УДК 539.375

© 1995 г. А.М. Хлуднев

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ С ТРЕЩИНОЙ

Рассматривается контактная задача для пологой оболочки, содержащей вертикальную трещину. Решение задачи удовлетворяет двум ограничениям типа неравенств, описывающим условие взаимного непроникания оболочки и штампа и условие непроникания берегов трещины. Цель работы – исследование задачи управления внешними нагрузками с целевым функционалом, характеризующим раскрытие трещины. Изучается регулярность решения вблизи точек трещины. В частности, для трещин нулевого раскрытия доказывается принадлежность решения классу C^∞. Анализируется сходимость решений задач оптимального управления при возмущении параметров.

1. Постановка задачи. Рассмотрим пологую оболочку, срединная поверхность которой занимает область $\Omega_\psi = \Omega \backslash \Gamma_\psi$, где $\Omega \subset R^2$ – ограниченная область с гладкой границей Γ, а Γ_ψ – график функции $y = \psi(x)$, $x \in [0, 1]$, $(x, y) \in \Omega$. Пусть $\chi = (W, w)$ – вектор перемещений точек срединной поверхности оболочки, $W = (w^1, w^2)$. Введем обозначения для компонент тензоров деформаций и усилий

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij}(W) + k_{ij}w$$

$$\sigma_{11} = e_{11} + ke_{22}, \quad \sigma_{22} = e_{22} + ke_{11}, \quad \sigma_{12} = (1-k)e_{12}$$

$$\varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^i}{\partial x_j} + \frac{\partial w^j}{\partial x_i}\right), \quad x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv y$$

$$k = \text{const}, \quad 0 < k < {}^1/_2$$

Считаем, что кривизны оболочки удовлетворяют включениям $k_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}_\psi)$. Здесь и всюду далее $i, j = 1, 2$.

Функционал энергии оболочки можно записать в виде

$$\Pi_u(\chi) = {}^1\!/_2 B(w, w) + {}^1\!/_2 \langle \sigma_{ij}(W), \ e_{ij}(W) \rangle - \langle u, \chi \rangle$$

где $u = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор внешних нагрузок, скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означают интегрирование по Ω_ψ, а билинейная форма, характеризующая изгибные свойства оболочки, имеет вид

$$B(w, \upsilon) = \int\limits_{\Omega_\psi} (w_{xx}\upsilon_{xx} + w_{yy}\upsilon_{yy} + kw_{xx}\upsilon_{yy} + kw_{yy}\upsilon_{xx} + 2(1-k)w_{xy}\upsilon_{xy}) d\Omega_\psi$$

Для простоты на внешней границе будем задавать следующие краевые условия:

$$w = \partial w / \partial n = W = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma$$

Таким образом, рассматриваемая модель оболочки характеризуется тем, что срединная поверхность отождествляется с плоской областью, и в то же время кривизны оболочки, вообще говоря, не равны нулю. Горизонтальные перемещения в рассматриваемой модели линейно зависят от расстояния z до срединной поверхности (см. [1])

$$W(z) = W - z\nabla w, \quad |z| \leqslant \delta$$

где $z = 0$ соответствует срединной поверхности. Пусть $\psi \in H_0^3(0,1)$, а ν – нормаль к кривой $y = \psi(x)$, $x \in (0, 1)$. Тогда условие взаимного непроникания берегов трещины можно записать следующим образом:

$$[W - z\nabla w]\nu \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_\psi, \quad |z| \leqslant \delta, \quad \nu = (-\psi_x, 1)/\sqrt{1+\psi_x^2}$$

где $[V] = V^+ - V^-$ – скачок функции V, а $V^\pm$ соответствуют положительному и отрицательному направлениям ν. Будем записывать это условие в эквивалентном виде

$$[W]\nu \geqslant \delta|[\partial w/\partial\nu]| \quad \text{на} \quad \Gamma_\psi \tag{1.1}$$

