5. *Boley B.A.* Application of Saint-Venant's principle in dynamical problems // J. Appl. Mech. 1955. V. 22. № 2. P. 204–206.
6. *Новожилов В.В., Слепян Л.И.* О принципе Сен-Венана в динамике стержней // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 2. С. 161–281.
7. *Гомилко А.М., Городецкая Н.С., Мелешко В.В.* О динамическом принципе Сен-Венана для упругой полуполосы // Теоретическая и прикладная механика. Вып. 22. Харьков: Изд-во Харьков. ун-та, 1991. С. 40–46.
8. *Санчес-Паленсия Э.* Некоторые вопросы теории упругости в неограниченных областях и их приложения к контактным задачам // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1990. Т. 192. С. 183–196.
9. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
10. *Малюжинец Г.Д.* Формула обращения для интеграла Зоммерфельда // Докл. АН СССР. 1958. Т. 118. № 6. С. 1099–1102.
11. *Морозов Н.Ф., Нарбут М.А.* О принципе Сен-Венана при антиплоской деформации // Докл. РАН. 1994. Т. 337. № 3. С. 328–329.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
28.VII.1993

УДК 539.3

© 1995 г. **Р.В. Намм**

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ГЛАДКОГО РЕШЕНИЯ В СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ТРЕНИЕМ ПО ЗАКОНУ КУЛОНА И ДВУСТОРОННИМ КОНТАКТОМ

Устанавливается единственность гладкого решения в задаче с трением ([1], с. 134) в случае, когда множество виртуальных жестких перемещений не является тривиальным.

1. Эквивалентность краевой и вариационной постановок задачи с трением. Пусть $\Omega \subset R^2$ – ограниченная область с достаточно регулярной границей Г. Для вектора перемещений $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ определим тензор деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad i,j = 1,2$$

Тензор напряжений σ представляет собой линейную комбинацию компонент тензора деформаций

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\mathbf{u}) = C_{ijpl}\varepsilon_{pl}(\mathbf{u}), \quad p,l = 1,2$$

(по дважды повторяющимся числовым индексам подразумевается суммирование). Компоненты тензора модулей упругости C_{ijpl} обладают обычными свойствами симметрии

$$C_{ijpl} = C_{jilp} = C_{plij}, \quad i,j,p,l = 1,2$$

и предполагается существование такой положительной постоянной C_0, что

$$C_{ijpl}\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}(x))\varepsilon_{pl}(\mathbf{u}(x)) \ge C_0\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}(x))\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}(x))$$

$$\forall \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}(x)), \quad \forall x \in \Omega, \quad i,j,p,l = 1,2$$

Рассмотрим постановку задачи с трением.

Пусть на части Γ_1 своей границы Γ тело Ω подвергается действию поверхностных сил

$$P_i = \sigma_i = \sigma_{ij} n_j, \quad i = 1,2$$

($\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ – единичный вектор внешней нормали к Γ). На части Γ_0 заданы следующие краевые условия:

$$u_n = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \sigma_t = 0$$

где σ_t – вектор касательного напряжения, а на части Γ_f границы Γ накладываются краевые условия, соответствующие условиям трения по закону Кулона и двустороннему контакту [1]

$$\sigma_n = \sigma_{ij} n_j n_i = T_n, \quad T_n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$$

если $|\sigma_t| < g$, то $\mathbf{u}_t = 0$ ($g > 0$ на Γ_f); если $|\sigma_t| = g$, то существует $\lambda \geq 0$, такое, что $u_t = -\lambda\sigma_t$.

Здесь $\mathbf{T} = (T_1, T_2)$ – сила, с которой второе тело действует на Ω в зоне контакта, $g(x)$ – величина силы трения, $\mathbf{u}_t$ – касательная составляющая u.

В области Ω выполняются условия равновесия

$$-\partial[\sigma_{ij}(\mathbf{u})]/\partial x_j = F_i, \quad i = 1,2 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ – вектор заданных на Ω сил.

