УДК 539.3+536.7

© 1995 г. В.Л. Колпащиков, , А.И. Шнип

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ КОНСТИТУТИВНЫХ УРАВНЕНИЙ В ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ: НОВЫЕ ВЗАИМОСВЯЗИ ПЕРЕКРЕСТНЫХ ЭФФЕКТОВ

Для модифицированной модели термовязкоупругих сред Чена – Гертина получены следствия из второго начала термодинамики, налагающие ограничения на полный набор релаксационных функций, описывающих как главные, так и перекрестные эффекты. В одномерном случае данные функции образуют (3×3)-матрицу и указанные ограничения сводятся к требованию неотрицательной определенности (6×6)-матрицы, построенной из преобразований Фурье от симметричной и антисимметричной частей этой матрицы. Из установленных ограничений вытекает требование симметричности матрицы мгновенных откликов. Проведено сравнение полученных ограничений релаксационных функций с уже известными.

На основе неравновесной феноменологической термодинамики сложных систем [1–7] авторами [8, 9] был предложен эффективный метод исследования свойств релаксационных функций сред с памятью, вытекающих из второго начала термодинамики. Этот метод был обобщен [10][1] на случай полного набора релаксационных функций, включающего функции, описывающие как главные, так и перекрестные эффекты. Ниже получены дополнительные термодинамические ограничения релаксационных функций, обусловливающие новые взаимосвязи перекрестных эффектов и содержащие указанные выше свойства как частный случай.

Исследуется предложенная авторами модификация модели термовязкоупругих сред, разработанной Ченом и Гертиным в их общей термодинамической теории материалов с памятью, включающей эффекты второго звука [11]. Эта интересная модель, несомненно, весьма перспективна с точки зрения возможности наиболее адекватного описания реальных сред. Рассматриваемая модификация модели, заключающаяся в специальном выборе независимых переменных и введении соответствующего термодинамического потенциала, используется потому, что позволяет построить термодинамически непротиворечивую линейную теорию [12], а также дает более компактное представление результатов. Для простоты рассматривается одномерная модель.

1. Обозначения и основные положения модифицированной теории Чена – Гертина. Пусть $\mathbf{R}$ – множество вещественных чисел, $\mathbf{R}^+$ – множество вещественных положительных чисел. Для любой функции g: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ введем суммарную функцию $\bar{g}$: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ как

$$\bar{g}(s) = \int_0^s g(\lambda)d\lambda \tag{1.1}$$

[1] См. также: *Колпащиков В.Л., Шнип А.И.* Термодинамика и модели неклассических сред: Препринт № 9. Минск: ИТМО АН БССР, 1986. 24 с.

Каждая функция времени f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ и фиксированный момент t определяют историю f до момента t f^t: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ следующим образом:

$$f^t(s) = f(t-s) \tag{1.2}$$

и суммарную историю f до момента t $\overline{f^t}$: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ согласно (1.1). Обозначим через H гильбертово пространство измеримых функций f: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ с конечной нормой $\|\cdot\|$, определяемой как

$$\|f\| = \int_0^\infty |f(s)|^2 h(s)ds \tag{1.3}$$

где h: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ – непрерывная монотонно убывающая функция влияния, такая, что

$$\int_0^\infty h(s)sds < \infty$$

Условимся обозначать $\tilde{\mathbf{H}} = \{\bar{f} \in \mathbf{H} \mid f \in \mathbf{H}\}$, $\mathbf{H}^+ = \{f \in \mathbf{H} \mid f > 0\}$. Для рассматриваемой здесь одномерной модели тройку функций времени, заданных в некоторой точке среды $\{F(t) > 0,\ \vartheta(t) > 0,\ G(t)\}$, где F – градиент деформации, $\vartheta = 1/T$ – обратная абсолютная температура, а $G = \partial\vartheta/\partial x$ – ее градиент, будем называть допустимым процессом в этой точке, если F и ϑ непрерывны и кусочно-гладки, G кусочно-непрерывна и все три функции ограничены. Каждый допустимый процесс для любого фиксированного момента времени t определяет допустимое состояние рассматриваемой среды

$$\Lambda^t = \{F(t),\ \vartheta(t),\ F^t,\ \vartheta^t,\ \overline{G^t}\} \tag{1.4}$$

где, как можно убедиться, $F(t) \in R^+$, $\vartheta(t) \in R^+$, $F^t \in H^+$, $\vartheta^t \in \mathbf{H}^+$, $\overline{G^t} \in \tilde{\mathbf{H}}$. Соответственно этому множество $S = \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{H}^+ \times \tilde{\mathbf{H}}$ будем называть пространством состояний.

