

УДК 539.374

© 1995 г. Ю.А. Антипов

### ТРЕЩИНА НА ЛИНИИ РАЗДЕЛА УПРУГИХ СРЕД ПРИ НАЛИЧИИ СУХОГО ТРЕНИЯ

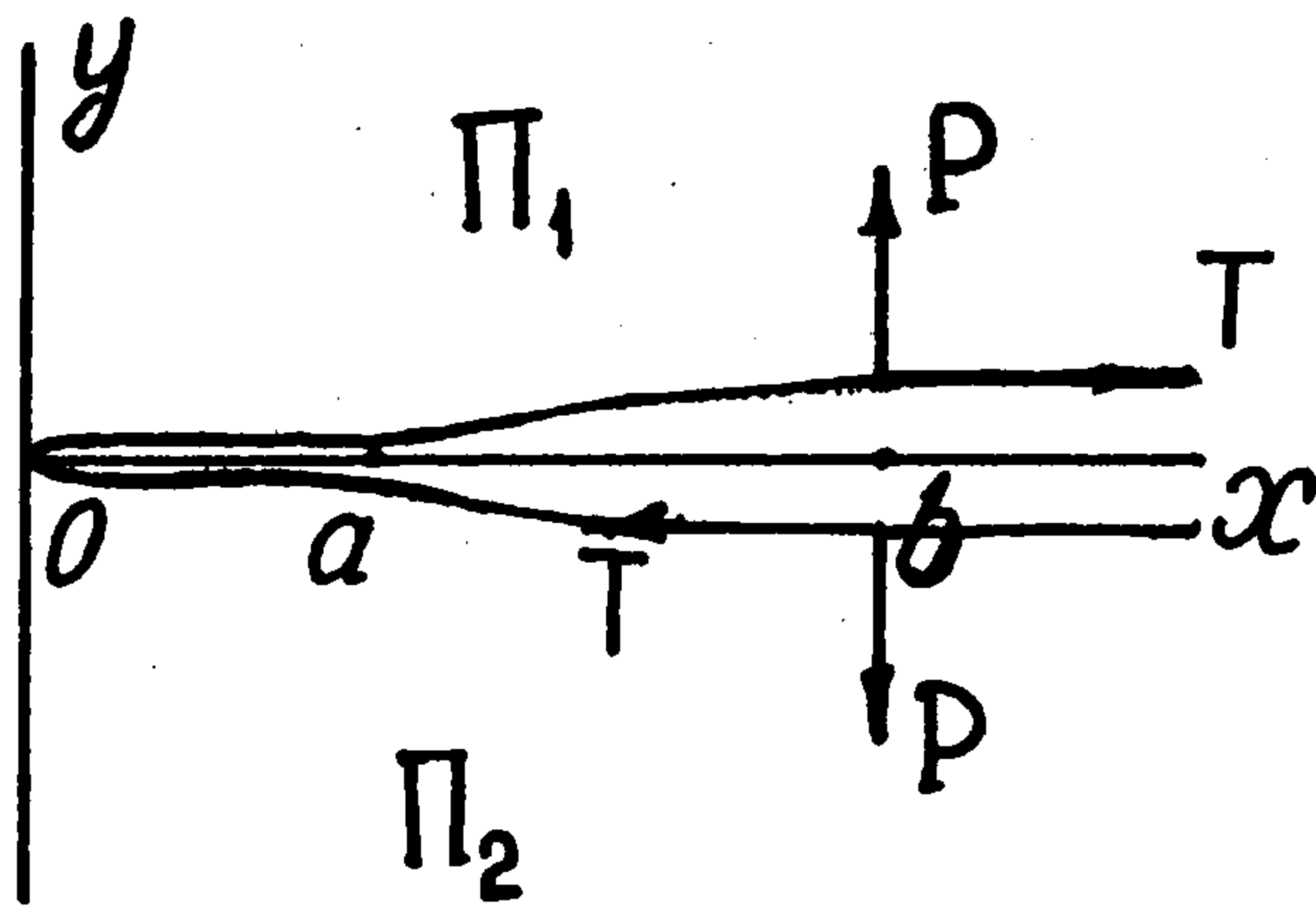
Предлагается аналитическое решение плоской задачи о трещине (конечной или полубесконечной) на линии раздела двух упругих полуплоскостей. Под воздействием растягивающей и сдвигающей нагрузки происходит раскрытие трещины на некотором (неизвестном заранее) участке; в окрестности концов трещины происходит плавное смыкание берегов, и выполняется закон сухого (кулоновского) трения. Вне трещины среды полностью сцеплены. Для случая полубесконечной трещины находится точное замкнутое решение. Определяются направление проскальзывания, длина зоны проскальзывания, формулы для контактных напряжений и скачков смещений. Задача о конечной трещине приводится к векторной (третьего порядка) задаче Римана теории аналитических функций, для которой строится эффективное решение методом [1]. При помощи асимптотического анализа находится явная связь длин меньшей и большей длин зон проскальзывания. Приводится численный анализ. Определяются ситуации, когда учет коэффициента трения практически не меняет длину зоны проскальзывания (до 5%) и когда влияет существенно (20% и более). Для уравнения Комниноу [2], соответствующего задаче о межфазной трещине без учета трения ее берегов, находится эффективное аналитическое решение.

Введение зон контактного проскальзывания без трения для устранения перехлеста берегов трещины, возникающего при прямом переходе от сцепления к расслоению [3], было предложено в [2, 4], где задача была сведена к сингулярному интегральному уравнению, решенному численно. Построено [5, 6] точное решение этого уравнения. Явное решение задачи о трещине с одним участком налегания берегов (трение не учитывалось) в однородном поле напряжений найдено в [7] (это решение использовалось там же для асимптотического решения задачи с двумя участками налегания берегов), а также в [8]. Рассматривался [9] случай неоднородного поля напряжений. Было предложено [10] учитывать сухое трение в зоне контактного проскальзывания. Задача о межфазной трещине при наличии трения приведена [11] к сингулярному интегральному уравнению, для которого применялся численный метод. В рамках иных моделей задача о полубесконечной межфазной трещине рассмотрена в [12]<sup>1</sup>.

**1. Полубесконечная межфазная трещина при наличии контактного трения.** Пусть упругая плоскость составлена из двух полуплоскостей  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  с упругими постоянными  $G_1, \nu_1$  ( $\Pi_1: y > 0$ ) и  $G_2, \nu_2$  ( $\Pi_2: y < 0$ ). На линии раздела сред имеется полубесконечная трещина ( $0 < x < \infty, y = \pm 0$ ), которая под действием сосредоточенных нормальной и касательной нагрузок (фиг. 1)

$$\sigma_y \Big|_{y=\pm 0} = -P\delta(x-b), \quad \tau_{xy} \Big|_{y=\pm 0} = -T\delta(x-b), \quad a < x < \infty \quad (1.1)$$

<sup>1</sup> См. также: Кипнис Л.А. Линия скольжения в конце трещины на границе раздела различных сред. Умань, 1989. 8 с. – Деп. в УКРНИИНТИ. 2.01.89; № 78.



Фиг. 1

приложенных к берегам трещины в заданной точке  $x = b$ , раскрывается на отрезке ( $a < x < \infty$ ): касательные  $u$  и нормальные  $v$  смещения терпят скачок, причем

$$\langle v \rangle(x) \equiv v(x, -0) - v(x, +0) \leq 0, \quad a < x < \infty \quad (1.2)$$

В точке  $a$  ( $0 < a < b$ ), априори неизвестной, происходит плавное смыкание берегов трещины

$$\langle v \rangle(x) = 0, \quad 0 < x < a; \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, \pm 0) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow a \pm 0 \quad (1.3)$$

Вследствие непрерывности нормальных смещений на отрезке скольжения напряжения  $\sigma_y(x, \pm 0)$  должны быть сжимающими [2, 13]

$$\sigma_y(x, \pm 0) \leq 0, \quad 0 < x < a$$

На участке  $0 < x < a$  касательные смещения разрывны, а касательные и нормальные напряжения связаны законом сухого трения

$$\tau_{xy} = \mu \sigma_y, \quad y = \pm 0, \quad 0 < x < a \quad (1.4)$$

где  $|\mu|$  – коэффициент трения. Знак  $\mu$  проверяется апостериори условием  $\mu = \text{sgn} \langle u \rangle(x)$  при  $0 < x < a$ . Например, для выбранных параметров задачи будет считаться правильным  $\mu < 0$ , если окажется, что всюду в области проскальзывания  $u(x, +0) > u(x, -0)$  (в этом случае вследствие (1.4)  $\tau_{xy}(x, \pm 0) > 0$  при  $0 < x < a$ ).

Введем в рассмотрение скачки

$$\chi_1(x) = \langle \partial v / \partial x \rangle, \quad \chi_2(x) = \langle \partial u / \partial x \rangle, \quad |x| < \infty \quad (1.5)$$

$$\text{supp } \chi_1 \subset [a, \infty), \quad \text{supp } \chi_2 \subset [0, \infty)$$

и выразим через них напряжения  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  при  $y = \pm 0$ :

$$\begin{aligned} \sigma_y(x, \pm 0) &= -\frac{\kappa \mu_+}{\pi} \int_a^\infty \frac{\chi_1(\xi)}{\xi - x} d\xi + \kappa \mu_- \chi_2(x) \\ \tau_{xy}(x, \pm 0) &= -\frac{\kappa \mu_+}{\pi} \int_0^\infty \frac{\chi_2(\xi)}{\xi - x} d\xi - \kappa \mu_- \chi_1(x), \quad |x| < \infty \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\kappa = \frac{2G_1}{(\sigma + \kappa_1)(1 + \sigma \kappa_2)}, \quad \mu_\pm = \pm \sigma \kappa_2^\pm + \kappa_1^\pm, \quad \kappa_j^\pm = \frac{\kappa_j \pm 1}{2}$$

$$\kappa_j = 3 - 4\nu_j, \quad j = 1, 2; \quad \sigma = G_1 G_2^{-1}$$

Подстановка соотношений (1.6) в равенства (1.1) при учете (1.4) приводит к системе двух сингулярных интегральных уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int_a^\infty \frac{\chi_1(\xi)}{\xi-x} d\xi + \gamma \chi_2(x) &= -\frac{P}{\kappa \mu_+} \delta(x-b), \quad a < x < \infty \\ -\frac{\mu}{\pi} \int_a^\infty \frac{\chi_1(\xi)}{\xi-x} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\chi_2(\xi)}{\xi-x} d\xi + \gamma \chi_1(x) + \mu \gamma \chi_2(x) &= \\ &= (\kappa \mu_+)^{-1} (T - \mu P) \delta(x-b), \quad 0 < x < \infty; \quad \gamma = \mu_- \mu_+^{-1} \end{aligned} \quad (1.7)$$