Предположим, что поверхность $z = \Phi(x, y)$ описывает форму штампа, $(x, y) \in \Omega$, $\Phi \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\Omega)$. В этом случае условие взаимного непроникания оболочки и штампа в линейном приближении имеет вид [2, 3]

$$w - W\nabla\Phi \geqslant \Phi \quad \text{в} \quad \Omega_\psi \tag{1.2}$$

Пусть далее подпространство $H^{1,0}(\Omega_\psi)$ пространства Соболева $H^1(\Omega_\psi)$ состоит из элементов, обращающихся в нуль на Γ. Аналогично элементы из $H^{2,0}(\Omega_\psi)$ обращаются в нуль вместе с первыми производными на Γ, $H^{2,0}(\Omega_\psi) \subset H^2(\Omega_\psi)$. Обозначим через $H(\Omega_\psi)$ пространство $H^{1,0}(\Omega_\psi) \times H^{1,0}(\Omega_\psi) \times H^{2,0}(\Omega_\psi)$ и введем множество допустимых перемещений оболочки

$$K_\delta = \{(W, w) \in H(\Omega_\psi) | \quad (W, w) \text{ удовлетворяют } (1.1), (1.2)\}$$

При этом неравенства (1.1), (1.2) считаются выполненными почти всюду в смысле мер Лебега на Γ_ψ и в Ω_ψ. Предполагаем, что $\Phi < 0$ на Γ, так что множество K_δ непусто. Задачу о равновесии пологой оболочки, решение которой удовлетворяет условиям непроникания (1.1), (1.2), можно сформулировать как вариационную:

$$\inf_{\chi \in K_\delta} \Pi_u(\chi) \tag{1.3}$$

В силу выпуклости и дифференцируемости фунционала Π_u на $H(\Omega_\psi)$ задача (1.3) эквивалентна вариационному неравенству

$$\Pi_u'(\chi)(\overline{\chi} - \chi) \geqslant 0, \quad \chi \in K_\delta, \quad \forall\overline{\chi} \in K_\delta$$

где $\Pi_u'(\chi)$ – производная функционала Π_u в точке χ. Это неравенство имеет вид

$$B(w, \overline{w} - w) + \langle k_{ij}\sigma_{ij}, \overline{w} - w\rangle + \langle\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}(\overline{W} - W)\rangle - \langle u, \overline{\chi} - \chi\rangle \geqslant 0 \tag{1.4}$$

$$\chi \in K_\delta, \quad \forall\overline{\chi} = (\overline{W}, \overline{w}) \in K_\delta$$

Можно доказать коэрцитивность функционала Π_u на $H(\Omega_\psi)$. Учитывая слабую полунепрерывность снизу этого функционала, убеждаемся, что решение задачи равновесия (1.4) существует. Оно будет единственным.

Будем исследовать задачу управления внешними нагрузками с целевым функционалом, характеризующим раскрытие трещины [4]

$$J_\delta(u) = \int_{\Gamma_\psi} |[\chi]| d\Gamma_\psi$$

где $\chi = \chi(u)$ – решение вариационного неравенства (1.4).

Пусть $U \subset [L^2(\Omega)]^3$ – выпуклое, замкнутое и ограниченное множество. Задача отыскания трещины наименьшего раскрытия формулируется следующим образом:

$$\inf_{u \in U} J_\delta(u) \tag{1.5}$$

Здесь и ниже подчеркивается зависимость целевого функционала от δ, так как в дальнейшем будет исследоваться сходимость решений задач (1.5) при $\delta \to 0$.

Пусть пока δ фиксировано. Докажем, что существует решение задачи оптимального управления (1.5), (1.4). Выберем минимизирующую последовательность $u_m \in U$. Она, очевидно, ограничена в $L^2(\Omega)$, поэтому можно предполагать, что

$$u_m \to u \quad \text{слабо в} \quad L^2(\Omega), \quad u \in U \tag{1.6}$$

Для каждого m можно найти единственное решение $\chi_m \in K_\delta$ задачи

$$\Pi'_{u_m}(\chi_m)(\overline{\chi} - \chi_m) \geqslant 0 \quad \forall \overline{\chi} \in K_\delta \tag{1.7}$$

Фиксируя здесь пробную функцию $\overline{\chi}$, выводим равномерную по m оценку

$$\|\chi_m\|_{H(\Omega_\psi)} \leqslant c$$

Выбирая при необходимости последовательность, предполагаем что при $m \to \infty$

$$\chi_m \to \chi \quad \text{слабо в } H(\Omega_\psi), \quad \text{сильно в } L^2(\Omega_\psi) \tag{1.8}$$

Сходимость (1.6), (1.8) позволяет осуществить предельный переход в (1.7) и таким образом показать что $\chi = \chi(u)$. Более того, дополнительно предполагая, что $\chi_m^\pm \to \chi^\pm$ слабо в $L^1(\Gamma_\psi)$, получаем

$$\inf_{\overline{u} \in U} J_\delta(\overline{u}) = \lim_{m \to \infty} \inf J_\delta(u_m) \geqslant J_\delta(u) \geqslant \inf_{\overline{u} \in U} J_\delta(\overline{u})$$

Это и означает, что u – решение задачи (1.5), (1.4). Утверждение доказано.