В дальнейшем будут использованы функциональные пространства [2] $L_2(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\overset{1}{W}_2(\Omega)$, $W_2^{1/2}(\Gamma)$, $\overset{2}{W}_2(\Omega)$.

Введем гильбертовое пространство ([3], с. 27)

$$H = \{\upsilon \in [\overset{1}{W}_2(\Omega)]^2, \ \upsilon_n = 0 \ \text{на} \ \Gamma_0\}$$

со скалярным произведением, индуцированным из $[\overset{1}{W}_2(\Omega)]^2$.

Рассматривается экстремальная (вариационная) задача [1], [4]

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{u},\mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) + j(\mathbf{u}) \to \min, \quad \mathbf{u} \in H \tag{1.2}$$

где

$$\alpha(\mathbf{u},\upsilon) = \int_\Omega C_{ijpl}\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{pl}(\upsilon)d\Omega$$

$$L(\mathbf{u}) = \int_\Omega F_i u_i d\Omega + \int_{\Gamma_f} T_n u_n d\Gamma + \int_{\Gamma_1} P_i u_i d\Gamma, \quad j(u) = \int_{\Gamma_f} g|\mathbf{u}_t| d\Gamma.$$

$$\mathbf{F} = (F_1, F_2) \in [L_2(\Omega)]^2, \quad \mathbf{P} = (P_1, P_2) \in [L_2(\Gamma_1)]^2$$

$$\mathbf{T} = (T_1, T_2) \in [L_2(\Gamma_f)]^2, \quad g(x) \in L_\infty(\Gamma_f), \quad g > 0 \ \text{на} \ \Gamma_f$$

Решение задачи с трением является и решением задачи (1.2). Если же решение задачи (1.2) принадлежит пространству $[\overset{2}{W}_2(\Omega)]^2$, то оно будет и решением задачи с трением. Обоснование этих фактов проводится по той же схеме, что и в [1], где задача с трением исследована при условии $\Gamma_0 = \Gamma_1 = \phi$.

Действительно, пусть u – решение задачи с трением. Из граничных условий задачи вытекает, что

$$\sigma_t(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}_t + g|\mathbf{u}_t| = 0 \ \text{на} \ \Gamma_f$$

поэтому для любого $\upsilon \in H$ имеем

$$\sigma_t(\mathbf{u}) \cdot (\upsilon_t - \mathbf{u}_t) + g(|\mathbf{v}_t| - |\mathbf{u}_t|) \geq 0 \ \text{на} \ \Gamma_f \tag{1.3}$$

Умножим обе части уравнения (1.1) на $\upsilon-\mathbf{u}$ и, используя формулу Грина, получим

$$a(\mathbf{u},\upsilon-\mathbf{u})-\int\limits_{\Gamma_f\cup\Gamma_0}[\sigma_t(u)\cdot(\upsilon_t-\mathbf{u}_t)+\sigma_n(u)(\upsilon_n-u_n)]d\Gamma-$$

$$-\int\limits_{\Gamma_1}\sigma_i(u)(\upsilon_i-u_i)]d\Gamma=\int\limits_{\Omega}F_i(\upsilon-u)_i d\Omega \tag{1.4}$$

Из граничных условий следует, что

$$\int\limits_{\Gamma_0}[(\sigma_t(u)\cdot(\upsilon_t-\mathbf{u}_i)+\sigma_n(u)\upsilon_n-u_n)]d\Gamma=0$$

Поэтому

$$a(\mathbf{u},\upsilon-\mathbf{u})-L(\upsilon-\mathbf{u})=\int\limits_{\Gamma_f}\sigma_t(u)\cdot(\upsilon_t-\mathbf{u}_t)d\Gamma$$

Обозначим $j(\upsilon)=\int\limits_{\Gamma_f}g|\upsilon_t|d\Gamma$ и добавим к обеим частям равенства выражение $j(\upsilon)-j(\mathbf{u})$.