При помощи теоремы о свертке Меллина эту систему сведем к системе функциональных уравнений, которая эквивалентна задаче Римана для пары функций

$$\Phi^-(s) = -\frac{\text{ctg}^2 \pi s + \gamma^2}{\mu \gamma + \text{ctg} \pi s} \Phi^+(s) + \frac{P_0 \text{ctg} \pi s + T_0 \gamma}{\mu \gamma + \text{ctg} \pi s} \lambda^{s+1}, \quad s \in \Gamma \quad (1.8)$$

$$\Gamma: \text{Re}(s) = \gamma_0 \in (-\varepsilon, 0) \quad (0 < \varepsilon < 1), \quad \lambda = b a^{-1} > 1$$

$$\Phi^-(s) = \frac{1}{\kappa \mu_+} \int_0^1 \sigma_y(at, 0) t^s dt, \quad \Phi^+(s) = \int_1^\infty \chi(at) t^s dt \quad (1.9)$$

$$P_0 = (b \kappa \mu_+)^{-1} P, \quad T_0 = (b \kappa \mu_+)^{-1} T$$

Краевое условие (1.8) преобразуем к виду

$$\frac{\Phi^-(s)}{L^-(s)} - \Psi_{(s)}^- = L^+(s) \Phi^+(s) + \frac{(P_0 \text{ctg} \pi s + T_0 \gamma) \lambda^{s+1}}{(\mu \gamma + \text{ctg} \pi s) L^-(s)} - \Psi^-(s) \quad (1.10)$$

$$L^+(s) = \frac{\mu_0 \Gamma(-s) \Gamma(1-\alpha-s)}{\Gamma(\frac{1}{2}-s-i\delta) \Gamma(\frac{1}{2}-s+i\delta)}, \quad L^-(s) = \frac{\Gamma(1+s) \Gamma(\alpha+s)}{\Gamma(\frac{1}{2}+s+i\delta) \Gamma(\frac{1}{2}+s-i\delta)}$$

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \text{arcctg} \mu \gamma \in (0, 1), \quad \delta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$$

$$\mu_0 = \frac{\sin \pi \alpha}{\text{ch}^2 \pi \delta}, \quad \Psi^-(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{s-s_n}$$

$$s_{2n-1} = \frac{1}{2} - i\delta - n, \quad s_{2n} = \overline{s_{2n-1}}, \quad C_{2n} = \overline{C_{2n-1}} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1.11)$$

$$C_{2n-1} = (P_0 - iT_0 \gamma \text{ctg} \pi \delta) \frac{\sin \pi \alpha \Gamma(n-\alpha+\frac{1}{2}+i\delta) \Gamma(n+i\delta-\frac{1}{2})}{2\pi \Gamma(n) \Gamma(n+2i\delta) \lambda^{n+i\delta-\frac{3}{2}}} \quad (1.12)$$

Функция  $\Psi^-(s)$  аналитична в области  $D^-(\text{Re}(s) > \gamma_0)$ , а в  $D^+$  имеет полюсы в тех же точках, что и второе слагаемое правой части в равенстве (1.10). Выбор (1.12) коэффициентов  $C_n$  позволяет нейтрализовать эти полюсы (точки  $s_n$  становятся устраняемыми). Применение теоремы Лиувилля к (1.10) дает формулы для решения задачи (1.8)

$$\Phi^-(s) = L^-(s) \Psi^-(s), \quad \Phi^+(s) = \frac{1}{L^+(s)} \left[ \Psi^-(s) - \frac{(P_0 \text{ctg} \pi s + T_0 \gamma) \lambda^{s+1}}{(\text{ctg} \pi s + \mu \gamma) L^-(s)} \right] \quad (1.13)$$

Учитывая, что  $L^\pm(s) = O(s^{\mp\alpha})$ ,  $s \rightarrow \infty$ ,  $s \in D^\pm$  и сопоставляя соотношения (1.9) и (1.13), по теоремам тауберова типа находим, что функции  $\sigma_y(x, 0)$  при  $x \rightarrow a-0$  и  $\chi_1(x)$

при  $x \rightarrow a + 0$  имеют интегрируемые особенности. Чтобы обеспечить плавность смыкания берегов трещины в точке  $x = a$ , т.е. второе условие из (1.3), необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = 0 \quad (1.14)$$

(в этом случае  $\Psi^-(s) = O(s^{-2})$ ,  $s \rightarrow \infty$ ,  $|s - s_n| > \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  — сколь угодно малое положительное число;  $n = 1, 2, \dots$ ). Подстановка выражений (1.12) в условие (1.14) позволяет записать (1.14) в виде

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ \Gamma\left(\frac{3}{2} + i\delta - \alpha\right) [\Gamma(1 + i\delta)]^{-1} (4\lambda)^{-i\delta} (P - iT\gamma \operatorname{cth} \pi\delta) \times \right. \\ & \left. \times F\left(\frac{3}{2} + i\delta - \alpha, \frac{1}{2} + i\delta, 1 + 2i\delta; 1/\lambda\right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (1.15)$$

Это равенство является трансцендентным уравнением для определения  $\lambda = b/a$ . При  $\lambda \rightarrow 1 + 0$  уравнение (1.15) представимо следующим образом [14]:

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} \left\{ (P - iT\gamma \operatorname{cth} \pi\delta) \lambda^{-i\delta} \left[ \Gamma\left(\frac{3}{2} + i\delta - \alpha\right) \Gamma(\alpha - 1) \left\{ \Gamma\left(-\frac{1}{2} + i\delta + \alpha\right) \right\}^{-1} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times F\left(\frac{3}{2} + i\delta - \alpha, \frac{1}{2} + i\delta, 2 - \alpha; 1 - 1/\lambda\right) + (1 - 1/\lambda)^{\alpha-1} \Gamma(1 - \alpha) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times F\left(-\frac{1}{2} + i\delta + \alpha, \frac{1}{2} + i\delta, \alpha; 1 - 1/\lambda\right) \right] \right\} = 0 \end{aligned}$$

Заметим, что уравнение при  $G_1 \rightarrow \infty$  не совпадает с соответствующим уравнением [1] для полубесконечного штампа. Это объясняется тем, что в задаче о штампе длина зоны проскальзывания определяется из условия ограниченности решения в точке перехода от проскальзывания к сцеплению, а длина соответствующей зоны в задаче о трещине находится из требования ограниченности при переходе от проскальзывания к отрыву.

Если  $\mu = 0$  ( $\alpha = 1/2$ ), то уравнение (1.15) допускает явное решение, совпадающее с полученным ранее [15]

$$\lambda_k = \operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{2\delta} \left( k + \frac{1}{2} - \theta \right), \quad \theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left( \frac{T\gamma \operatorname{cth} \pi\delta}{P} \right), \quad k = 0, 1, \dots$$

(при  $P > 0$  и  $T \rightarrow \pm \infty$   $\theta \rightarrow \pm 1/2$ , а при  $T = 0$   $\theta = 0$ ).

При  $\mu \neq 0$  существует также счетное множество корней, причем при  $k \geq 1$  эффективна итеративная схема

$$\sigma_k^{(m)} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{-A(\sigma)}{B(\sigma)} \Big|_{\sigma=\sigma_k^{(m-1)}} + k \quad (m = 1, 2, \dots), \quad \sigma_k^{(0)} = k$$

$$\begin{aligned} A(\sigma) + iB(\sigma) &= (P - iT\gamma \operatorname{cth} \pi\delta) \Gamma\left(\frac{3}{2} + i\delta - \alpha\right) [\Gamma(1 + i\delta)]^{-1} \times \\ & \times F\left(\frac{3}{2} + i\delta - \alpha, \frac{1}{2} + i\delta; 1 + 2i\delta; 4e^{-\pi\sigma/\delta}\right) \end{aligned}$$

$$\operatorname{Im}\{A(\sigma), B(\sigma)\} = 0, \quad \lambda_k = \frac{1}{4} e^{\pi\sigma_k/\delta}$$

Ниже представлены первые несколько корней  $\lambda_k$  при  $T/P = 10$ ,  $\sigma = 0,01$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$

$\mu = 0:$	1,326	$5,846 \cdot 10^{14}$	$4,604 \cdot 10^{29}$	$3,626 \cdot 10^{44}$
$\mu = -0,5:$	1,283	$5,424 \cdot 10^{14}$	$4,272 \cdot 10^{29}$	$3,365 \cdot 10^{44}$

Для того чтобы определить, какому из корней  $\lambda_k$ , а также отрицательному или по-

ложительному  $\mu$  соответствует физическое решение, получим расчетные формулы для скачков смещений и контактных напряжений. Обозначим  $\chi_1^0(x) = \langle v \rangle(x)$ ,  $\chi_2^0(x) = \langle u \rangle(x)$ . Тогда вследствие (1.9) и (1.13) при помощи обратного преобразования Меллина находим

$$\chi_1^0(x) = -\frac{a}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\Phi^+(s)}{s} \left(\frac{x}{a}\right)^{-s} ds + C_1^0$$

$$\chi_2^0(x) = -\frac{a}{2\pi i} \left[ \Phi^-(s) + \operatorname{ctg} \pi s \Phi^+(s) - P_0 \lambda^{s+1} \right] \frac{(x/a)^{-s}}{\gamma s} ds$$

где  $C_1^0$  – постоянная, фиксируемая условием  $\chi_1^0(a) = 0$ . Используя теорему Коши, вычисляем последние два интеграла:

$$\chi_1^0(x) = \frac{a}{\pi \mu_0 \operatorname{sh} \pi \delta} \operatorname{Re} \left\{ i \cos \pi(\alpha + i\delta) \left[ \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}-i\delta} \Lambda_0\left(\frac{x}{a}\right) - \Lambda_0(1) \right] \right\} +$$

$$+ b \left[ \Pi_0(P_0, T_0; x/b) - \Pi_0(P_0, T_0; 1/\lambda) \right], \quad a < x < \infty$$

$$\chi_2^0(x) = \frac{a\gamma}{\pi \mu_0} (\mu^2 + 1) \sin^2 \pi \alpha \Delta_0 \left(\frac{x}{a}\right) \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha}, \quad 0 < x < a$$

$$\chi_2^0(x) = \frac{a \sin \pi \alpha}{\pi \mu_0} \operatorname{Re} \left[ (\mu - i\gamma \operatorname{cth} \pi \delta) \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}-i\delta} \Lambda_0\left(\frac{x}{a}\right) \right] +$$

$$+ b \Pi_0(T_0, -P_0; x/b), \quad a < x < \infty$$

$$\Lambda_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(n - \frac{1}{2} + k + i\delta) \Gamma(n - \frac{1}{2} + i\delta + \alpha)}{\Gamma(n) \Gamma(n + 2i\delta) t^n} \Psi^{-}\left(n - \frac{1}{2} + i\delta\right)$$

$$\Delta_k(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Gamma(n + \alpha - \frac{1}{2} + i\delta)|^2}{\Gamma(n) \Gamma(n + \alpha - k)} \Psi^{-}(1 - n - \alpha) t^{n-1} \quad (k = 0, 1)$$

$$\Pi_0(P, T; t) = \frac{\operatorname{ch}^2 \pi \delta}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ (P + iT\gamma \operatorname{cth} \pi \delta \operatorname{sgn} \ln t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{(\frac{1}{2}-i\delta-n)|\ln t|}}{\frac{1}{2}-i\delta-n} \right\}$$