2. Гладкость решения. Заметим, что если раскрытие трещины является нулевым на Γ_ψ, т.е. $[\chi] = 0$, то значение целевого фунционала $J_\delta(u)$ равно нулю. Предположим также, что вблизи Γ_ψ штамп не взаимодействует с оболочкой. Оказывается, в этом случае решение $\chi = (W, w)$ задачи (1.4) будет бесконечно дифференцируемым в окрестности точек трещины. Указанное свойство является локальным, так что нулевое раскрытие трещины вблизи фиксированной точки гарантирует бесконечную дифференцируемость решения в некоторой окрестности этой точки. Безусловно, при этом необходимо требовать соответствующей регулярности кривизн k_{ij} и внешних сил u. Цель последующих рассуждений – обоснование этого факта. Внешняя нагрузка u при этом считается фиксированной.

Пусть $O \subset R^2$ – ограниченная область с гладкой границей γ, имеющей внешнюю нормаль $n = (n_1, n_2)$. Введем обозначения для изгибающего момента и перерезывающей силы на γ

$$m(w) = k\Delta w + (1-k)\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}, \quad t(w) = \frac{\partial}{\partial n}\Delta w + (1-k)\frac{\partial^3 w}{\partial n \partial^2 s}, \quad s = (-n_2, n_1)$$

Величинам $m(w)$ и $t(w)$ можно придать смысл элементов из пространств $H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$ и $H^{-\frac{3}{2}}(\gamma)$ соответственно, если $w \in H^2(O)$, $\Delta^2 w \in L^2(O)$. Более того, справедлива обобщенная формула Грина [5]

$$B_o(w, \upsilon) = \left\langle m(w), \frac{\partial \upsilon}{\partial n} \right\rangle_{\frac{1}{2},\gamma} - \langle t(w), \upsilon \rangle_{\frac{3}{2},\gamma} + \langle \Delta^2 w, \upsilon \rangle_o, \quad \forall \upsilon \in H^2(O) \tag{2.1}$$

Символ O означает, что интегрирование производится по O, а скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle_{p,\gamma}$ обозначают двойственность между $H^{-p}(\gamma)$ и $H^{p}(\gamma)$. Все условия, налагаемые на операторы $m(w)$, $t(w)$ и необходимые для справедливости формулы (2.1), проверены в [6]. Понадобится еще одна формула Грина. Именно, пусть $\theta \equiv (\upsilon_1, \upsilon_2) \in L^2(O)$, $\operatorname{div}\theta \in L^2(O)$.

Тогда величина θn определена на границе как элемент $H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$ и имеет место формула [7]

$$\langle \operatorname{div}\theta, w\rangle_o = \langle \theta n, w\rangle_{\frac{1}{2},\gamma} - \langle \theta, \nabla w\rangle_o, \quad \forall w \in H^1(O) \tag{2.2}$$

Будем исследовать регулярность решения в окрестности вершины трещины $x^0 \equiv (1, 0)$. Пусть по-прежнему (W, w) – решение задачи равновесия (1.4). Предположим, что существует окрестность W графика Γ_ψ, такая, что для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(W)$ найдется $\varepsilon > 0$, при котором

$$\varepsilon\varphi + w - W\nabla\Phi \geqslant \Phi \quad \text{почти всюду в } W\backslash\Gamma_\psi \tag{2.3}$$

Сформулированное условие (2.3) интерпретируется как отсутствие контакта между оболочкой и штампом в $W\backslash\Gamma_\psi$.

Продолжим гладким образом фунцию $\psi(x)$ для $x > 1$, оставляя за продолжением прежнее обозначение. Возьмем произвольную функцию $\varphi \in C_0^\infty(R(x^0))$, где $R(x^0)$ – круг с центром в точке x^0, такой, что $R(x^0) \subset W$. Тогда

$$[\partial\varphi/\partial\nu] = 0 \quad \text{на} \quad R(x^0)\cap\Gamma_\psi$$