Получим (в силу (1.3))

$$a(\mathbf{u},\upsilon-\mathbf{u})+j(\upsilon)-j(\mathbf{u})-L(\upsilon-\mathbf{u})=I_1\geq 0$$

$$I_1=\int\limits_{\Gamma_f}[\sigma_t(\mathbf{u})\cdot(\upsilon_t-\mathbf{u}_t)+g(|\upsilon_t|-|\mathbf{u}_t|)]d\Gamma$$

откуда следует вариационное неравенство

$$a(\mathbf{u},\upsilon-\mathbf{u})+j(\upsilon)-j(\mathbf{u})\geq L(\upsilon-\mathbf{u}),\quad \forall\upsilon\in H \tag{1.5}$$

которое эквивалентно задаче (1.1) (см. [5]).

Пусть теперь $\mathbf{u}\in[W_2^2(\Omega)]^2$ – решение задачи (1.2), а значит, и решение неравенства (1.5), $D(\Omega)$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω. В вариационном неравенстве (1.5) положим $\upsilon=\mathbf{u}\pm\varphi$, $\varphi\in[D(\Omega)]^2$. Принимая во внимание, что все граничные интегралы равны нулю и $j(\mathbf{u}\pm\varphi)-j(\mathbf{u})=0$, имеем

$$a(\mathbf{u},\varphi)=\int\limits_{\Omega}F_i\varphi_i d\Omega\ ,\quad \forall\Omega\in[D(\Omega)]^2$$

откуда (учитываем гладкость решения) вытекают уравнения равновесия (1.1).

Далее, применяя формулу Грина, из уравнений равновесия выводим равенство (1.4). Вместе с вариационным неравенством это дает

$$\int\limits_{\Gamma_1}(\sigma_i(u)-P_i)(\upsilon_i-u_i)d\Gamma+I_1+I_2\geq 0,\quad \forall\upsilon\in H \tag{1.6}$$

где $I_2=\int\limits_{\Gamma_f}(\sigma_n(u)-T_n)(\upsilon_n-u_n)d\Gamma.$

Пусть Ψ_0 – пространство вектор-функций $\psi\in[W_2^{1/2}(\Gamma)]^2$ с носителями из Γ_1. Возьмем $\upsilon=\mathbf{u}\pm\psi$, где $\psi\in\Psi_0$. Видно, что в этом случае

$$\int\limits_{\Gamma_1}(\sigma_i(u)-P_i)\psi_i d\Gamma=0,\quad \forall\psi\in\Psi_0$$

Отсюда вытекает [1], что $\sigma_i(u)=P_1$ почти всюду на Γ_1. Тем самым имеем $I_1+I_2\geq 0$, $\forall\upsilon\in H$

Положим $\upsilon=\mathbf{u}\pm\varphi$, где $\varphi\in[W_2^{1/2}(\Gamma)]^2$ – вектор-функция, такая, что $|\varphi_t|=0$ на Γ_f, а

$\varphi_n \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ – произвольная функция с носителем из Γ_f. Тогда имеем $\sigma_n = T_n$ почти всюду на Γ_f [1]. Из (1.6) теперь следует

$$I_1 \geq 0, \forall \upsilon \in H. \tag{1.7}$$

Пусть Ψ – пространство вектор-функций $\psi \in [W_2^{1/2}(\Gamma)]^2$ с носителями из Γ_f. Если $\psi \in \Psi$, то разложим ψ следующим образом: $\psi = \psi_n \mathbf{n} + \psi_t$, $\psi_n = \psi \cdot \mathbf{n}$ и положим в (1.7) $\upsilon_t = \psi_t$. Так как $\sigma_t(\upsilon) \cdot \mathbf{n} = 0$, $\upsilon \in H$, то $\sigma_t(\upsilon) \cdot \psi_t = \sigma_t(\upsilon) \cdot \psi$. Учитывая, что $|\psi_t| \leq |\psi|$, из (1.7) получим

$$\int_{\Gamma_f} [\sigma_t(u) \cdot \psi + g|\psi|] d\Gamma - \int_{\Gamma_f} [\sigma_t(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}_t + g|\mathbf{u}_t|] d\Gamma \geq 0, \quad \forall \psi \in \Psi$$