Для полного описания среды необходимы помимо законов сохранения импульса и энергии следующие конститутивные уравнения, задаваемые в каждой точке среды четырьмя функциями (функционалами) состояния:

$$S(t) = \hat{S}(\Lambda^t),\quad e(t) = \hat{e}(\Lambda^t),\quad q(t) = \hat{q}(\Lambda^t),\quad \eta(t) = \hat{\eta}(\Lambda^t) \tag{1.5}$$

где S – напряжение Пиолы – Кирхгофа, e – удельная внутренняя энергия, q – тепловой поток, η – удельная энтропия. Знаками "$\wedge$" над символами обозначены соответствующие конститутивные функционалы состояния. Для дальнейшего удобно ввести следующий термодинамический потенциал:

$$\Phi = e\vartheta - \eta \tag{1.6}$$

для которого с помощью (1.5), (1.6) можно построить конститутивное уравнение такого же типа

$$\Phi(t) = \hat{\Phi}(\Lambda^t) \tag{1.7}$$

Набор из семи функций времени, заданных в некоторой точке

$$\{F(t), \vartheta(t), G(t);\ S(t), e(t), q(t), \Phi(t)\}$$

где первые три функции – допустимый процесс, а остальные определяются через этот допустимый процесс с помощью (1.5), (1.7), будем называть термодинамическим процессом в этой точке.

Функционалы в (1.5), (1.7) предполагаются непрерывными и дифференцируемыми, а функционал $\hat{\Phi}$ – дважды дифференцируемым на множестве S. Следовательно, существуют частные производные

$$\partial_F \hat{P}(\Lambda^t) = \frac{\partial}{\partial F}\hat{P}(\Lambda^t), \quad \partial_\vartheta \hat{P}(\Lambda^t) = \frac{\partial}{\partial \vartheta}\hat{P}(\Lambda^t) \tag{1.8}$$

и частные производные Фреше

$$\begin{aligned}
&\delta_1\hat{P}(\Lambda^t)(f) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\hat{P}(F,\vartheta,F^t+\lambda f,\vartheta^t,\ \overline{G^t})\Big|_{\lambda=0}\\
&\delta_2\hat{P}(\Lambda^t)(l) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\hat{P}(F,\vartheta,F^t,\vartheta^t+\lambda l,\ \overline{G^t})\Big|_{\lambda=0}\\
&\delta_3\hat{P}(\Lambda^t)(g) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\hat{P}(F,\vartheta,F^t,\vartheta^t,\overline{G^t}+\lambda g)\Big|_{\lambda=0}
\end{aligned} \tag{1.9}$$

где $f,\ l,\ g \in \mathbf{H}$, $\delta_m\hat{P}(\Lambda^t)\colon \mathbf{H}\xrightarrow{L}\mathbf{R}$, $m = 1, 2, 3$, а под $\hat{P}$ можно понимать любой из функционалов $\hat{S},\hat{e},\hat{q},\hat{\eta},\hat{\Phi}$. Для функционала $\hat{\Phi}$ существуют также соответствующие производные второго порядка, например

$$\delta^2_{ij}\hat{\Phi}(\Lambda^t)(f,g) \tag{1.10}$$

где $f,\ g \in \mathbf{H}$, $\delta^2_{ij}\hat{\Phi}(\Lambda^t)\colon \mathbf{H}\times\mathbf{H}\xrightarrow{L}\mathbf{R}$, $i, j = 1, 2, 3$.

Для удобства записи в дальнейшем введем трехмерное эвклидово пространство $\mathbf{R}^3$ элементов вида $a = \{a_1, a_2, a_3\}$, где $a_1, a_2, a_3 \in R$, а также гильбертово пространство $\mathbf{H}^3$ векторнозначных функций $\Gamma\colon \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^3$ вида $\Gamma = \{f_1, f_2, f_3\}$, где $f_1, f_2, f_3 \in \mathbf{H}$. Скалярное произведение и норма в пространствах $\mathbf{R}^3$ и $\mathbf{H}^3$ задаются обычным образом:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3, \quad \|\Gamma\| = (\|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 + \|f_3\|^2)^{1/2} \tag{1.11}$$

Пользуясь этими обозначениями, можно ввести полную производную Фреше

$$\begin{aligned}
&\delta\hat{P}(\Lambda^t)(\Gamma) = \delta\hat{P}(\Lambda^t)(\{f_1,f_2,f_3\}) =\\
&= \delta_1\hat{P}(\Delta^t)(f_1) + \delta_2\hat{P}(\Lambda^t)(f_2) + \delta_3\hat{P}(\Lambda^t)(f_3),\\
&\Gamma = \{f_1,f_2,f_3\} \in H_3
\end{aligned}$$

2. Второе начало термодинамики. Первые три конститутивные уравнения в (1.5) совместно с уравнениями баланса импульса и энергии образуют замкнутую систему уравнений, позволяющую описывать термодинамические процессы в рассматриваемых средах, если заданы соответствующие краевые условия, а также объемные силы и источники тепла. Результатом решения этой системы могут быть любые допустимые процессы для произвольно выбранной точки среды, так как объемные силы и источники тепла произвольны. Для исключения термодинамически недопустимых процессов термодинамический принцип должен некоторым бразом ограничить класс конститутивных уравнений.

