УДК 539.3

© 1995 г. Н.Ф. Морозов, М.А. Нарбут

АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ УПРУГОГО КЛИНА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ, СОСРЕДОТОЧЕННОМ В ОКРЕСТНОСТИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ

Исследуется асимптотика дальнего поля в клине при статическом и динамическом нагружении в окрестности вершины. Показано, что в отличие от известного парадокса Карозерса решение как статической, так и динамической задачи не удовлетворяет принципу Сен-Венана при любых углах раствора клина. Решение динамической задачи для гармонического воздействия строится при помощи интегралов Зоммерфельда. Показано, что асимптотика решения в дальней зоне не сен-венанова, т.е. соответствующий коэффициент при главном члене асимптотического разложения равен "дробному" моменту внешних сил.

Решение плоской статической задачи теории упругости для клина, на боковых гранях которого в некоторой малой окрестности угловой точки приложены нормальные напряжения, статически эквивалентные паре сил, замечательно тем, что для достаточно большого угла раствора клина асимптотика напряжений в дальней зоне не согласуется с решением предельной задачи по Сен-Венану (парадокс Карозерса [1]). Представляет интерес вопрос о том, переносится ли парадокс Карозерса на случай динамического (импульсного или гармонического) нагружения клина. Ниже дается ответ на этот вопрос в случае антиплоского сдвига. Вопрос о специфике применения принципа Сен-Венана в динамических задачах рассматривался ранее ([2–8]).

1. Решение динамической задачи теории упругости для клина целесообразно предварить вполне элементарным анализом соответствующей статической задачи. В случае антиплоского сдвига вектор перемещения имеет только одну отличную от нуля компоненту $u_3 = w(r, \theta)$, которая удовлетворяет уравнению Лапласа в области $\Omega = \{(r, \theta, z)|r > 0, -\alpha < \theta < \alpha, -\infty < z < \infty\}$. На гранях клина зададим напряжения:

$$\theta = \pm\alpha, \quad \tau_{\theta z} = \mu r^{-1} dw/d\theta = f(r) \tag{1.1}$$

предполагая, что носитель функции $f(r)$ сосредоточен в малой окрестности вершины клина $(0, \delta)$, причем главный вектор сил равен нулю, а главный момент отличен от нуля:

$$F = M_0 = \int_0^\delta f(r)dr = 0, \quad M_1 = \int_0^\delta rf(r)dr \neq 0 \tag{1.2}$$

Для решения поставленной задачи воспользуемся интегральным преобразованием Меллина

$$\tilde{w}(s,\theta) = \int_0^\infty w(r,\theta)r^{s-1}dr$$

Изображение по Меллину $\tilde{w}(s, \theta)$ удовлетворяет уравнению и краевому условию

$$\partial^2\tilde{w} / \partial\theta^2 + s^2\tilde{w} = 0 \tag{1.3}$$

$$\theta=\pm\alpha,\quad \mu\partial\tilde{w}/\partial\theta=\int\limits_0^\infty f(r)r^2dr\equiv M_s$$

Ограничимся рассмотрением антисимметричного решения, тогда

$$\tilde{w}=M_s(\mu s)^{-1}\sin(s\theta)/\cos(s\alpha)$$

и стало быть, обратное преобразование Меллина дает перемещение

$$w(r,\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{M_s\sin(s\theta)}{\mu s\cos(s\alpha)}r^{-s}ds \tag{1.4}$$

Асимптотическую оценку интеграла (1.4) при $r \gg 1$ получим, дополнив контур интегрирования в (1.4) полуокружностью бесконечно большого радиуса в полуплоскости $\mathrm{Re}s>0$ и воспользовавшись теоремой о вычетах. Главный член асимптотики имеет вид

$$w(r,\theta)=-\frac{M_\alpha\sin(\pi\theta/(2\alpha))}{(\mu\pi/(2\alpha))r^{\pi/(2\alpha)}}+o(r^{-\pi/(2\alpha)}) \tag{1.5}$$

$$M_\alpha=\int\limits_0^\infty f(r)r^{\pi/(2\alpha)}dr$$

Коэффициент M_α нельзя интерпретировать как момент сил, и следовательно, принцип Сен-Венана в его традиционном понимании в данном случае не выполняется, хотя интегральная зависимость от граничного воздействия (в смысле момента с дробным показателем) сохраняется. Сен-венановский характер решение имеет при $\alpha=\pi/2$, т.е. для упругой полуплоскости. Заметим, что решение предельной задачи об антиплоском сдвиге клина парой сил, сосредоточенной в вершине угла существует только в этом случае, при $\alpha\neq\pi/2$ такого решения построить нельзя.