Заменяя ψ на $\pm\lambda\psi$ ($\lambda \geq 0$), находим, что

$$\left| \int_{\Gamma_f} \sigma_t(u) \cdot \psi d\Gamma \right| \leq \int_{\Gamma_f} g|\psi|] d\Gamma, \quad \forall \psi \in \Psi; \quad \int_{\Gamma_f} [\sigma_t(\mathbf{u})\mathbf{u}_t + g|\mathbf{u}_t|] d\Gamma \leq 0 \tag{1.8}$$

В первом неравенстве (1.8) представим $\sigma_t(u)$ как $g^{-1}\sigma_t(\mathbf{u})g$. Тогда получим ([1], с. 136) $|\sigma_t(\mathbf{u})| \leq g$ почти всюду на Γ_f. В этом случае $\sigma_t(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}_t + g|\mathbf{u}_t| \geq 0$, что, вместе со вторым неравенством (1.8), дает равенство

$$\sigma_t(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}_t + g|\mathbf{u}_t| = 0 \text{ почти всюду на } \Gamma_f \tag{1.9}$$

эквивалентное краевым условиям, которые накладываются на касательные составляющие $\mathbf{u}_t$ и σ_t в задаче с трением.

Таким образом, задачу (1.2) можно рассматривать как вариационную постановку исходной задачи с трением.

2. О единственности решения в задаче с трением. Ядро R билинейной формы $a(\mathbf{u},\upsilon) = \int_\Omega C_{ijpl}\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{pl}(\upsilon)d\Omega$ состоит из вектор-функций $\rho = (\rho_1, \rho_2)$, где $\rho_1(x) = a_1 - bx_2$, $\rho_2(x) = a_2 + bx_1$; a_1, a_2, b – произвольные фиксированные числа. Подпространство $\tilde{R} = H \cap R$ представляет собой множество виртуальных жестких перемещений (т.е. перемещений Ω как абсолютно твердого тела при сохранении строгих ограничений).

Если при любом ненулевом векторе $\rho \in \tilde{R}$ справедливо неравенство

$$\int_{\Gamma_f} g|\rho_t| d\Gamma - |L(\rho)| > 0 \tag{2.1}$$

то вариационная задача (1.2) разрешима.

Обоснование условия разрешимости проводится тем же способом, что и в [1], где подобное условие приведено для случая $\Gamma_f = \Gamma$. Действительно, так как функционал J непрерывный и выпуклый, то достаточно показать ([1], с. 68), что

$$J(\mathbf{u}) \to +\infty, \text{ если } \|\mathbf{u}\| \to \infty, \quad u \in H \tag{2.2}$$

Для $\upsilon \in H$ полагаем $\mathbf{w} = \upsilon - Q\upsilon$, Q – ортогональный в $[L_2(\Omega)]^2$ проектор из H на $\tilde{R}$. Тем самым $\upsilon = \mathbf{w} + \rho$, $\rho \in \tilde{R}$. Обозначим $\varepsilon(\upsilon) = \int_\Omega \varepsilon_{ij}(\upsilon)\varepsilon_{ij}(\upsilon)d\Omega$, $\|\cdot\|_0$ – норма в $[L_2(\Omega)]^2$.

Имеем ([5], с. 80)

$$a(\mathbf{w},\mathbf{w}) \geq C_0\varepsilon(\mathbf{w},\mathbf{w}) \geq C_1 \int_\Omega \frac{\partial w_i}{\partial x_k}\frac{\partial w_i}{\partial x_k} d\Omega \geq C_2\|\mathbf{w}\|^2$$

где C_0, C_1, C_2 - положительные постоянные

Кроме того,

$$\varepsilon(\upsilon)+\|\upsilon\|_0^2=\varepsilon(\mathbf{w})+\|\mathbf{w}\|_0^2+\|\rho\|_0^2 \tag{2.3}$$