Найдем теперь контактные напряжения. Пусть сначала  $0 < x < a$ . Тогда

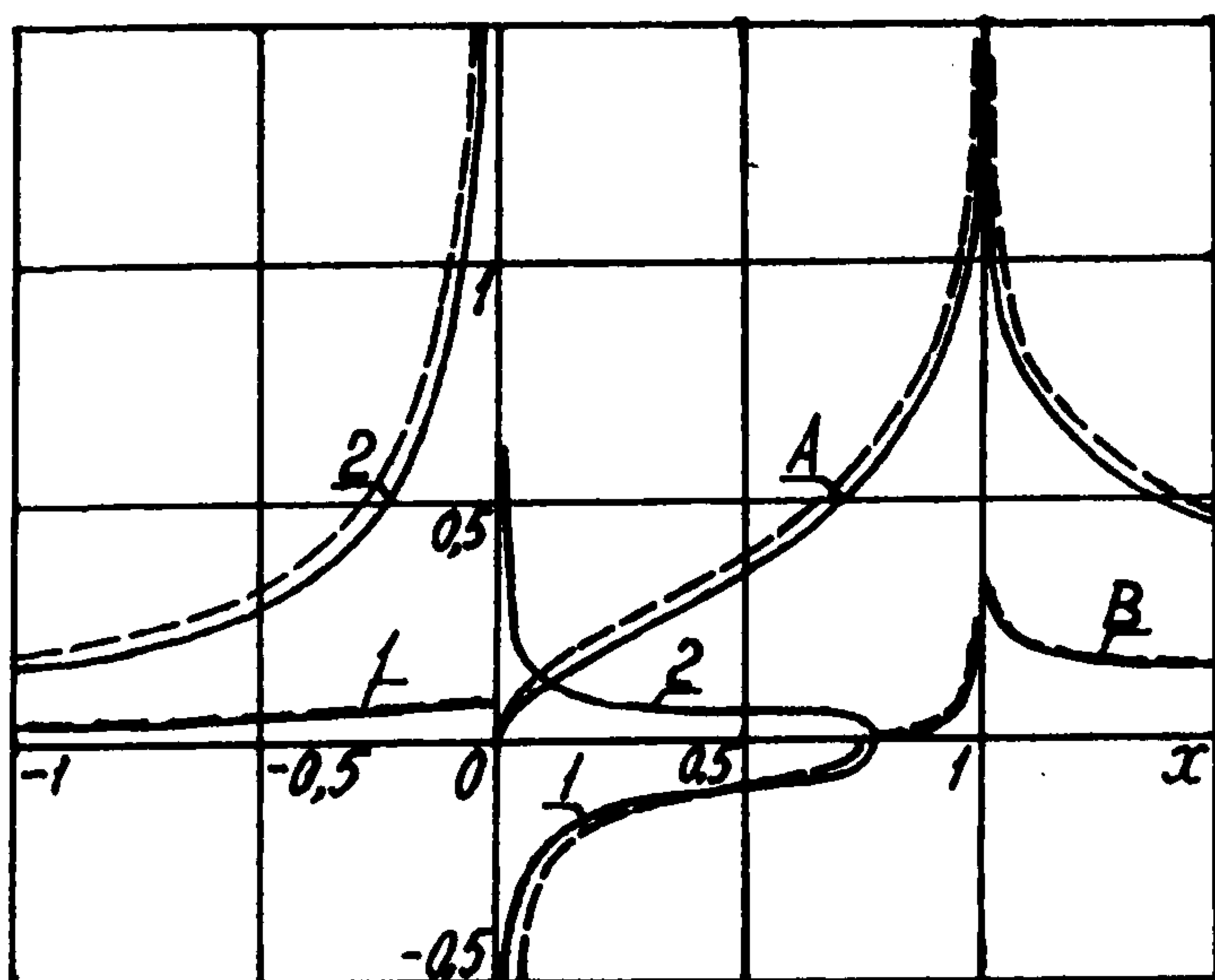
$$\sigma_y(x, 0) = \frac{\kappa \mu_+}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Phi^-(s) \left(\frac{x}{a}\right)^{-s-1} ds = \frac{\kappa \mu_+}{\pi \sin \pi \alpha} \left[ -\operatorname{ch}^2 \pi \delta \Omega\left(\frac{x}{a}\right) +$$

$$+ |\cos \pi(\alpha + i\delta)|^2 (x/a)^{\alpha-1} \Delta_1(x/a) \right], \quad \tau_{xy}(x, 0) = \mu \sigma_y(x, 0) \quad (1.16)$$

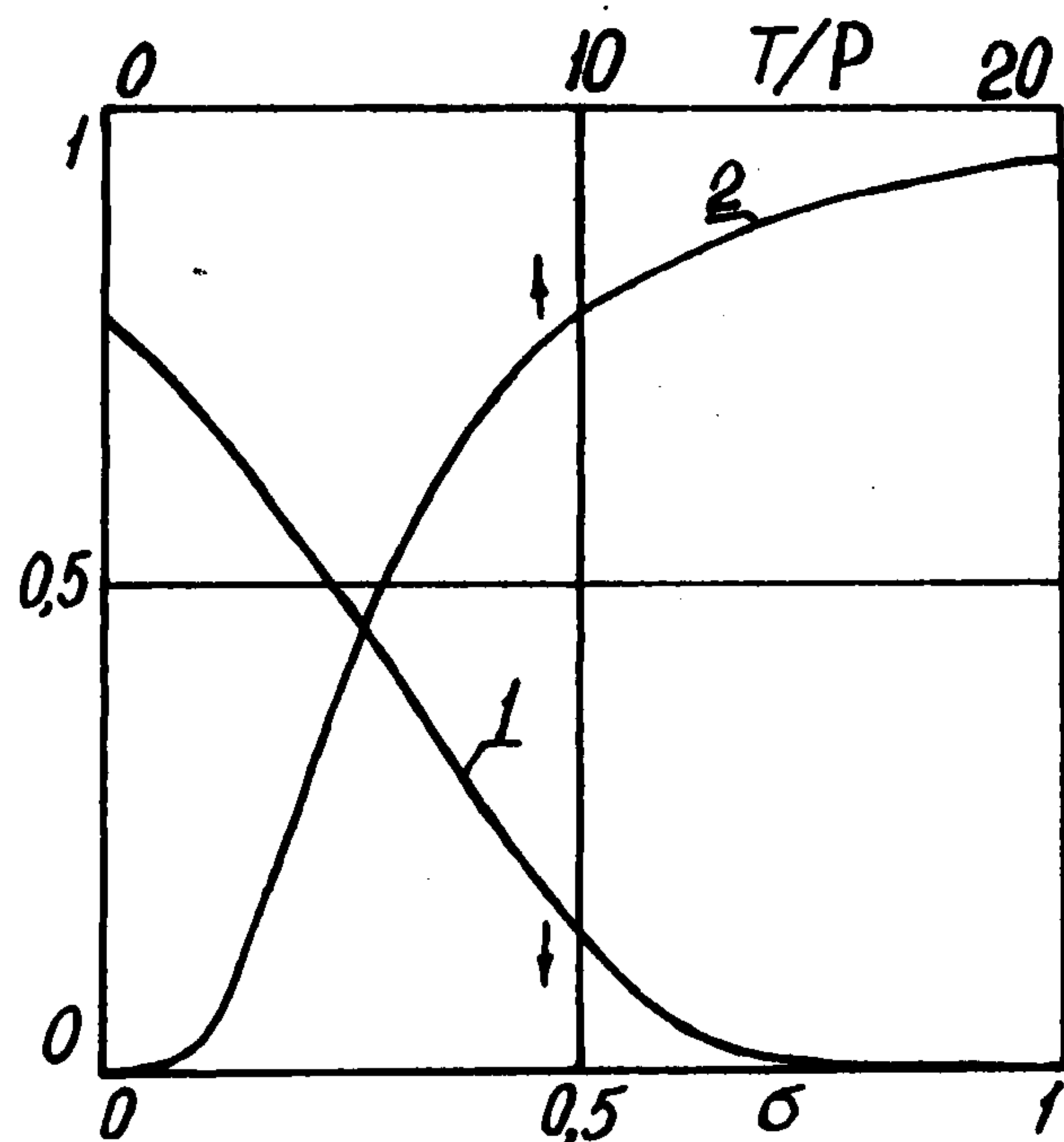
$$\Omega(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\Gamma(n + \frac{1}{2} + i\delta)|^2}{\Gamma(n) \Gamma(n + 1 - \alpha)} \Psi^{-}(-n) t^{n-1}$$

При  $-\infty < x < 0$  имеем вследствие (1.6)

$$\sigma_y(x, 0) = -\frac{\kappa \mu_+}{\pi} \int_a^{\infty} \frac{\chi_1(\xi) d\xi}{\xi - x}, \quad \tau_{xy}(x, 0) = -\frac{\kappa \mu_+}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\chi_2(\xi) d\xi}{\xi - x}$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Последние два интеграла – типа свертки Меллина – вычисляются при помощи теоремы о свертке и теории вычетов:

$$\sigma_y(x, 0) = -\kappa\mu_+(\pi\mu_0)^{-1}\Omega(x/a), \quad -a < x < 0$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = -\frac{\kappa\mu_+}{\pi\mu_0} \left[ \mu\Omega\left(\frac{x}{a}\right) + \left(-\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1} \gamma \sin \pi\alpha(\mu^2 + 1)\Delta_1\left(\frac{x}{a}\right) \right], \quad -a < x < 0$$

$$\sigma_y(x, 0) = \kappa\mu_+ \left[ \frac{2}{\pi\mu_0 \operatorname{sh} 2\pi\delta} \operatorname{Re} \left\{ i \cos \pi(\alpha + i\delta) \left(-\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}-i\delta} \Lambda_1\left(\frac{x}{a}\right) \right\} - \right. \\ \left. - \Pi_1(P_0, T_0; -x/b) \right], \quad -\infty < x < -a$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = \kappa\mu_+ \left[ \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\mu_0 \operatorname{ch} \pi\delta} \operatorname{Re} \left\{ (\mu - i\gamma \operatorname{cth} \pi\delta) \left(-\frac{x}{a}\right)^{-\frac{1}{2}-i\delta} \Lambda_1\left(\frac{x}{a}\right) \right\} - \right. \\ \left. - \Pi_1(T_0, -P_0; -x/b) \right], \quad -\infty < x < -a \quad (1.17)$$

$$\Pi_1(P, T; t) = -\operatorname{ch} \pi\delta \left[ \pi t^{\frac{1}{2}}(1+t) \right]^{-1} (P \cos \delta \ln t + T\gamma \operatorname{cth} \pi\delta \sin \delta \ln t)$$

Как и в случае  $\mu = 0$  [15] при  $\mu \neq 0$  только для корня  $\lambda_0$  уравнения (1.15) скачок  $\langle u \rangle(x)$  знакопостоянен на отрезке проскальзывания. Для других корней этого уравнения функция  $\langle u \rangle(x)$  знакопеременная. На отрезке  $(0, a)$  контактные нормальные напряжения, соответствующие корню  $\lambda_0$ , сжимающие. Поэтому далее принимаем обозначение  $\lambda = \lambda_0$ .