2. При гармоническом воздействии на гранях клина

$$\theta=\pm\alpha,\quad \tau_{\theta z}=f(r)e^{-iwt} \tag{2.1}$$

задача сводится к уравнению Гельмгольца

$$\Delta w+k^2w=0,\quad k=\omega\sqrt{\rho/\mu} \tag{2.2}$$

антисимметричное решение которого, удовлетворяющее условиям излучения и условию на ребре клина [9], будем искать в виде интеграла Зоммерфельда

$$w(r,\theta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C[\Phi(\varsigma+\theta)-\Phi(\varsigma-0)]e^{ikr\cos\varsigma}d\varsigma \tag{2.3}$$

где контур C ограничивает полуполосу $0<\mathrm{Re}\zeta<\pi$, $Im\zeta>0$. Непосредственная проверка показывает, что интеграл (2.3) удовлетворяет уравнению Гельмгольца (2.2). Что же касается граничного условия (2.1), то, используя формулы обращения [10]

$$F(\varsigma)=ik\sin\varsigma\int\limits_0^\infty f(r)e^{-ikr\cos\varsigma}dr,\quad f(r)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C F(\varsigma)e^{ikr\cos\varsigma}d\varsigma \tag{2.4}$$

получим функциональное уравнение для функции $\Phi(\zeta)$ – уравнение Г.Д. Малюжинца

$$\Phi(\varsigma+\theta)+\Phi(\varsigma-\theta)=\sigma(\varsigma),\quad \sigma(\varsigma)=\frac{F(\varsigma)}{i\mu k\sin\varsigma}=\frac{1}{\mu}\int\limits_0^\infty f(r)e^{-ikr\cos\varsigma}dr \tag{2.5}$$

Решение уравнения (2.5) находится при помощи интегрального преобразования Фурье. После преобразований имеем

$$\Phi(\varsigma)=\frac{i}{4\alpha}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\sigma(\eta)\left[\cos\frac{\pi}{2\alpha}(\varsigma-\eta)\right]^{-1}d\eta \tag{2.6}$$

Таким образом, решение задачи (2.1), (2.2) представляется в виде

$$w(r,\theta)=\int_C \int_{-i\infty}^{i\infty} \sigma(\eta)A(\varsigma,\theta,\eta)e^{ikr\cos\varsigma}d\eta d\varsigma \tag{2.7}$$

$$8\pi\alpha A(\varsigma,\theta,\eta)=\left[\cos\frac{\pi}{2\alpha}(\varsigma+\theta-\eta)\right]^{-1}-\left[\cos\frac{\pi}{2\alpha}(\varsigma-\theta-\eta)\right]^{-1}$$

Меняя порядок интегрирования в (2.7), находим

$$w(r,\theta)=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty f(\rho)P(r,\rho,\theta)d\rho$$

$$P(r,\rho,\theta)=\int_C \int_{-i\infty}^{i\infty} A(\varsigma,\theta,\eta)e^{ik(-\rho\cos\eta+r\cos\varsigma)}d\eta d\varsigma$$

Напомним, что относительно функции $f(\rho)$ предполагалось, что она отлична от нуля в промежутке $(0,\ \delta)$, причем выполнены соотношения (1.2). Поэтому, считая величину δ малой по сравнению с длиной волны $\lambda=2\pi/k$ и сохраняя в асимптотическом разложении функции $P(r,\ \rho,\ \theta)$ старший член по ρ, получим

$$w=\frac{1}{\mu}\int_0^\delta f(\rho)\rho^{\pi/(2\alpha)}d\rho Q(r,\theta) \tag{2.8}$$

с некоторой ограниченной функцией $Q(r,\ \theta)$.