По неравенству Корна выражение $\|\upsilon\|=(\varepsilon(\upsilon)+\|\upsilon\|_0^2)^{1/2}$ есть норма в H. В силу (2.3) норма $\|\upsilon\|$ эквивалентна $\|\mathbf{w}\|+\|\rho\|_0$. Из (2.1) и конечномерности множества $\tilde{R}$ вытекает существование такой постоянной $C>0$, что

$$\int_{\Gamma_f} g|\rho_t|d\Gamma-|L(\rho)|\geq C\|\rho\|_0$$

Кроме того,

$$|j(\mathbf{w}+\rho)-j(\rho)\leq|\int_{\Gamma_f} g|\mathbf{w}_t|d\Gamma|\leq C_3\|\mathbf{w}\|_0 \quad (C_3=\text{const}>0)$$

Поэтому

$$J(\upsilon)\geq\frac{1}{2}a(\mathbf{w},\mathbf{w})+j(\mathbf{w}+\rho)+C\|\rho\|_0-j(\rho)-L(\mathbf{w})\geq C_4(\|\mathbf{w}\|^2+\|\rho\|_0)+C_5\|\mathbf{w}\|$$

(C_4, C_5 – положительные постоянные).

С учетом эквивалентности $\|\upsilon\|$ величине $\|\mathbf{w}\|+\|\rho\|_0$ утверждение (2.2) доказано.

Условие (2.1) гарантирует существование решения вариационной задачи (1.2). Вопрос о единственности решения задачи с трением в случае, когда множество $\tilde{R}$ нетривиально, по-видимому, до сих пор оставался неисследованным [1, 6].

Ниже полагаем, что Γ_0 и Γ_f – прямолинейные отрезки. Для удобства изложения совместим координатную ось x_1 с Γ_0. Тогда подпространство $\tilde{R}=H\cap R$ состоит из вектор-функций вида $\rho=(a, 0)$, где a – произвольная постоянная.

Отметим, что для выполнения условия разрешимости (2.1) необходимо, чтобы отрезки Γ_f и Γ_0 были неортогональными, так как в противном случае $j(\rho)=\int_{\Gamma_f} g|\rho_t|d\Gamma=0$ и неравенство (2.1) невыполнимо.

При сделанных предположениях относительно Γ_0 и Γ_f справедлива следующая

Теорема. Пусть выполнено условие разрешимости (2.1). Тогда решение вариационной задачи (1.2) единственно в пространстве $[W_2^2(\Omega)]^2$.

Доказательство. Пусть имеется два решения $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ из пространства $[W_2^2(\Omega)]^2$. Имеем

$$0=J(\mathbf{u}_1+(\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1))-J(\mathbf{u}_1)=a(\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1)-L(\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1)+j(\mathbf{u}_2)-$$
$$-j(\mathbf{u}_1)+\frac{1}{2}a(\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1)$$

Ввиду (1.5) последнее слагаемое в правой части этого равенства равно нулю. Тем самым $\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1\in\tilde{R}$, т.е. $\mathbf{u}_2=\mathbf{u}_1+\rho$, где $\rho=(a, 0)$.

Обозначим $\tilde{\Gamma}_i=\{x\in\Gamma_f:|\sigma_t(\mathbf{u}_i)|<g\}$ $(i=1,2)$. Видно, что $\tilde{\Gamma}_1=\tilde{\Gamma}_2$. Рассмотрим два возможных случая: 1) $\operatorname{mes}\tilde{\Gamma}_1>0$, 2) $\operatorname{mes}\tilde{\Gamma}_1=0$. В первом случае из равенства (1.9) вытекает, что

$$|(\mathbf{u}_1)_t|=|(\mathbf{u}_2)_t|=0 \text{ на } \tilde{\Gamma}_1.$$

Но $(\mathbf{u}_2)_t=(\mathbf{u}_1)_t+\rho_t$, откуда $\rho_t=0$ на $\tilde{\Gamma}_1$. Так как множество Γ_f неортогонально Γ_0, то $\rho=(0, 0)$ и, тем самым, $\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2$.