В рассматриваемой теории второе начало термодинамики формулируется на основе неравенства Клаузиуса – Дюгема, которое выражает требование положительности внутреннего производства энтропии σ при условии, что внешний массовый источник энтропии равен массовому источнику тепла r, деленному на абсолютную температуру

$(r/T = r\vartheta)$, а поток энтропии равен потоку тепла, деленному на абсолютную температуру $q\vartheta$:

$$\sigma \equiv \rho\dot{\eta} + \operatorname{div}(\mathbf{q}\vartheta) - \rho r\vartheta \geqslant 0 \tag{2.1}$$

где ρ – плотность среды, а точка над символом здесь и ниже означает полную производную по времени.

Принимая во внимание уравнение баланса энергии

$$\rho\dot{e} = -\operatorname{div}\mathbf{q} + \rho\mathbf{S}\cdot\dot{\mathbf{F}} + \rho r \tag{2.2}$$

и учитывая (1.6), неравенство (2.1) в одномерном случае приводим к виду

$$-\dot{\Phi} + e\dot{\vartheta} + \vartheta S\dot{F} + \frac{1}{\rho}qG \geqslant 0 \tag{2.3}$$

Второе начало термодинамики формулируется в виде следующего постулата.

Постулат TD. Для всех термодинамических процессов выполняется неравенство (2.3).

Необходимые и достаточные условия для выполнимости этого постулата дает следующая теорема, являющаяся аналогом соответствующей теоремы в [11].

Теорема CG. Постулат *TD* выполняется тогда и только тогда, когда конститутивные уравнения удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\hat{S}(\Lambda^t) = \frac{1}{\vartheta(t)}\partial_F\hat{\Phi}(\Lambda^t), \quad \hat{e}(\Lambda^t) = \partial_\vartheta\hat{\Phi}(\Lambda^t) \tag{2.4}$$

$$\hat{q}(\Lambda^t) = \rho\delta_3\hat{\Phi}(\Lambda^t)(1^+), \quad \delta\hat{\Phi}(\Lambda^t)(\{\dot{\vartheta}^t, \dot{F}^t, -G^t\}) \leqslant 0$$

Здесь $1^+ \in \mathbf{H}$ – постоянная функция, равная единице на всем $\mathbf{R}^+$.

Определим теперь равновесное состояние Λ_0 как состояние следующего вида:

$$\Lambda_0 = \{F, \vartheta, F^+, \vartheta^+, 0^+\} \tag{2.5}$$

где F^+, ϑ^+, 0^+ – постоянные функции из пространств $\mathbf{H}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$, равные соответственно F, ϑ, 0 на всем множестве $\mathbf{R}^+$.

Целью дальнейших исследований будет получить термодинамические ограничения, касающиеся линейных частей первых трех конститутивных функционалов в (1.5), которые входят в уравнения переноса импульса и энергии и определяются первыми производными Фреше. Вводя релаксационные функции, с помощью леммы Рисса о представлении линейных функционалов в гильбертовом пространстве, линейные части указанных функционалов можно представить в интегральном виде

$$\delta_m\hat{\psi}_n(\Lambda_0)(f) = \int_0^\infty R'_{mn}(s)f(s)ds, \quad R_{mn}(\infty) = 0; \quad m,n = 1,2,3 \tag{2.6}$$

$$\hat{\psi}_1 = \vartheta\hat{S}, \quad \hat{\psi}_2 = \hat{e}, \quad \hat{\psi}_3 = -\hat{q}/\rho$$

Штрих означает производную, а операторы δ_m определены в (1.9).

Здесь введено девять релаксационных функций, которые являются аналогами феноменологических коэффициентов переноса в классической теории. Каждая из них называется по имени термодинамической величины, релаксацию которой она описывается, и независимой переменной, изменение которой ответственно за релаксационный процесс. Например: R_{11} – функция релаксации напряжений по деформации, R_{32} – функция релаксации теплового потока по температуре и т.д.

3. Термодинамика и свойства релаксационных функций. Последующее исследование свойств релаксационных функций базируется на лемме, которая является следствием теоремы CG. Здесь опущено доказательство этой леммы, основанное на разложении левой части неравенства из (2.4) в функциональный ряд Тейлора, так как оно принципиально не отличается от доказательства аналогичных результатов в 8, 9].