На фиг. 2 изображены графики контактных напряжений  $\sigma_y(x, 0)$  и  $\tau_{xy}(x, 0)$  при  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ,  $\sigma = 0,01$  (в этом случае  $\gamma = 0,2801$ ),  $b = 1$ ,  $P = 0,1$  и  $T = 1$  для  $\mu = -0,5$  (при этом  $a = 0,7795$ ) – кривые 1 и 2 соответственно, а также соответствующие графики для  $\mu = 0$  ( $a = 0,7539$ ) – штрихпунктирные линии. На этой же фигуре для тех же значений параметров представлены графики скачков нормальных  $-\chi_1^0(x)G_1$  (A) и касательных  $-\chi_2^0(x)G_1$  (B) смещений. Оказывается, что при  $\mu = -0,5$ :

$$\sigma_y(x, 0) < 0, \quad \tau_{xy}(x, 0) > 0, \quad \chi_1^0(x) = 0, \quad \chi_2^0(x) < 0, \quad 0 < x < a$$

$$\sigma_y(x, 0) = 0, \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad \chi_1^0(x) < 0, \quad \chi_2^0(x) < 0, \quad a < x < b \quad (1.18)$$

Соответствующий корень  $\lambda_0$  уравнения (1.15) для  $\mu = 0,5$  порождает решение, которое удовлетворяет всем неравенствам (1.18), кроме одного:  $\tau_{xy}(x,0) < 0$  при  $0 < x < a$  (при этом скачок касательных смещений  $\chi_2^0(x)$  по-прежнему отрицателен в области проскальзывания). Так что этот случай ( $\mu = 0,5$ ) нефизичен. Такая ситуация наблюдается и для любых других соотношений величин нагрузок  $P (\geq 0)$  и  $T$ , когда  $0 < \gamma \leq 1/2$  (допустимые значения параметра  $\gamma \neq 0 : -1/2 \leq \gamma \leq 1/2$ ). Особенно неожиданным этот факт представляется для случая  $P = 0, T < 0$ . В этом случае ( $v_1 = v_2 = 0,3, \sigma = 0,01$ ) при  $b = 1$  оказывается, что  $a = 5,47 \cdot 10^{-15}$  для  $\mu = -0,5$ ,  $a = 5,08 \cdot 10^{-15}$  для  $\mu = 0$  и  $a = 4,73 \cdot 10^{-15}$  для  $\mu = 0,5$ . Функции  $\chi_2^0(x)$  и  $\sigma_y(x, 0)$  отрицательны всюду на отрезке  $0 < x < a$  как при  $\mu = -0,5$ , так и при  $\mu = 0,5$ , однако касательные напряжения положительны на отрезке проскальзывания только для  $\mu < 0$ . Анализ случая  $-1/2 \leq \gamma < 0$  приводит к заключению:  $\text{sgn} \mu = -\text{sgn} \gamma$  и не зависит от знака  $T (P \geq 0)$ .

Скачок нормальных смещений при  $\mu \neq 0$ , как и в [15] при  $\mu = 0$ , на некотором удалении от точки  $b$  меняет знак и на бесконечности осциллирует. При  $P = 0, T < 0$  и  $\gamma > 0$  на отрезке  $a < x < b$  имеем  $\chi_1^0(x) < 0, \chi_2^0(x) > 0$ , а в точке  $x_0 = 1 + \epsilon$  ( $\epsilon$  – мало,  $b = 1$ ) функция  $\chi_1^0(x)$  меняет знак первый раз, причем, когда  $T/P$  растет от  $-\infty$  до  $+\infty$ , значение  $x_0$  растет от  $1 + \epsilon$  до  $A \geq 1$ .

Как видно из графиков (фиг. 2), при  $x \rightarrow -0$  касательные и нормальные напряжения возрастают, причем касательные напряжения стремятся к бесконечности, а нормальные остаются ограниченными. Анализ решения (1.16) и (1.17) подтверждает этот факт:

$$x \rightarrow +0: \sigma_y(x,0) = O(x^{\alpha-1}), \tau_{xy}(x,0) = \begin{cases} O(x^{\alpha-1}), & \mu \neq 0 \\ 0, & \mu = 0 \end{cases}$$

$$x \rightarrow -0: \sigma_y(x,0) = O(1), \tau_{xy}(x,0) = O(x^{\alpha-1})$$

В точке приложения нагрузки  $x = b$  ( $b = 1$ ) скачки касательных и нормальных смещений имеют логарифмическую особенность.

Проанализируем зависимость длины зоны проскальзывания  $a = b/\lambda$  от коэффициента трения  $|\mu|$ . В таблице представлены значения  $\lambda$  при  $T = P = 1$  для некоторых значений  $\gamma$  и  $\mu$ .

- $\mu$	$\gamma = 0,1$	0,2	0,3	0,4	0,5
	$10^{-8}\lambda$	$10^{-2}\lambda$	$\lambda$	$\lambda$	$\lambda$
0	120	483	725	85,1	22,8
0,1	119	478	714	83,3	22,3
0,3	118	468	691	79,9	21,1
0,5	117	458	669	76,5	20,0
1,0	113	433	616	68,7	17,6

Как видно, при  $\gamma = 0,1$  при увеличении  $|\mu|$  от 0 до 0,5  $\lambda$  уменьшается только на 2,5%, а от 0 до 1,0 – на 5,8%. Чем больше  $|\mu|$ , тем существенней учет трения в зоне проскальзывания: при  $\gamma = 0,5$  когда  $|\mu|$  изменяется от 0 до 0,5 (до 1),  $\lambda$  уменьшается на 12,3% (на 22,8%). При этом оказывается, чем меньше отношение  $T/P$ , тем существенней (в процентном соотношении) зависимость длины зоны проскальзывания от коэффициента трения. Ниже приведены значения  $\lambda$  при  $\gamma = 0,5$

$T/P$	10	5	3	2	1	0	-1
$\mu = 0$ :	1,08	1,35	2,11	4,06	22,8	$1,99 \cdot 10^3$	$1,78 \cdot 10^5$
$\mu = -1$ :	1,04	1,21	1,76	3,24	17,6	$1,53 \cdot 10^3$	$1,36 \cdot 10^5$

Для  $T/P = 10$  при изменении  $\mu$  от 0 до -1 величина  $\lambda$  уменьшается только на 3,7%, а при  $T/P = -1$  - на 23,6%.

Для больших  $|\mu|$  имеем следующие значения длин зоны проскальзывания ( $T/P = 1$ ,  $\gamma = 0,5$ ):

$-\mu$	1	2	3	5	7	10
$\lambda$	17,6	14,1	12,1	9,98	9,00	8,24

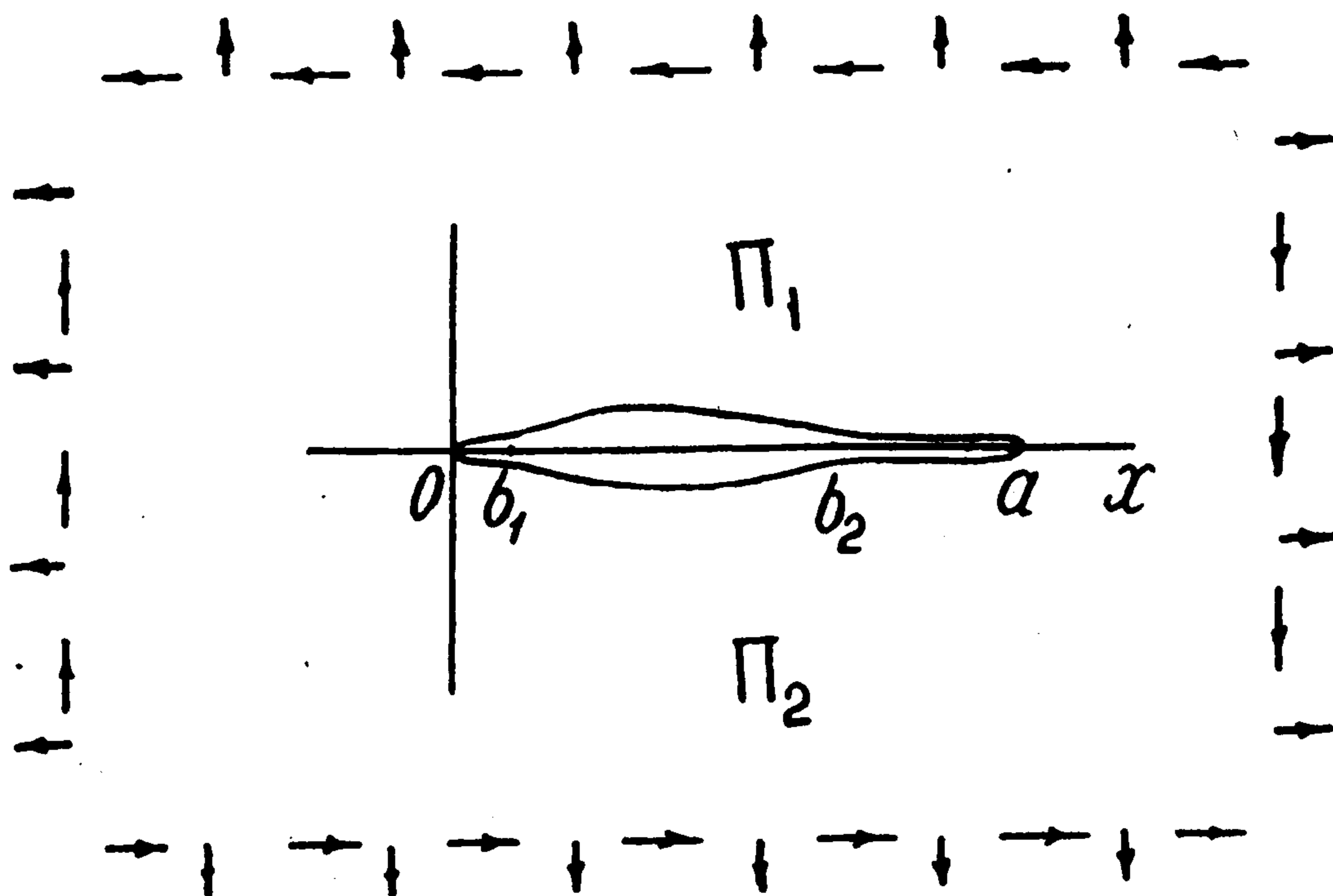
На фиг. 3 кривая 1 отражает зависимость величины  $1/\lambda$  от  $\sigma = G_1/G_2$  при  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ,  $T/P = 10$  и  $\mu = -0,5$ , а кривая 2 - зависимость той же величины от  $T/P$  при  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ,  $\sigma = 0,01$  и  $\mu = -0,5$ .

**2. Растяжение со сдвигом межфазной конечной трещины при наличии участков сухого трения.** Пусть составная плоскость  $\Pi_1 \cup \Pi_2$  нагружена на бесконечности

$$\sigma_y = \sigma_0, \quad \tau_{xy} = -\tau_0, \quad |x| < \infty$$

$$\sigma_x = (1 - 2\gamma \operatorname{sgn} y)\sigma_0, \quad \tau_{xy} = -\tau_0, \quad |y| < \infty$$

( $\gamma$  - параметр, определенный в (1.7)) и на линии раздела имеет трещину ( $0 < x < a$ ,  $y = \pm 0$ ), которая раскрыта на участке ( $b_1 < x < b_2$ ), а при  $0 < x < b_1$  и  $b_2 < x < a$  берега трещины контактируют по закону сухого трения. На участках  $-\infty < x < 0$  и  $a < x < \infty$  полуплоскости  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  полностью сцеплены. Без ограничения общности считаем  $\tau_0 > 0$ ,  $\gamma > 0$ . Тогда левая зона проскальзывания - меньшая, т.е.  $b_1 \ll b_2$  (фиг. 4).