Асимптотика (2.8) решения динамической задачи не сен-венанова.[1]

В случае нестационарного воздействия

$$\theta=\pm\alpha,\quad \tau_{\theta z}=f(r)q(t)$$

можно воспользоваться представлением функции $q(t)$ в виде интеграла Фурье

$$q(t)=\mathrm{Re}\int_0^\infty Q(k)e^{-ikct}dk\left(c=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\right)$$

где c – скорость поперечных волн в упругой среде. Будем считать, что спектральная плотность воздействия $Q(k)$ заметно отлична от нуля в промежутке $(0,\ k_0)$, причем $k_0\delta \ll 2\pi$. Тогда в дальней зоне $kr \gg 1$ асимтотика решения нестационарной задачи имеет вид

$$w(r,\theta,t)=\mathrm{Re}\int_0^\infty Q(k)w(r,\theta,k)e^{-ikct}dk$$

где функция $w(r,\ \theta,\ k)$ зависит от дробного момента внешних сил M_α.

Рассмотренные задачи для уравнений Лапласа и Гельмгольца в клине допускают и другие физические интерпретации – в гидродинамике, электродинамике, теории теплопроводности и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Sternberg E., Koiter W.* The wedge under a concentrated couple: a paradox in the two-dimensional theory of elasticity // J. Appl. Mech. 1958. V. 25. N 4. P. 575–581.
2. *Mises R.* On Saint-Venant's principle // Bull. Amer. Math. Soc. 1945. V. 51. N 8. P. 555–562.
3. *Sternberg E.* On Saint-Venant's principle // Quart. Appl. Math. 1954. V. 11. N 4. P. 393–402.
4. *Джанелидзе Г.Ю.* Принцип Сен-Венана // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. 1958. № 192. С. 7–20.

---

[1] Формула (2.7) в статье [11] проанализирована ошибочно.

5. *Boley B.A.* Application of Saint-Venant's principle in dynamical problems // J. Appl. Mech. 1955. V. 22. № 2. P. 204–206.
6. *Новожилов В.В., Слепян Л.И.* О принципе Сен-Венана в динамике стержней // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 2. С. 161–281.
7. *Гомилко А.М., Городецкая Н.С., Мелешко В.В.* О динамическом принципе Сен-Венана для упругой полуполосы // Теоретическая и прикладная механика. Вып. 22. Харьков: Изд-во Харьков. ун-та, 1991. С. 40–46.
8. *Санчес-Паленсия Э.* Некоторые вопросы теории упругости в неограниченных областях и их приложения к контактным задачам // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1990. Т. 192. С. 183–196.
9. *Поручиков В.Б.* Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328 с.
10. *Малюжинец Г.Д.* Формула обращения для интеграла Зоммерфельда // Докл. АН СССР. 1958. Т. 118. № 6. С. 1099–1102.
11. *Морозов Н.Ф., Нарбут М.А.* О принципе Сен-Венана при антиплоской деформации // Докл. РАН. 1994. Т. 337. № 3. С. 328–329.

Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
28.VII.1993

УДК 539.3

 Р.В. Намм

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ГЛАДКОГО РЕШЕНИЯ В СТАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ТРЕНИЕМ ПО ЗАКОНУ КУЛОНА И ДВУСТОРОННИМ КОНТАКТОМ

Устанавливается единственность гладкого решения в задаче с трением ([1], с. 134) в случае, когда множество виртуальных жестких перемещений не является тривиальным.

1. Эквивалентность краевой и вариационной постановок задачи с трением. Пусть $\Omega \subset R^2$ – ограниченная область с достаточно регулярной границей Г. Для вектора перемещений $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ определим тензор деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad i,j = 1,2$$

Тензор напряжений σ представляет собой линейную комбинацию компонент тензора деформаций

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\mathbf{u}) = C_{ijpl}\varepsilon_{pl}(\mathbf{u}), \quad p,l = 1,2$$

(по дважды повторяющимся числовым индексам подразумевается суммирование). Компоненты тензора модулей упругости C_{ijpl} обладают обычными свойствами симметрии

$$C_{ijpl} = C_{jilp} = C_{plij}, \quad i,j,p,l = 1,2$$

и предполагается существование такой положительной постоянной C_0, что

$$C_{ijpl}\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}(x))\varepsilon_{pl}(\mathbf{u}(x)) \geq C_0\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}(x))\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}(x))$$

$$\forall\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}(x)), \quad \forall x \in \Omega, \quad i,j,p,l = 1,2$$

Рассмотрим постановку задачи с трением.