В силу сказанного функция $(W, \varepsilon\varphi + w)$ при малых $\varepsilon > 0$ принадлежит множеству K_δ. Вне $R(x^0)$ функция φ при этом считается равной нулю. Подставим теперь $(W, \varepsilon\varphi + w)$ в (1.4). Придем к неравенству

$$B_+(w, \varphi) + B_-(w, \varphi) + \langle k_{ij}\sigma_{ij}, \varphi\rangle \geqslant \langle u_3, \varphi\rangle \tag{2.4}$$

Индексы плюс и минус означают интегрирование по O^+ и O^- соответственно, $O^+ = R(x^0) \cap \{y > \psi(x)\}$, O^- определяется аналогично. Границы областей $O^\pm$ обозначаем $\gamma^\pm$. Заметим, что при условии (2.3) в $W\backslash\Gamma_\psi$ выполнено в смысле распределений уравнение

$$\Delta^2 w + k_{ij}\sigma_{ij} = u_3 \tag{2.5}$$

Для того чтобы убедиться в этом, достаточно подставить в (1.4) пробные функции вида $\chi + \varepsilon\theta$, где θ – бесконечно-дифференцируемые функции с носителем $W\backslash\Gamma_\psi$, ε – малая величина. Таким образом, применяя формулу Грина (2.1) к $B_\pm(w, \varphi)$ в (2.4) и пользуясь уравнением (2.5), получим

$$\left\langle m(w), \frac{\partial\varphi}{\partial n^-}\right\rangle_{\frac{1}{2},\gamma^-} - \langle t(w), \varphi\rangle_{\frac{3}{2},\gamma^-} + \left\langle m(w), \frac{\partial\varphi}{\partial n^+}\right\rangle_{\frac{1}{2},\gamma^+} - \langle t(w), \varphi\rangle_{\frac{3}{2},\gamma^+} \geqslant 0 \tag{2.6}$$

Заметим, что в силу имеющейся гладкости решения функция $\Delta^2 w + k_{ij}\sigma_{ij} - u_3$ равна нулю почти всюду в $W\backslash\Gamma_\psi$, поэтому интегралы по области обратились в нуль.

Далее через ν будем обозначать также нормаль к продолженному графику $\tilde{\Gamma}_\psi$ функции $\psi(x)$. Учитывая произвольность и финитность φ в $R(x^0)$, из (2.6) находим

$$\langle [m(w)], \partial\varphi/\partial n\rangle_{\frac{1}{2},\gamma} = 0, \quad \langle [t(w)], \varphi\rangle_{\frac{3}{2},\gamma} = 0, \quad \forall\varphi \in C_0^\infty(R(x^0)) \tag{2.7}$$

где в качестве γ может выступать как γ^+, так и γ^-. Доказанные тождества (2.7) означают, что

$$[m(w)] = 0, \quad [t(w)] = 0 \quad \text{на} \quad \tilde{\Gamma}_\psi \tag{2.8}$$

При выполнении условия (2.3) справедливы также следующие уравнения в смысле распределений:

$$-\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = u_i \quad \text{в} \quad W\backslash\Gamma_\psi \tag{2.9}$$

Доказательство этого факта получается одновременно с (2.5).

Пусть функция $\theta \equiv (\theta_1, \theta_2)$ принадлежит $C_0^\infty(\Omega)$ и имеет носитель в $R(x^0)$. Тогда, как и ранее, при малом $\varepsilon > 0$ будем иметь включение $(W + \varepsilon\theta, w) \in K_\delta$. Подставим $(W + \varepsilon\theta, w)$ в (1.4) в качестве пробной функции. Получим

$$\langle\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}(\theta)\rangle_+ + \langle\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}(\theta)\rangle_- \geqslant \langle u_i, \theta_i\rangle$$

При учете формулы Грина (2.2) отсюда следует

$$-\langle[\sigma_{ij}\nu_j], \theta_i\rangle_{1/2,\gamma} - \langle\partial\sigma_{ij}/\partial x_j, \theta_i\rangle_+ - \langle\partial\sigma_{ij}/\partial x_j, \theta_i\rangle_- \geqslant \langle u_i, \theta_i\rangle$$

где в качестве γ можно брать как γ^+, так и γ^-. Если принять во внимание уравнения (2.9), то полученное соотношение дает

$$\langle[\sigma_{ij}\nu_j], \theta_i\rangle_{1/2,\gamma} = 0; \qquad \forall\theta \in C_0^\infty(R(x^0))$$

т.е.

$$[\sigma_{ij}\nu_j] = 0 \quad \text{на} \quad \tilde{\Gamma}_\psi \tag{2.10}$$

Установленные свойства (2.8), (2.10) дают возможность исследовать регулярность решения в окрестности вершины трещины x^0 в случае, если вблизи x^0 нет контакта между оболочкой и штампом и раскрытие трещины является нулевым.

