ib\omega^{1/2}\right) + \frac{E(z_1,\omega)}{\omega^{1/2}}\left(\frac{1}{\left(z_1^2-1\right)\left(2\pi q''(z_1)\right)^{1/2}} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}ib} + O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right) \tag{4.5}$$

Заметим, что из вида асимптотики функции $\operatorname{erfc}(x)$ при $x \to \pm\infty$ следует, что при фиксированном $\lambda \neq 1$ формулу (4.5) можно заменить на (4.3).

Переходя в (4.5) к пределу при $\lambda \to 1$, получим, что асимптотика на самом фронте носит степенной характер:

$$\zeta = \frac{1}{4} + \frac{1}{16\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\omega^{1/2}} + O\left(\frac{1}{\omega^{3/2}}\right), \quad \lambda = 1$$

Рассмотренным выше способом может быть построена и асимптотика решения задачи Коши для начальных данных с локальными носителями. В случае $\zeta_t(x, 0) = 0$ асимптотика при всех λ описывается формулой типа (4.3) без функции Хевисайда. Соответствующий результат, более сложным чем в настоящей работе способом, был получен в статье [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.
2. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.
3. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
4. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука, 1981. 544 с.
5. *Риекстыньш Э.Я.* Асимптотические разложения интегралов. Рига: Зинатне, 1977. т. 2. 464 с.
6. *Федорюк М.В.* Асимптотика: Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.
7. *Войт С.С.* Распространение начальных уплотнений в вязком газе. // Уч. зап. МГУ, Механика, 1954. Т. 5. Вып. 172. С. 125–142.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию
5.1.1994