Фиг. 4

Решение поставленной задачи можно представить в виде суммы двух слагаемых. Первое - элементарное решение - соответствует отсутствию трещины и имеет вид

$$\sigma_y = \sigma_0, \quad \tau_{xy} = -\tau_0, \quad \sigma_x = (1 - 2\gamma \operatorname{sgn} y)\sigma_0$$

$$\langle u \rangle = \langle v \rangle = 0, \quad |x| < \infty$$

Второе слагаемое есть решение следующей задачи  $H$ :

$$\sigma_y|_{y=\pm 0} = -\sigma_0, \quad \tau_{xy}|_{y=\pm 0} = \tau_0, \quad b_1 < x < b_2$$

$$\langle \sigma_y \rangle = \langle \tau_{xy} \rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle = \chi_1(x), \quad \left\langle \frac{\partial u}{\partial x} \right\rangle = \chi_2(x), \quad |x| < \infty \quad (2.1)$$

$$\text{supp } \chi_1 \subset (b_1, b_2), \quad \text{supp } \chi_2 \subset (0, a)$$

$$(\tau_{xy} + \mu\sigma_y)|_{y=\pm 0} = \tau_0 - \mu\sigma_0, \quad 0 < x < b_1; \quad (\tau_{xy} - \mu\sigma_y)|_{y=\pm 0} = \tau_0 + \mu\sigma_0, \quad b_2 < x < a \quad (2.2)$$

Разные знаки перед коэффициентом трения  $\mu$  (вследствие предположения  $\gamma > 0$  и анализа, проведенного в разд. 1,  $\mu$  – положительная величина) обусловлены тем, что проскальзывание на участках  $(0, b_1)$  и  $(b_2, a)$  происходит в противоположных направлениях. Кроме того, должны быть выполнены дополнительные условия в виде неравенств

$$\langle v \rangle(x) \leq 0, \quad b_1 < x < b_2$$

$$\sigma_0 + \sigma_y(x, \pm 0) \leq 0, \quad x \in (0, b_1) \cup (b_2, a) \quad (2.3)$$

Последнее неравенство означает, что нормальные напряжения для исходной задачи сжимающие в зоне смыкания берегов. Точки  $b_1$  и  $b_2$  подлежат определению из условия гладкости профиля трещины в окрестности этих точек. Завершают постановку задачи условия замкнутости разреза

$$\int_{b_1}^{b_2} \chi_1(x) dx = 0, \quad \int_0^a \chi_2(x) dx = 0 \quad (2.4)$$

Сведем сформулированную задачу  $H$  к системе двух сингулярных интегральных уравнений. Для этого подставим выражения (1.6) контактных напряжений через скачки  $\chi_1(x)$ ,  $\chi_2(x)$  при учете (1.5) и (2.1) в граничное условие (2.2) и получим

$$\frac{\mu\mu_+}{\pi} \int_{b_1}^{b_2} \frac{\chi_1(\xi)}{\xi - x} d\xi + \mu_- \chi_1(x) + \frac{\mu_+}{\pi} \int_0^a \frac{\chi_2(\xi)}{\xi - x} d\xi - \mu\mu_- \chi_2(x) = \tau_+, \quad 0 < x < b_2$$

$$-\frac{\mu\mu_+}{\pi} \int_{b_1}^{b_2} \frac{\chi_1(\xi)}{\xi - x} d\xi + \mu_- \chi_1(x) + \frac{\mu_+}{\pi} \int_0^a \frac{\chi_2(\xi)}{\xi - x} d\xi + \mu\mu_- \chi_2(x) = \tau_-, \quad b_1 < x < a, \quad (2.5)$$

$$\tau_{\pm} = \kappa^{-1}(-\tau_0 \pm \mu\sigma_0)$$

причем  $\mu_{\pm}$ ,  $\kappa$  определены в (1.6).

Решение системы (2.5) ищем в классе гельдеровских функций, причем функция  $\chi_1(x)$  ограничена в точках  $x = b_1$  и  $x = b_2$ , а функция  $\chi_2(x)$  допускает интегрируемые особенности в точках  $x = 0$  и  $x = a$  и ограничена при  $x \rightarrow b_1$  и  $x \rightarrow b_2$ . Обозначим

$$\lambda_j = b_j / a \quad (j = 1, 2), \quad t_{\pm}(x) = -\kappa^{-1}(\tau_{xy} \pm \mu\sigma_y)(x, 0)$$

и введем в рассмотрение кусочно-аналитические функции с линией скачков  $\Gamma$ , определенной в (1.8)

$$\Phi_1^-(s) = \int_{\lambda_1/\lambda_2}^1 \chi_1(b_2\tau) \tau^s d\tau, \quad \Phi_1^+(s) = \int_1^{\lambda_2/\lambda_1} \chi_1(b_1\tau) \tau^s d\tau$$

(2.6)

$$\begin{aligned}\Phi_2^-(s) &= \int_0^1 \chi_2(a\tau)\tau^s d\tau, & \Phi_2^+(s) &= \int_1^\infty t_+(b_2\tau)\tau^s d\tau \\ \Phi_3^-(s) &= \int_0^1 t_-(b_1\tau)\tau^s d\tau, & \Phi_3^+(s) &= \int_1^\infty t_-(a\tau)\tau^s d\tau\end{aligned}$$

При помощи преобразования Меллина систему (2.5) приводим к векторной задаче Римана

$$\begin{aligned}\Phi_1^+(s) &= (\lambda_1 / \lambda_2)^{-s-1} \Phi_1^-(s) \\ \Phi_2^+(s) &= l_{11}(s)\Phi_1^-(s) + \lambda_2^{-s-1} l_{12}(s)\Phi_2^-(s) - \tau_+(s+1)^{-1} \\ \Phi_3^+(s) &= \lambda_2^{s+1} l_{21}(s)\Phi_1^-(s) + \lambda_{22}(s)\Phi_2^-(s) - \lambda_1^{s+1} \Phi_3^-(s) - (1 - \lambda_1^{s+1})(s+1)^{-1} \tau_- \\ l_{j1}(s) &= \mu_- - (-1)^j \mu \mu_+ \operatorname{ctg} \pi s, & l_{j2}(s) &= (-1)^j \mu \mu_- + \mu_+ \operatorname{ctg} \pi s \quad (j=1,2)\end{aligned}\tag{2.7}$$

Метод решения задач типа (2.7) предложен в [1]. Минуя процесс построения решения, приведем окончательный результат:

$$\begin{aligned}\Phi_1^-(s) &= \frac{R_1(s)}{L_1^-(s)} + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{s+1} \frac{\Psi_2^-(s)}{L_2^+(s)}, & \Phi_1^+(s) &= \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{-s-1} \Phi_1^-(s) \\ \Phi_2^-(s) &= \frac{R_0(s)}{L_0^-(s)} - \frac{\lambda_1^{s+1} l_{11}(s)}{l_{12}(s) L_2^+(s)} \Psi_2^-(s) - \frac{\lambda_2^{s+1} l_{21}(s)}{l_{22}(s) L_1^-(s)} R_1(s) \\ \Phi_2^+(s) &= -\frac{\tau_+}{s+1} + L_1^+(s) R_1(s) + \frac{\lambda_2^{-s-1} l_{12}(s)}{l_{22}(s)} L_0^+(s) R_0(s) \\ \Phi_3^-(s) &= (s+1)^{-1} \tau_- - L_2^-(s) \Psi_2^-(s), & \Phi_3^+(s) &= -(s+1)^{-1} \tau_- + L_0^+(s) R_0(s)\end{aligned}\tag{2.8}$$

$$R_0(s) = C + e_0 \tau_- (s+1)^{-1} + \Psi_1^+(s), \quad R_1(s) = e_1 \tau_+ (s+1)^{-1} + \Psi_1^-(s) + \Psi_2^+(s)$$

$$e_0 = -\mu_0^{-1} \Gamma(2-\alpha), \quad e_1 = -\pi(\delta^2 + 1/4) [\mu_1 \Gamma(2-\alpha) \operatorname{ch} \pi \delta]^{-1}, \quad \tau_* = \tau_+ - \tau_-$$

$$L_0^+(s) = -\frac{\mu_0 \Gamma(-s)}{\Gamma(1-\alpha-s)}, \quad L_0^-(s) = \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(\alpha+s)}, \quad \mu_1 = \frac{2\mu\mu_+ \sin \pi\alpha}{\operatorname{ch}^2 \pi\gamma}$$

$$L_1^+(s) = -\frac{\mu_1 \Gamma(-s) \Gamma(1-\alpha-s)}{\Gamma(1/2-s-i\delta) \Gamma(1/2-s+i\delta)}, \quad L_1^-(s) = \frac{\Gamma(1+s) \Gamma(\alpha+s)}{\Gamma(1/2+s+i\delta) \Gamma(1/2+s-i\delta)}$$

$$L_2^+(s) = -\frac{\mu_1 \Gamma(-s) \Gamma(\alpha-s)}{\Gamma(1/2-s-i\delta) \Gamma(1/2-s+i\delta)}, \quad L_2^-(s) = \frac{\Gamma(1+s) \Gamma(1-\alpha+s)}{\Gamma(1/2+s+i\delta) \Gamma(1/2+s-i\delta)}$$

$$\Psi_1^+(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j^+}{s-j+\alpha}, \quad \Psi_1^-(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j^-}{s-1+j+\alpha}, \quad \Psi_2^\pm(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j^\pm}{s \mp s_j}$$

Числа  $\mu_0, s_j$  определены в (1.11),  $C$  – произвольная постоянная, коэффициенты  $A_j^\pm, B_j^\pm$  находятся далее.