Теорема 1. Пусть $k_{ij}, u \in C^\infty(R(x^0))$, выполнено условие (2.3) и $[\chi] = 0$ на $R(x^0) \cap \Gamma_\psi$. Тогда $\chi \in C^\infty(R(x^0))$.

Доказательство. Покажем, что уравнение (2.5) выполнено в смысле распределений в $R(x^0)$. Условие теоремы и неравенство (1.1) обеспечивают справедливость соотношения $[\partial w/\partial\nu] = 0$ на $R(x^0) \cap \Gamma_\psi$. Принимая во внимание включения $w \in H^2(O^\pm)$ и равенство $[w] = 0$ на $R(x^0) \cap \Gamma_\psi$, заключаем, что $w \in H^2(R(x^0))$.

Заметим, что уравнение (2.5) выполнено в $O^\pm$, поэтому $\Delta^2 w \in L^2(O^\pm)$.

Пусть скобки $(\cdot, \varphi)$ означают действие распределения на элемент φ. Выберем $\varphi \in C_0^\infty(R(x^0))$. При учете формулы (2.1) имеем

$$(\Delta^2 w, \varphi) = B_+(w, \varphi) + B_-(w, \varphi) = -\langle[m(w)], \partial\varphi/\partial\nu\rangle_{1/2,\gamma} + \langle[t(w)], \varphi\rangle_{3/2,\gamma} +$$

$$+(\Delta^2 w, \varphi)_+ + (\Delta^2 w, \varphi)_-$$

Скачки $[m(w)]$, $[t(w)]$ равны нулю, поэтому отсюда следуют необходимые равенства, которые и доказывают утверждение:

$$(\Delta^2 w + k_{ij}\sigma_{ij} - u_3, \varphi) = \langle\Delta^2 w + k_{ij}\sigma_{ij} - u_3, \varphi\rangle_+ + \langle\Delta^2 w + k_{ij}\sigma_{ij} - u_3, \varphi\rangle_- = 0,$$

$$\forall\varphi \in C_0^\infty(R(x^0))$$

Далее покажем, что в $R(x^0)$ выполнены уравнения (2.9). Поскольку $[W] = 0$ на $R(x^0) \cap \Gamma_\psi$ и $W \in H^1(O^\pm)$, то $W \in H^1(R(x^0))$.

Следовательно, $\sigma_{ij} \equiv \sigma_{ij}(\chi) \in L^2(R(x^0))$. Из справедливости уравнений (2.9) в $O^\pm$, заключаем, что $\partial\sigma_{ij}/\partial x_j \in L^2(O^\pm)$. Это означает, что можно применить формулу Грина (2.2) для областей $O^\pm$.

Пусть $\varphi \in C_0^\infty(R(x^0))$. Имеем

$$-(\partial\sigma_{ij}/\partial x_j + u_i, \varphi) = \langle\sigma_{ij}, \partial\varphi/\partial x_j\rangle_+ + \langle\sigma_{ij}, \partial\varphi/\partial x_j\rangle_- - (u_i, \varphi) =$$

$$= -\langle[\sigma_{ij}\nu_j], \varphi\rangle_{1/2,\gamma} - \langle\partial\sigma_{ij}/\partial x_j + u_i, \varphi\rangle_+ - \langle\partial\sigma_{ij}/\partial x_j + u_i, \varphi\rangle_- = 0 \tag{2.11}$$

Однако скачки $[\sigma_{ij}\nu_j]$ равны нулю, и в $O^{\pm}$ выполнены уравнения (2.9). Поэтому правая часть равенства (2.11) обращается в нуль, что и означает справедливость уравнений

$$-\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = u_i \quad \text{в} \quad R(x^0) \tag{2.12}$$

в смысле распределений. Уравнения (2.12) можно записать как линейные уравнения двумерной теории упругости

$$L(W) = F \quad \text{в} \quad R(x^0) \tag{2.13}$$

с правой частью $F = (f_1, f_2)$, где $f_1 = u_1 + (k_{11}w + kk_{22}w)_x + (k_{12}w)_y$, а f_2 определяется аналогично. Кроме того, уравнение (2.5) удобно представить в виде

$$\Delta^2 w = u_3 - k_{ij}\sigma_{ij} \quad \text{в} \quad R(x^0) \tag{2.14}$$

Правая часть уравнения (2.13) принадлежит $H^1(R(x^0))$, а правая часть (2.14) – $L^2(R(x^0))$. Последовательно применяя результаты о внутренней регулярности решений уравнений (2.13), (2.14) [5, 9], получаем необходимое включение

$$\chi = (W, w) \in C^\infty(R(x^0)) \tag{2.15}$$

Теорема доказана.