Пусть теперь $\operatorname{mes}\bar{\Gamma}_1 = 0$, т.е. $|\sigma_t| = g$ почти всюду на Γ_f. Имеем

$$J(u_1) = \frac{1}{2}a(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) - L(\mathbf{u}_1) + j(\mathbf{u}_1)$$

$$J(u_1 + \rho) = \frac{1}{2}a(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) - L(\mathbf{u}_2) + j(\mathbf{u}_2)$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$L(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) + j(\mathbf{u}_1) - j(\mathbf{u}_2) = 0, \quad L(\rho) + j(\mathbf{u}_1) - j(\mathbf{u}_2) = 0 \tag{2.4}$$

Далее, учитывая (1.9), имеем почти всюду на Γ_f

$$\rho_t \sigma_t(\mathbf{u}_1) + g\zeta = 0, \quad |\rho_t||\sigma_t(\mathbf{u}_1)| = g|\zeta|, \quad |\rho_t| g = g|\zeta|$$

$$|\rho_t| = |\zeta| \quad (\zeta = |(\mathbf{u}_1)_t + \rho_t| - |(\mathbf{u}_1)_t|)$$

Так как Γ_f – прямолинейный отрезок, а $\rho = (a, 0)$, то $|\rho_t| = \tilde{c} = \text{const} \neq 0$ на Γ_f (множество Γ_0 не ортогонально Γ_f). Известно ([2], с. 50), что пространство $W_2^2(\Omega)$ в плоском случае вложено в пространство непрерывных на $\bar{\Omega}$ функций $C(\bar{\Omega})$. Поэтому функция ζ непрерывна на Γ_f. Обозначим

$$\Gamma_{\tilde{c}} = \{x \in \Gamma_f : \zeta = \tilde{c}\}, \quad \Gamma_{-\tilde{c}} = \{x \in \Gamma_f : \zeta = -\tilde{c}\}$$

Видно, что $\operatorname{mes}(\Gamma_{\tilde{c}} \cup \Gamma_{-\tilde{c}}) = \operatorname{mes}\Gamma_f$. Пусть одновременно $\operatorname{mes}\Gamma_{\tilde{c}} > 0$ и $\operatorname{mes}\Gamma_{-\tilde{c}} > 0$. Тогда в силу непрерывности ζ на Γ_f существует точка x_0, на которой $\zeta = 0$. Тем самым существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in B_\delta(x_0) \cap \Gamma$ ($B_\delta(x_0) = \{x \in R^2 : |x - x_0| < \delta\}$) выполнено неравенство $\zeta < \tilde{c}/2$, Так как $\operatorname{mes}(B_\delta(x_0) \cap \Gamma) > 0$, то получим противоречие условию $\operatorname{mes}(\Gamma_{\tilde{c}} \cup \Gamma_{-\tilde{c}}) = \operatorname{mes}\Gamma_f$. Поэтому либо $\operatorname{mes}\Gamma_{\tilde{c}} = \operatorname{mes}\Gamma_f$, либо $\operatorname{mes}\Gamma_{-\tilde{c}} = \operatorname{mes}\Gamma_f$.

Если $\operatorname{mes}\Gamma_{\tilde{c}} = \operatorname{mes}\Gamma_f$, то из (2.4) следует

$$L(\rho) + \int_{\Gamma_f} g|\rho_t| d\Gamma = 0$$

что противоречит условию разрешимости (2.1).

Если же $\operatorname{mes}\Gamma_{-\tilde{c}} = \operatorname{mes}\Gamma_f$, то из (2.4) имеем

$$L(\rho) - \int_{\Gamma} g|\rho_t| d\Gamma = 0$$

что снова противоречит условию разрешимости (2.1). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
2. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. шк., 1977. 431 с.
3. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
4. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979. 399 с.
5. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости, М.: Мир, 1974. 159 с.
6. *Лапин А.В.* Сеточные аппроксимации вариационных неравенств Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984. 96 с.

Хабаровск

Поступила в редакцию
14.II.1994