Вследствие ограниченности напряжений  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  в точках  $x = b_1$  и  $x = b_2$  функция  $t_-(b_1\tau)$  ограничена при  $t \rightarrow 1 - 0$ . Принимая во внимание (2.6), по теореме абелева типа получаем асимптотику  $\Phi_3^-(s) = O(s^{-1}), s \rightarrow \infty, s \in D^-$ , которой функция, определенная в (2.8), обладает тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{\infty} B_j^- = 0\tag{2.9}$$

Условия замкнутости разреза (2.4) вследствие (2.6) имеют вид  $\Phi_1^-(0) = \Phi_2^-(0) = 0$ , из которых следует

$$C + \tau_- e_0 + \Psi_1^+(0) = 0, \quad \tau_+ e_1 + \Psi_1^-(0) + \Psi_2^+(0) = 0 \quad (2.10)$$

Для того чтобы функции (2.8) были аналитичны в соответствующих полуплоскостях, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты

$$A_n^\pm = A_{n1}^\pm + CA_{n0}^\pm, \quad B_n^\pm = B_{n1}^\pm + CB_{n0}^\pm \quad (2.11)$$

удовлетворяли следующей бесконечной алгебраической системе Пуанкаре–Коха:

$$\begin{aligned} A_{nk}^- &= \lambda_2^{n+\alpha-2} p_n^- \left( -\delta_{k0} + \frac{\tau_- e_0}{n+\alpha-2} \delta_{k1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_{jk}^+}{n+j-1} \right) \\ B_{nk}^+ &= \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{s_n+1} q_n^+ \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{jk}^-}{s_n+s_j} \\ A_{nk}^+ &= \lambda_2^{n-\alpha+1} p_n^+ \left[ \frac{\tau_+ e_1}{n-\alpha+1} \delta_{k1} + \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{A_{jk}^-}{n-1+j} + \frac{B_{jk}^+}{n-\alpha-s_j} \right) \right] \\ B_{nk}^- &= \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{s_n-1} q_n^- \left[ \frac{\tau_+ e_1}{s_n-1} \delta_{k1} + \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{A_{jk}^-}{s_n-j+1-\alpha} + \frac{B_{jk}^+}{s_n+s_j} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

( $k = 0, 1; n = 1, 2, 3, \dots$ )

$$p_n^- = \frac{\gamma \operatorname{ch}^2 \pi \delta}{\pi \Gamma^2(n)} \left| \Gamma \left( n + \alpha - \frac{1}{2} + i\delta \right) \right|^2, \quad p_n^+ = -\frac{\gamma d^2 (\mu^2 + 1)}{\pi \Gamma^2(n)} \left| \Gamma \left( n + \frac{1}{2} - \alpha + i\delta \right) \right|^2$$

$$q_n^+ = \mu_1^{-1} s_n q_n, \quad q_n^- = \mu_1 s_n^{-1} q_n, \quad d = \sin \pi \alpha$$

$$q_{2m} = \frac{i \cos \pi(\alpha + i\delta) \Gamma(m - \frac{1}{2} - i\delta) \Gamma(m + \frac{1}{2} - i\delta) \Gamma(m + \alpha - \frac{1}{2} - i\delta) \Gamma(m + \frac{1}{2} - \alpha - i\delta)}{2\pi \operatorname{sh} \pi \delta \Gamma^2(m) \Gamma^2(m - 2i\delta)}$$

$$q_{2m-1} = \overline{q_{2m}} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

Подставляя второе соотношение из (2.11) в равенство (2.9), находим

$$C = -\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0}, \quad \Lambda_k = \sum_{j=1}^{\infty} B_{jk}^- \quad (k = 0, 1) \quad (2.13)$$

Удовлетворяя условиям (2.10), приходим к системе двух трансцендентных уравнений относительно  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j^+}{\alpha-j} - \frac{\Lambda_1}{\Lambda_0} = -\tau_- e_0, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{A_j^-}{\alpha-1+j} - \frac{B_j^+}{s_j} \right) = -\tau_+ e_1 \quad (2.14)$$

Вследствие малости параметра  $\lambda_1 : 0 < \lambda_1 < 10^{-4}$ , а также  $\lambda_2 \gg \lambda_1$  [4, 11] систему (2.14) можно приближенно свести к одному трансцендентному уравнению. Для этого сначала преобразуем бесконечную систему (2.12) к виду ( $k = 0, 1$ )

$$A_{nk}^- = \lambda_2^{n+\alpha-2} p_n^- \left( -\delta_{k0} + \frac{\tau_- e_0}{n+\alpha-2} \delta_{k1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_{jk}^+}{n+j-1} \right)$$

$$A_{nk}^+ = \lambda_2^{n-\alpha+1} p_n^+ \left( \frac{\tau_+ e_1}{n-\alpha+1} \delta_{k1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_{jk}^+}{n+j-1} \right) \quad (n=1,2,\dots) \quad (2.15)$$

$$B_{nk}^+ = 0 \quad (n=1,2,\dots), \quad B_{nk}^- = 0 \quad (n=3,4,\dots)$$

$$B_{nk}^- = \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right)^{s_n-1} f_{nk}, \quad f_{nk} = q_n^- \left( \frac{\tau_- e_1}{s_n-1} \delta_{k1} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_{jk}^-}{s_n-j+1-\alpha} \right) \quad (n=1,2)$$

Коэффициенты  $A_{nk}^{\pm}$  определяются из системы (2.15) в терминах рекуррентных соотношений

$$A_{nk}^- = \lambda_2^{n+\alpha-2} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nkm}^- \lambda_2^{m-1}, \quad A_{nk}^+ = \lambda_2^{n-\alpha+1} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nkm}^+ \lambda_2^{m-1}$$

$$a_{nk1}^- = p_n^- [-\delta_{k0} + \tau_- e_0 (n+\alpha-2)^{-1} \delta_{k1}]$$

$$a_{nk1}^+ = p_n^+ [\tau_+ e_1 (n-\alpha+1)^{-1} \delta_{k1} + \lambda_2^{\alpha-1} n^{-1} a_{1k1}^-]$$

$$a_{nkm}^- = p_n^- \lambda_2^{1-\alpha} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{a_{j,k,m-j}^+}{n+j-1}, \quad a_{nkm}^+ = p_n^+ \lambda_2^{\alpha-1} \sum_{j=1}^m \frac{a_{j,k,m+1-j}^-}{n+j-1}$$

$$(m=2,3,\dots)$$

Выражение (2.13) для  $C$  преобразуется к виду

$$C = -\frac{\tau_+ e_1 + a_1^-}{a_0^-}, \quad a_m^+ = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_{jm}^+}{\alpha-j}, \quad a_m^- = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_{jm}^-}{\alpha+j-1} \quad (m=0,1)$$

и вместо системы (2.14) получаем уравнение относительно  $\lambda_2$

$$a_0^{-1} (1 + a_0^+) (\tau_+ e_1 + a_1^-) = \tau_- e_0 + a_1^+ \quad (2.16)$$

а меньший параметр  $\lambda_1$  выражается явно через  $\lambda_2$

$$\lambda_1 = \lambda_2 g^{1/(2i\delta)}, \quad g = -(Cf_{20} + f_{21})(Cf_{10} + f_{11})^{-1} \quad (2.17)$$

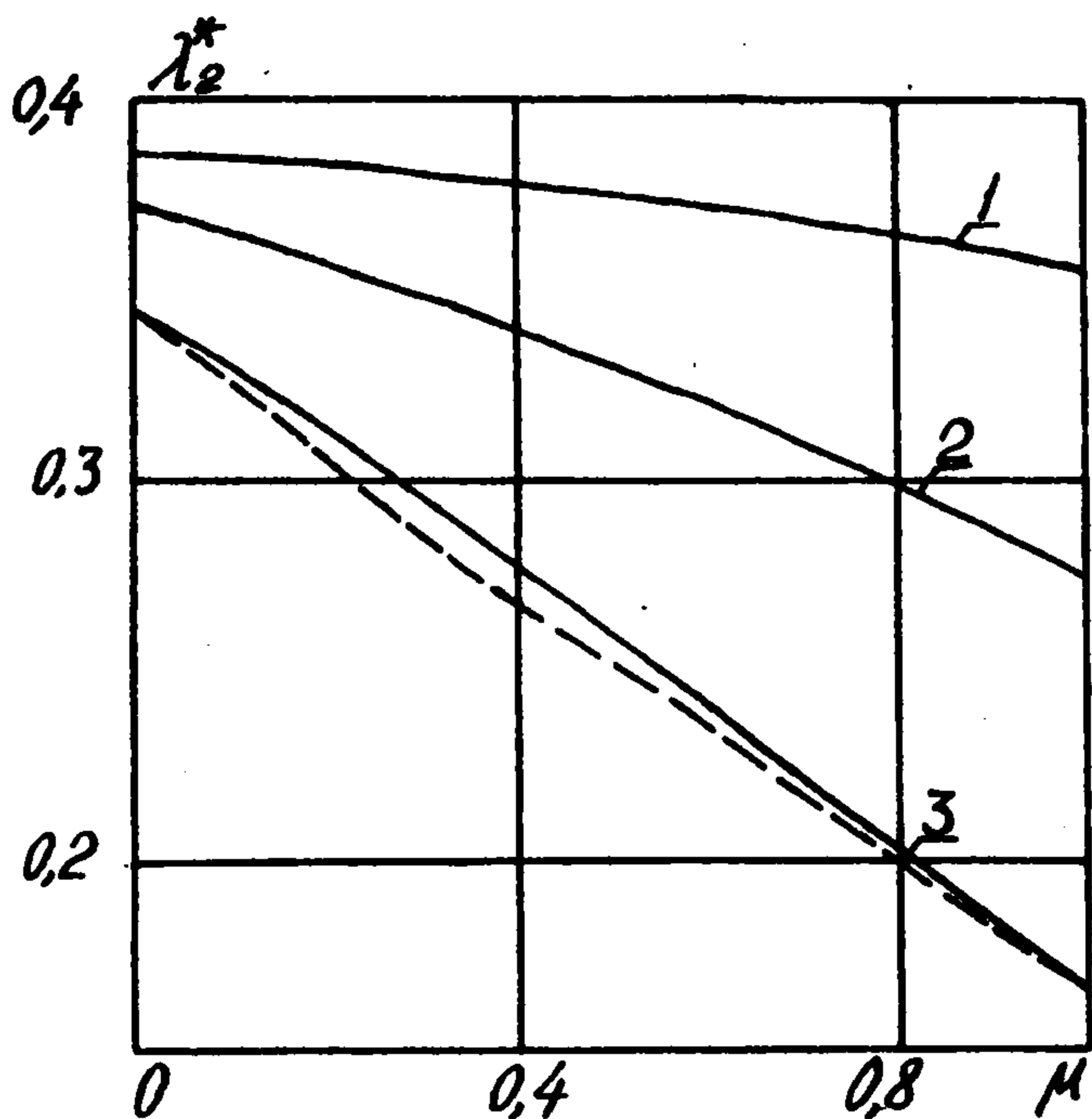
Существует счетное множество решений уравнения (2.16) – из них следует выбрать [7] максимальное значение  $\lambda_2 \in (0,1)$ , а также счетный набор значений  $\lambda_1$ , удовлетворяющий первому равенству в (2.17) и неравенству  $\lambda_1 \ll \lambda_2$

$$\lambda_1 = \lambda_2 \exp\left\{(2\delta)^{-1} \arg g - \pi l \delta^{-1}\right\} \quad (l=1,2,\dots)$$