Сделаем ряд замечаний. Для справедливости включения (2.15) достаточно требовать выполнения (2.3) лишь в $R(x^0)\backslash\Gamma_\psi$ для $\varphi \in C_0^\infty(R(x^0))$.

Согласно теоремам вложения функция w непрерывна в $\overline{\Omega}_\psi$. Поэтому, если $\nabla\Phi \equiv 0$ в некоторой окрестности W графика Γ_ψ и $w > \Phi$ в W (и, в частности, $w^{\pm} > \Phi$ на Γ_ψ), то условие (2.3), очевидно, выполнено.

Если x^0 – внутренняя точка трещины, т.е. $x^0 \in \Gamma_\psi\backslash\partial\Gamma_\psi$, выполнено условие (2.3) и $[\chi] = 0$ вблизи x^0, то соответствующее утверждение о бесконечной дифференцируемости χ доказывается проще.

Отметим, что исследовались [10–12] асимптотические свойства решений уравнений теории упругости и бигармонического уравнения вблизи вершины трещины. Изучались задачи выбора так называемых экстремальных форм трещин [13, 14].

3. Сходимость решений при $\delta \to 0$. Рассмотрим предельный случай, соответствующий $\delta = 0$ в (1.1). Получаемое таким образом ограничение описывает условие взаимного непроникания берегов трещины без учета толщины оболочки. Заметим, что при полном учете толщины надо иметь в виду, что от δ зависят как усилия σ_{ij}, так и моменты $m(w)$ и перерезывающие силы $t(w)$ [1]. Случай $\delta = 0$ соответствует полностью вырожденной задаче. Таким образом, $\delta = 0$ в (1.1) фактически означает, что толщина оболочки считается фиксированной, а условия непроникания берегов трещины описываются приближенно.

Итак, в рассматриваемом случае решение удовлетворяет следующим ограничениям:

$$[W]\nu \geqslant 0 \ \text{на} \ \Gamma_\psi; \quad w - W\nabla\Phi \geqslant \Phi \ \text{в} \ \Omega_\psi \tag{3.1}$$

Множество допустимых перемещений в данном случае имеет вид

$$K_0 = \{(W, w) \in H(\Omega_\psi) \mid (W, w) \text{ удовлетворяют условиям (3.1)}\}$$

При этом решение задачи минимизации функционала Π_u на множестве K_0 эквивалентно решению следующего вариационного неравенства:

$$\Pi_u'(\chi)(\overline{\chi} - \chi) \geqslant 0, \quad \chi \in K_0, \quad \forall\overline{\chi} \in K_0 \tag{3.2}$$

Пусть множество U выбирается так же, как и ранее. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\inf_{u\in U} J_0(u), \quad J_0(u)=\int_{\Gamma_\psi} \|\chi\| d\Gamma_\psi \tag{3.3}$$

причем χ определяется из (3.2) при данном u. Решение задачи (3.3), (3.2) существует (останавливаться на доказательстве этого факта здесь не будем).

Введем обозначения

$$j_\delta = \inf_{u\in U} J_\delta(u), \quad j_0 = \inf_{u\in U} J_0(u) \tag{3.4}$$

Связь между решениями задач (3.3), (3.2) и (1.5), (1.4) характеризуется следующей ниже теоремой. Пусть u_δ – решение задачи (1.5), (1.4), а χ_δ соответствует u_δ и определяется из (1.4).

Теорема 2. Пусть $\nabla\Phi \equiv 0$ в некоторой окрестности W графика Γ_ψ. Тогда из последовательности u_δ, χ_δ можно выбрать подпоследовательность, такую, что при $\delta \to 0$

$$u_\delta \to u_0 \text{ слабо в } L^2(\Omega); \quad \chi_\delta \to \chi_0 \text{ слабо в } H(\Omega_\psi); \quad j_\delta \to j_0$$

где u_0 – решение задачи (3.3), (3.2), а χ_0 соответствует u_0 и определяется из (3.2).

Доказательство. Пусть $\chi_\delta(u)$ – решение вариационного неравенства (1.4) при данном фиксированном $u \in U$. Возьмем произвольный элемент $\bar\chi \in K_{\delta_0}$. Тогда $\bar\chi \in K_\delta$ при всех $\delta \leq \delta_0$. Подставим $\bar\chi$ в (1.4) в качестве пробного элемента. Придем к оценке

$$\|\chi_\delta(u)\|_{H(\Omega_\psi)} \leq c$$

являющейся равномерной по $\delta \leq \delta_0$. Следовательно, можно предполагать что при $\delta \to 0$

$$\chi_\delta(u) \to \tilde\chi \text{ слабо в } H(\Omega_\psi) \tag{3.5}$$

$$[\chi_\delta(u)] \to [\tilde\chi] \text{ слабо в } L^1(\Gamma_\psi) \tag{3.6}$$

$$\delta\, |[\partial w_\delta(u)/\partial\nu]| \to 0 \text{ сильно в } L^2(\Gamma_\psi) \tag{3.7}$$

Выберем произвольный элемент $\bar\chi \in K_0$ и построим согласно лемме (см. ниже) последовательность $\bar\chi_\delta \in K_\delta$, сильно сходящуюся в $H(\Omega_\psi)$ к $\bar\chi$. Подставляя $\bar\chi_\delta$ в качестве пробных функций в неравенства (1.4), на основе (3.5) осуществим переход к пределу при $\delta \to 0$. Условие (3.7) будет гарантировать включение $\tilde\chi \in K_0$. Предельное вариационное неравенство имеет вид

$$\Pi'_u(\tilde\chi)(\bar\chi - \tilde\chi) \geq 0, \quad \tilde\chi \in K_0, \quad \forall\bar\chi \in K_0$$

что означает $\tilde\chi = \chi(u)$. Из (3.6) при этом получаем

$$J_\delta(u) \to J_0(u), \quad \delta \to 0 \tag{3.8}$$

Пусть теперь u – решение задачи оптимального управления (3.3), (3.2). В силу (3.8) имеем

$$j_\delta \leq J_\delta(u) \to J_0(u) = j_0$$

Поэтому

$$\limsup j_\delta \leq j_0 \tag{3.9}$$

С другой стороны, принимая во внимание ограниченность множества U, можно считать

$$\|u_\delta\|_{L^2(\Omega)} \leq c \tag{3.10}$$

равномерно по δ. Тогда из вариационных неравенств

$$\Pi'_{u_\delta}(\chi_\delta)(\overline{\chi} - \chi_\delta) \geq 0, \quad \chi_\delta \in K_\delta, \quad \forall \overline{\chi} \in K_\delta \tag{3.11}$$

выводим равномерную по δ оценку

$$\|\chi_\delta\|_{H(\Omega_\psi)} \leq c \tag{3.12}$$

Согласно (3.10), (3.12) можно полагать, не уменьшая общности, что

$u_\delta \to u_0$ слабо в $L^2(\Omega)$

$\chi_\delta \to \chi_0$ слабо в $H(\Omega_\psi)$, сильно в $L^2(\Omega_\psi)$

$\delta\,|[\partial w_\delta/\partial \nu]\,| \to 0$ сильно в $L^2(\Gamma_\psi)$

Эта сходимость и лемма, доказанная ниже, дают возможность осуществить переход к пределу в неравенстве (3.11) и таким образом получить

$$\Pi'_{u_0}(\chi_0)(\overline{\chi} - \chi_0) \geq 0, \quad \chi_0 \in K_0, \quad \forall \overline{\chi} \in K_0$$

так что $\chi_0 = \chi(u_0)$. Как и при доказательстве соотношения (3.8), можно установить, что $J_\delta(u_\delta) \to J_0(u_0)$, и поэтому

$$\lim\inf j_\delta \geq J_0(u_0) \tag{3.13}$$

Сравнивая (3.9) и (3.13), заключаем что u_0 – решение задачи оптимального управления (3.3), (3.2) и $j_\delta \to j_0$. Теорема доказана.

Остается обосновать утверждение, использованное при доказательстве теоремы 2.