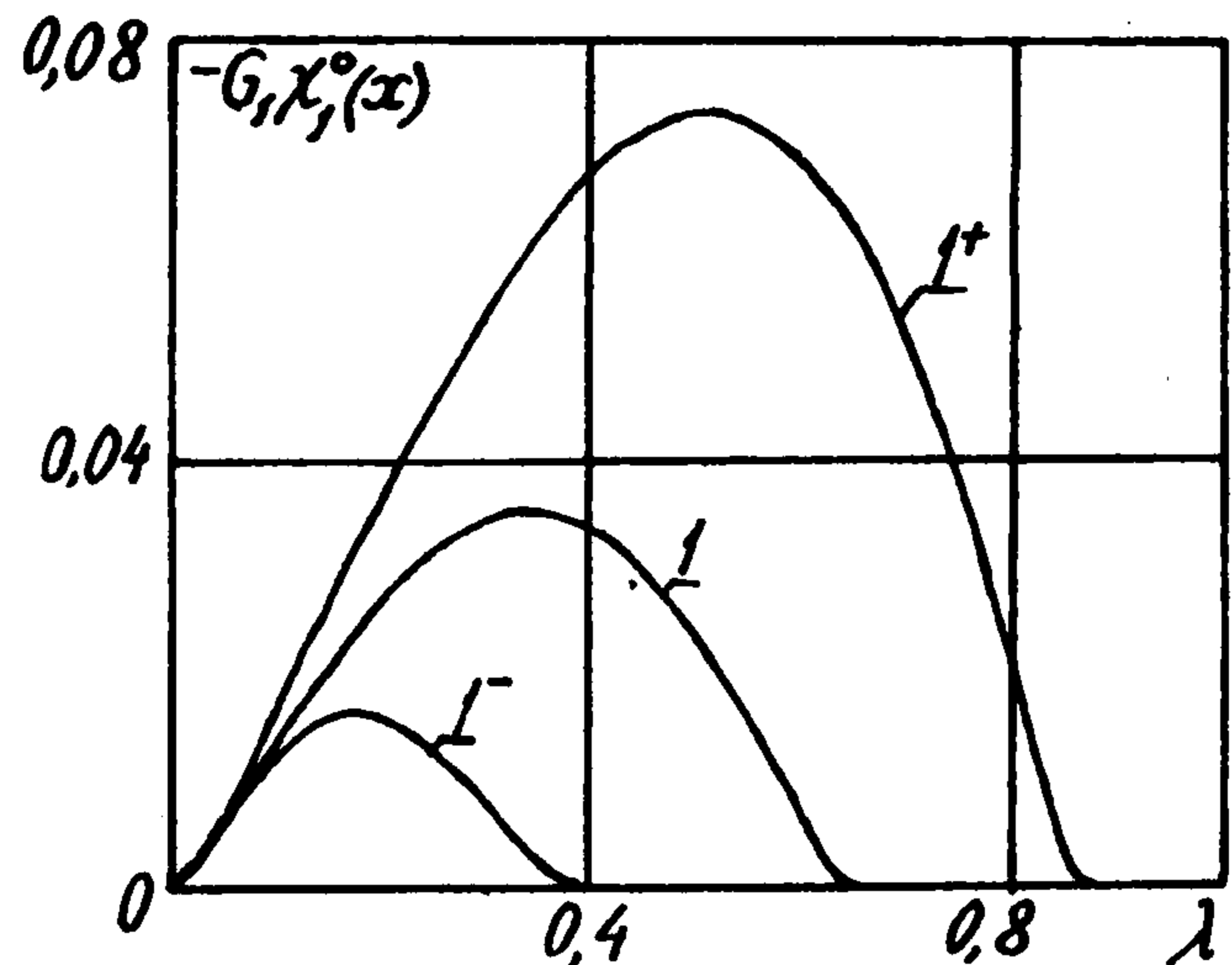
$$|\arg g| < \pi$$

Однако одному и только одному (максимальному среди них) значению  $\lambda_1 = \lambda_2 \exp\{(2\delta)^{-1} \arg g - \pi \delta^{-1}\}$  соответствует физическое решение, т.е. такое, для которого выполняются неравенства (2.3)

Зависимость длины зоны проскальзывания от трения отражена на фиг. 5, где для случая  $\sigma_0/\tau_0 = 0$  изображены графики зависимости величины  $\lambda_2^* = 2\lambda_2 - 1$  (для сравнения с [11] вместо  $\lambda_2$  взято  $\lambda_2^*$ ) от коэффициента трения  $\mu$  для  $\gamma = 0,1$ ,  $\gamma = 0,3$  и  $\gamma = 0,5$  (кривые 1 – 3 соответственно); штрихпунктирная линия – график  $\lambda_2^*$  для  $\gamma = 0,5$  из [11]. При изменении  $\mu$  от 0 до 1 длина большей зоны проскальзывания  $1 - \lambda_2$  увеличивается на 26% при  $\gamma = 0,5$  и лишь на 5% при



Фиг. 5



Фиг. 6

$\gamma = 0,1$ . Ниже представлены значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  при  $\mu = 0,3$ ,  $\sigma_0/\tau_0 = 0$  для разных значений  $\gamma$

$\gamma$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\lambda_1$	$1,29 \cdot 10^{-43}$	$4,94 \cdot 10^{-20}$	$9,91 \cdot 10^{-13}$	$5,45 \cdot 10^{-9}$	$1,15 \cdot 10^{-6}$
$\lambda_2$	0,690	0,683	0,673	0,662	0,647

и значения  $\lambda_2$  для  $\gamma = 0,5$  при  $\mu = 0,3$  и  $\mu = 10^{-5}$  для некоторых величин  $\sigma_0/\tau_0$  ( $\tau_0 > 0$ )

$\sigma_0/\tau_0$	-0,6	-0,4	-0,2	0	0,1	0,2	0,4
$\mu = 0,3$ :	0,137	0,239	0,414	0,647	0,754	0,839	0,942
$\mu = 10^{-5}$ :	0,175	0,278	0,449	0,671	0,772	0,851	0,950

Последняя строка согласуется с соответствующими результатами [16, 7] при  $\mu = 0$ .

Как видно, при увеличении  $\gamma$  ( $0 < \gamma \leq 0,5$ ) или при уменьшении  $\mu$  ( $0,5 \geq \mu \geq 0$ ) зона отрыва увеличивается на несколько процентов; в то время как изменение величины  $\sigma_0/\tau_0$  от  $-0,6$  до  $0,6$  влечет за собой возрастание зоны отрыва в несколько раз.

Формулы для скачков смещений и контактных напряжений получаются при помощи обратного преобразования Меллина и теории вычетов. Например, для скачка нормальных смещений, учитывая (2.6), (2.8) и (2.15), находим

$$\chi_1^0(x) = I(x) - I(b_1), \quad b_1 < x < b_2$$

$$I(x) = \sum_{m=1}^{\infty} M_m \left[ -\frac{b_2}{s_m} B_m^+ \left( \frac{x}{b_2} \right)^{-s_m} + \frac{b_1}{\mu_1} B_m^- \left( \frac{x}{b_1} \right)^{s_m} \right] \quad (2.18)$$

$$M_{2m} = \Gamma(m)\Gamma(m-2i\delta) [\Gamma(\frac{1}{2}+m-i\delta)\Gamma(\alpha-\frac{1}{2}+m-i\delta)]^{-1}, \quad M_{2m-1} = \overline{M_{2m}}$$

При  $b_1 + \epsilon \leq x < b_2$  ( $\epsilon > 0$ ) вследствие малости  $b_1$  формулу (2.18) можно преобразовать к виду

$$\chi_1^0(x) = \frac{b_2}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\cos \pi(\alpha-i\delta)}{i \operatorname{sh} \pi\delta} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Gamma(m-\frac{1}{2}+i\delta)\Gamma(m+\frac{1}{2}-\alpha+i\delta)}{\Gamma(m)\Gamma(m+2i\delta)(\frac{1}{2}-m-i\delta)} \times \left( \frac{\tau_* e_1}{m-\frac{3}{2}+i\delta} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j^-}{m+\frac{1}{2}+i\delta-\alpha-j} \right) \left( \frac{x}{b_2} \right)^{m-\frac{1}{2}+i\delta} \right\}$$

На фиг. 6 изображены графики функции  $-G_1\chi_1^0(x)$  для случая  $\sigma = 0,01$ ,  $\nu_1 = 0,1$ ,  $\nu_2 = 0,3$ ,  $\mu = 0,3$  при  $\sigma_0/\tau_0 = -0,2, 0, 0,2$  (кривые  $1^-$ ,  $1^0$  и  $1^+$  соответственно). Как и в [7], раскрытие трещины уменьшается при росте интенсивности сжимающего напряжения.

**3. Эффективное решение интегрального уравнения Коминиоу.** Система интегральных уравнений (2.5) для трещины  $\{-a < x < a, y = \pm 0\}$ , раскрытой на участке  $|x| < b$ , в случае  $\tau_0 = 0$  и  $\mu = 0$ , сводится к следующему уравнению ( $0 < \gamma \leq 1/2$ ) [2,5]:

$$2 \int_{\lambda}^1 \frac{\varphi(\eta)\eta}{y^2 - \eta^2} \left(1 - \frac{\gamma^2\eta}{y}\right) d\eta = \frac{\pi\sigma_0}{\kappa\mu_+}, \quad \lambda < y < 1 \quad (3.1)$$

где  $\lambda = [1 - (b/a)^2]^{1/2}$ ,  $\varphi(\eta) = \chi_1(a(1 - \eta^2)^{1/2})$ ; остальные обозначения те же, что и в разд. 1, 2. Для уравнения (3.1) было построено [5] точное (в рядах) решение в терминах эллиптических функций. Получим решение этого уравнения в иной форме, удобной при численной реализации. Обозначим через  $\varphi_-(x)$ ,  $\varphi_+(x)$  левую часть уравнения (3.1) при  $0 < x < \lambda$ ,  $1 < x < \infty$  соответственно, введем в рассмотрение трансформанты Меллина

$$\begin{aligned} \Phi_1^-(s) &= \int_{\lambda}^1 \varphi(x)x^s dx, & \Phi_1^+(s) &= \int_1^{1/\lambda} \varphi(\lambda x)x^s dx \\ \Phi_2^-(s) &= \int_0^1 \varphi_-(\lambda x)x^s dx, & \Phi_2^+(s) &= \int_1^{\infty} \varphi_+(x)x^s dx \end{aligned} \quad (3.2)$$