Лемма. Пусть $\nabla\Phi \equiv 0$ в некоторой окрестности W графика Γ_ψ. Тогда для любого фиксированного элемента $\overline{\chi} \equiv (\overline{W}, \overline{w}) \in K_0$ можно построить последовательность $\overline{\chi}_\delta \equiv (\overline{W}_\delta, \overline{w}_\delta) \in K_\delta$, такую, что

$$(\overline{W}_\delta, \overline{w}_\delta) \to (\overline{W}, \overline{w}) \quad \text{сильно в } H(\Omega_\psi) \tag{3.14}$$

Доказательство. Построим функцию $\tilde{W}$ из пространства $[H^{1,0}(\Omega_\psi)]^2$ равную нулю вне W и обладающую свойством

$$[\tilde{W}]\nu = |[\partial \overline{w} / \partial \nu]| \quad \text{на } \Gamma_\psi$$

Если такая функция построена, то последовательность $(\overline{W}_\delta, \overline{w}_\delta) \equiv (\overline{W} + \delta\tilde{W}, \overline{w})$ будет искомой. Действительно, сходимость (3.14) очевидна, и кроме того,

$$\overline{w}_\delta - \overline{W}_\delta \nabla\Phi \geq \Phi \text{ в } \Omega_\psi; \quad [\overline{W}_\delta]\nu \geq \delta|[\partial \overline{w}_\delta / \partial \nu]| \quad \text{на } \Gamma_\psi$$

Итак, выберем односвязную область $O, \overline{O} \subset \Omega$, с гладкой границей γ, так чтобы Γ_ψ была частью γ, а внешняя нормаль $n = (n_1, n_2)$ к γ совпадала с ν на Γ_ψ. Обозначим $g = -|[\partial \overline{w} / \partial n]|$. Тогда $g \in H^{\frac{1}{2}}(\gamma)$, причем $g \equiv 0$ вне Γ_ψ. Так как компоненты нормали n принадлежат $C^1(\gamma)$, то $gn \in [H^{\frac{1}{2}}(\gamma)]^2$. Следовательно, существует функция $W^0 \in [H^1(O)]^2$, такая что [5] $W^0 = gn$ на γ.

Положим $W^0 \equiv 0$ вне O. Пусть φ – бесконечно-дифференцируемая функция в Ω, такая, что $\varphi = 1$ на Γ_ψ, $\varphi \equiv 0$ вне W. Искомую функцию $\tilde{W}$ можно определить следующим образом: $\tilde{W} = \varphi W^0$.

Лемма доказана.

В заключение отметим, что условия теоремы 1, вообще говоря, не обеспечивают справедливость включения (2.15) для решения $\chi = (W, w)$ задачи (3.2). Это связано с тем, что в случае задачи (3.2) скачок $[\partial w/\partial \nu]$, вообще говоря, не равен нулю на $\Gamma_\psi \cap R(x^0)$, и поэтому при $[\chi] = 0$ нельзя утверждать, что $w \in H^2(R(x^0))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
2. *Хлуднев А.М.* Вариационный подход к проблеме контакта пологой оболочки с жестким телом // Дифференциальные уравнения с частными производными (труды семинара С.Л. Соболева). Новосибирск. СО АН СССР, 1981. № 2. С. 109–114.
3. *Львов Г.И.* Вариационная постановка контактной задачи для линейно-упругих и физически нелинейных пологих оболочек // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 5. С. 841–846.
4. *Гольдштейн Р.В., Ентов В.М.* Качественные методы в механике сплошных сред. М.: Наука, 1989. 224 с.
5. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
6. *John O., Naumann J.* On regularity of variational solutions of the von Kàrman equations // Math. Nachr. 1976. V. 71. P. 23–36.
7. *Темам Р.* Уравнения Навье–Стокса: Теория и численный анализ. М.: Мир, 1981. 408 с.
8. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 391 с.
9. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. 159 с.
10. *Кондратьев В.А., Копачек И., Олейник О.А.* О поведении обобщенных решений эллиптических уравнений второго порядка и системы теории упругости в окрестности граничной точки // Труды семинара им. И.Г. Петровского. М.: Изд-во МГУ, 1982. Т. 8. С. 135–152.
11. *Олейник О.А., Кондратьев В.А., Копачек И.* Об асимптотических свойствах решений бигармонического уравнения // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17. № 10. С. 1886–1899.
12. *Морозов Н.Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 255 с.
13. *Хлуднев А.М.* Экстремальные формы разрезов в пластине, контактирующей с жестким штампом // Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск. Наука, 1989. С. 60–67.
14. *Хлуднев А.М.* Об экстремальных формах разрезов в пластине // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 1. С. 170–176.

Новосибирск

Поступила в редакцию
10.V.1994