и относительно них получим векторную задачу Римана

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(s) &= \lambda^{-s-1} \Phi_1^-(s) \\ \Phi_2^+(s) &= G(s)\Phi_1^-(s) - \lambda^{s+1}\Phi_2^-(s) - f(1 - \lambda^{s+1})(s+1)^{-1}, \quad s \in \Gamma \\ \Gamma: \operatorname{Re}(s) &= \gamma_0 \in (0,1), \quad f = (\kappa\mu_+)^{-1}\sigma_0 \\ G(s) &= \operatorname{tg} \frac{1}{2}\pi s + \gamma^2 \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\pi s = K^+(s)K^-(s) \\ K^+(s) &= \frac{(1 - \gamma^2)\Gamma(\frac{1}{2} - s/2)\Gamma(1 - s/2)}{\Gamma(1 - s/2 - i\beta/2)\Gamma(1 - s/2 + i\beta/2)}, & K^-(s) &= \frac{\Gamma(s/2)\Gamma(\frac{1}{2} + s/2)}{\Gamma(s/2 + i\beta/2)\Gamma(s/2 - i\beta/2)} \\ \beta &= \pi^{-1} \ln\{(1 + \gamma)(1 - \gamma)^{-1}\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Решая задачу (3.3) по схеме [17], находим

$$\begin{aligned} \Phi_1^-(s) &= [K^-(s)]^{-1} \left\{ \Psi^+(s) + f(s+1)^{-1} [K^+(-1)]^{-1} \right\} + \lambda^{s+1} \Psi^-(s) [K^+(s)]^{-1} \\ \Phi_2^-(s) &= f(s+1)^{-1} + K^-(s) \Psi^-(s) \\ \Phi_2^+(s) &= -f(s+1)^{-1} + K^+(s) \left\{ \Psi^+(s) + f(s+1)^{-1} [K^+(-1)]^{-1} \right\} \\ \Psi^+(s) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j^+}{s - s_j}, & \Psi^-(s) &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j^-}{s + s_j - 2} \\ s_{2j} &= 2j - i\beta, & s_{2j-1} &= 2j + i\beta \quad (j = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Коэффициенты  $A_n^{\pm}$  – решение бесконечной системы Пуанкаре–Коха

$$A_m^+ = \lambda^{s_m+1} \Delta_m^- \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j^-}{s_j + s_m - 2}$$

$$A_m^- = \lambda^{s_m-3} \Delta_m^+ \left( \frac{f_*}{3-s_m} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j^+}{2-s_j-s_m} \right)$$

$$\Delta_{2m-1}^+ = + \frac{(1-\gamma^2)}{\pi} \left[ \frac{\Gamma(m+i\beta/2)\Gamma(m-1/2+i\beta/2)}{\Gamma(m)\Gamma(m+i\beta)} \right]^2, \quad \Delta_{2m}^+ = \overline{\Delta_{2m-1}^+}$$

$$\Delta_{2m-1}^- = - \frac{\Delta_{2m-1}^+}{(1-\gamma^2)^2} \left( m - \frac{1}{2} + \frac{i\beta}{2} \right)^2, \quad \Delta_{2m}^- = \overline{\Delta_{2m-1}^-}$$

$$f_* = \frac{1}{2} f \pi^{1/2} (\beta^2 + 1) (1-\gamma^2)^{-1} (\operatorname{ch} \frac{1}{2} \pi \beta)^{-1}$$

которая допускает обращение в терминах рекуррентных соотношений

$$A_m^+ = \lambda^{s_m} \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}^+ \lambda^{2k-2}, \quad A_m^- = \lambda^{s_m-3} \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk}^- \lambda^{2k-2}$$

$$a_{m1}^- = f_* \Delta_m^+ (3-s_m)^{-1} \quad (3.5)$$

$$a_{mn}^+ = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\lambda^{i\beta} a_{2j-1, n+1-j}^-}{s_m + s_{2j-1} - 2} + \frac{\lambda^{-i\beta} a_{2j, n+1-j}^-}{s_m + s_{2j} - 2} \right) \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$a_{mn}^- = \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{\lambda^{i\beta} a_{2j-1, n-j}^+}{2-s_m-s_{2j-1}} + \frac{\lambda^{-i\beta} a_{2j, n-j}^-}{2-s_m-s_{2j}} \right) \quad (n=2, 3, \dots)$$

Берега трещины смыкаются плавно в точках  $x = \pm b$  тогда и только тогда, когда  $\Phi_2^-(s) = O(s^{-1})$ ,  $s \rightarrow \infty$ ,  $s \in D^-$ , а это равносильно вследствие (3.4)

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j^- = 0 \quad (3.6)$$

Последнее условие – трансцендентное уравнение относительно  $\lambda$ . Принимая во внимание малость  $\lambda$  [2, 5], уравнение (3.6) с учетом (3.5) преобразуем к виду

$$\lambda^{2i\beta} + (a_{11}^-)^{-1} a_{21}^- + O(\lambda^2) = 0, \quad \lambda \rightarrow 0$$

Отсюда находим явные приближенные значения  $\lambda$

$$\lambda_k = 4 \exp \left\{ - \frac{1}{2\beta} \operatorname{arctg} \frac{2\beta}{1-\beta^2} - \frac{\pi(k+1/2)}{\beta} \right\}, \quad k=0, 1, \dots$$

Физическое решение соответствует только значению  $\lambda_0$  (при  $k=0$ ). При  $\gamma = 0,4854$  находим  $\lambda_0 = 0,01450$  и  $\lambda_* = 1 - b/a = 1 - (1 - \lambda_0^2)^{1/2} = 1,0517 \cdot 10^{-4}$ , что совпадает с полученным ранее результатом [5].

Ниже приведены значения  $\lambda_0$  и  $\lambda_*$  для некоторых значений  $\gamma$

$\gamma$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\lambda_0$	$3,079 \cdot 10^{-11}$	$7,664 \cdot 10^{-6}$	$5,143 \cdot 10^{-4}$	$4,451 \cdot 10^{-3}$	$1,712 \cdot 10^{-2}$
$\lambda_*$	$4,740 \cdot 10^{-22}$	$2,937 \cdot 10^{-11}$	$1,322 \cdot 10^{-7}$	$9,906 \cdot 10^{-6}$	$1,465 \cdot 10^{-4}$

Решение уравнения (3.1) вследствие (3.2) и (3.4) имеет вид

$$\varphi(x) = - \sum_{j=1}^{\infty} \left[ A_j^- E_j \left( \frac{x}{\lambda} \right)^{s_j-3} + G_j \Psi^-(s_j) \left( \frac{x}{\lambda} \right)^{-s_j-1} \right], \quad \lambda < x < 1$$

$$G_{2m} = \frac{\Gamma(m - i\beta/2)\Gamma(m + 1/2 - i\beta/2)}{\pi(1 - \gamma^2)\Gamma(m)\Gamma(m - i\beta)}, \quad G_{2m-1} = \overline{G_{2m}}$$

$$E_{2m} = (m - 1/2 - i\beta/2) [\pi(1 - \gamma^2)^2 G_{2m}]^{-1}, \quad E_{2m-1} = \overline{E_{2m}}$$

При  $\tau_0 \neq 0$  задача сводится [6] к двум отдельно решаемым уравнениям, отличающимся только правой частью от (3.1), т.е. и для этого случая применима изложенная методика.

**4. Выводы.** 1°. Эффект трения в задачах о межфазной трещине значительно ниже, чем в задачах о штампе: при уменьшении коэффициента трения от 1 до 0,1 при соответствующих значениях параметров длина зоны проскальзывания для задачи Фламана о полубесконечном штампе при наличии сухого трения и сцепления [1] увеличивается более чем в 700 раз, а для соответствующей задачи о полубесконечной трещине длина этого участка уменьшается в 1,15 раза.

Существует достаточно широкий диапазон реальных значений параметров задачи, когда при изменении коэффициента трения  $\mu$  от 0 до 0,5 напряжения и скачки смещений на границе раздела меняются всего на несколько процентов (исключение составляют касательные напряжения в области проскальзывания). Этот факт делает возможным применение приближенного подхода при рассмотрении класса контактных задач о межфазных трещинах при наличии трения.

2°. В задаче о вдавливании штампа в полуплоскость при наличии зон сцепления  $(-b, b)$  и проскальзывания  $(-a, -b), (b, a)$ , если  $\mu \rightarrow 0$ , то  $\lambda = b/a \rightarrow 0$ , т.е. область сцепления при стремлении коэффициента трения к нулю стягивается в точку [18, 1]. Таким образом, при  $\mu \rightarrow 0$  задача Галина переходит в задачу о гладком штампе (происходит вырождение граничных условий), а ее решение – в решение Садовского [19]. С другой стороны при  $\mu = 0$  и требовании  $\lambda > 0$  имеем задачу Фальковича [20]. Однако сцепление в [20] имеет место почти на всей площадке контакта: при  $\nu = 0,3$   $b = 0,997a$ . Это обстоятельство объясняется выбором [20] корня соответствующего уравнения для определения аксессуарного параметра  $\lambda^0$ , входящего в дифференциальное уравнение, к которому сводится задача: вместо значения  $\lambda_0 = 0$ , приводящего к решению Садовского, был взят корень  $\lambda_2$ . При таком выборе область контакта состоит из срединного участка сцепления и двух малых концевых участков проскальзывания, причем возникает некорректная ситуация: касательные напряжения на участке  $(0, b)$  знакопостоянны, а вот нормальные напряжения меняют знак.

В задаче о межфазной трещине при  $\mu \rightarrow 0$  не происходит вырождения граничных условий задачи: по-прежнему сохраняется область отрыва и зоны проскальзывания, а соответствующее решение корректно. Выбор же другого (следующего) корня соответствующего трансцендентного уравнения приводит также, как и в задаче о штампе, к нефизичному решению.

Автор благодарит рецензента за замечания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Антипов Ю.А., Арутюнян Н.Х. Контактные задачи теории упругости при наличии трения и сцепления // ПММ. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 1005–1017.
2. Comninou M. The interface crack // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1977. V. 44. № 4. P. 631–636.
3. England A.H. A crack between dissimilar media // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1965. V. 32. № 2. P. 400–402.
4. Comninou M. The interface crack in a shear field // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1978. V. 45. № 2. P. 287–290.
5. Gautesen A.K., Dundurs J. The interface crack in a tension field // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1987. V. 54. № 1. P. 93–98.

6. *Gautesen A.K., Dundurs J.* The interface crack under combined loading // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1988. V. 55. № 3. P. 580–586.
7. *Симонов И.В.* Трещина на границе раздела в однородном поле напряжений // Механика композит. материалов. 1985. № 6. С. 969–976.
8. *Dundurs J., Gautesen A.K.* An opportunistic analysis of the interface crack // Intern. J. Fract. 1988. V. 36. № 2. P. 151–159.
9. *Simonov I.V.* An interface crack in an inhomogeneous stress field // Intern. J. Fract. 1990. V. 46. № 3. P. 223–235.
10. *Comninou M.* The interface crack with friction in the contact zone // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1977. V. 44. № 4. P. 780–781.
11. *Дундурс Дж., Комниноу М.* Обзор и перспектива исследования межфазной трещины // Механика композит. материалов. 1979. № 3. С. 387–396.
12. *Atkinson C.* The interface crack with a contact zone (an analytical treatment) // Intern. J. Fract. 1982. V. 18. P. 161–177.
13. *Shield R.T.* Uniqueness for elastic crack and punch problems // Trans. ASME. Ser. J. Appl. Mech. 1982. V. 49. № 3. P. 516–518.
14. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.
15. *Симонов И.В.* Об установившемся движении трещины с участками проскальзывания и отрыва по границе раздела двух упругих материалов // ПММ. 1984. Т. 48. Вып. 3. С. 482–489.
16. *Comninou M., Schmueser D.* The interface crack in a combined tension-compression and shear field // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1979. V. 46. № 2. P. 345–348.
17. *Антипов Ю.А.* Точное решение задачи о вдавливании кольцевого штампа в полупространство // Докл. АН УССР. Сер. А. 1987. № 7. С. 29–33.
18. *Галин Л.А.* Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 5. С. 413–424.
19. *Sadowsky M.* Zweidimensionale probleme der elastizitatstheorie // ZS. f. angew. Math. u. Mech. (ZAMM). 1928. Bd. 8. S. 107–121.
20. *Фалькович С.В.* О давлении жесткого штампа на упругую полуплоскость при наличии участков сцепления и скольжения // ПММ. 1945. Т. 9. Вып. 5. С. 425–432.

Одесса

Поступила в редакцию  
11.IV. 1994