Лемма. Если постулат TD выполняется, то функционал $\hat{\Phi}$ обладает следующим свойством: для любого равновесного состояния Λ_0 и любого ограниченного $\Gamma = \{f_1, f_2, f_3\} \in \mathbf{H}^3$, такого, что

$$\Gamma' = \left\{ \frac{df_1}{ds}, \frac{df_2}{ds}, \frac{df_3}{ds} \right\} \in H$$

выполняется неравенство

$$\partial_F \delta\hat{\Phi}(\Lambda_0)(\Gamma') f_1(0) + \partial_\theta \delta\hat{\Phi}(\Lambda_0)(\Gamma') f_2(0) -$$

$$-\delta_1 \delta\hat{\Phi}(\Lambda_0)(\Gamma', 1^+) f_3(0) + \delta^2\hat{\Phi}(\Lambda_0)(\Gamma', \Gamma) \geqslant 0 \tag{3.1}$$

Так как дифференциальные операторы ∂ и δ коммутируют друг с другом, то можно воспользоваться первыми тремя соотношениями (2.4) и выразить в (3.1) $\partial_F\hat{\Phi}$, $\partial_\theta\hat{\Phi}$ и $\delta_3\hat{\Phi}$ через $\hat{S}$, $\hat{\eta}$ и $\hat{q}$.

Если, кроме того, ввести следующий векторнозначный функционал $\hat{\Psi}$ на пространстве S:

$$\hat{\Psi}(\Lambda^t) \equiv \{\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2, \hat{\psi}_3\} = \left\{ \vartheta\hat{S}(\Lambda^t),\ \hat{e}(\Lambda^t),\ -\frac{1}{\rho}\hat{q}(\Lambda^t) \right\} \tag{3.2}$$

то неравенство (3.1) сведется к виду

$$\delta\hat{\Psi}(\Lambda_0)(\Gamma')\Gamma(0) + \delta^2\hat{\Phi}(\Lambda_0)(\Gamma', \Gamma) \geqslant 0 \tag{3.3}$$

Рассмотрим два конкретных выбора элементов Γ из множества H^3, удовлетворяющих условию леммы:

$$\Gamma_1 = \mathbf{a}C_\omega(s) + \mathbf{b}S_\omega(s) \tag{3.4}$$

$$\Gamma_2 = \mathbf{a}S_\omega(s) + \mathbf{b}C_\omega(s) \tag{3.5}$$

где

$$\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\} \in \mathbf{R}^3,\quad \mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\} \in \mathbf{R}^3$$

$$S_\omega(s) = \sin(\omega s) \in \mathbf{H},\quad C_\omega(s) = \cos(\omega s) \in \mathbf{H},\quad \omega \in \mathbf{R}^+$$

Подставляя поочередно (3.4) и (3.5) в неравенство (3.3), получим

$$\delta\hat{\Psi}(\Lambda_0)(-\omega\mathbf{a}S_\omega + \omega\mathbf{b}C_\omega)\mathbf{a} + \delta^2\hat{\Phi}(\Lambda_0)(-\omega\mathbf{a}S_\omega + \omega\mathbf{b}C_\omega,\ \mathbf{a}C_\omega + \mathbf{b}S_\omega) \geqslant 0 \tag{3.6}$$

$$-\delta\hat{\Psi}(\Lambda_0)(\omega\mathbf{a}C_\omega + \omega\mathbf{b}S_\omega)\cdot\mathbf{b} + \delta^2\hat{\Phi}(\Lambda_0)(\omega\mathbf{a}C_\omega + \omega\mathbf{b}S_\omega,\ \mathbf{a}S_\omega - \mathbf{b}C_\omega) \geqslant 0 \tag{3.7}$$

Принимая во внимание, что производная Фреше второго порядка при фиксированном состоянии Λ_0 представляет собой билинейный симметричный на множестве $\mathbf{H}^3 \times \mathbf{H}^3$ функционал (т.е. такой, что $\delta^2\hat{\Phi}(\Lambda_0)(\Gamma_1, \Gamma_2) = \delta^2\hat{\Phi}(\Lambda_0)(\Gamma_2, \Gamma_2)$), можно показать, что члены с $\delta^2\hat{\Phi}$, входящие в неравенства (3.6), (3.7), равны друг другу с противоположными знаками. Поэтому при сложении этих неравенств они взаимно уничтожаются и в результате получаем

$$\delta\hat{\Psi}(\Lambda_0)(\omega\mathbf{a}S_\omega - \omega\mathbf{b}S_\omega)\cdot\mathbf{a} + \delta\hat{\Psi}(\Lambda_0)(\omega\mathbf{a}C_\omega + \omega\mathbf{b}S_\omega)\cdot\mathbf{b} \leqslant 0 \tag{3.8}$$

Представляя функционал $\hat{\Psi}$ через релаксационные функции (2.6) и переходя к подробной записи, перепишем неравенство (3.8), разделив его на $\omega > 0$, в виде

$$\sum_{n=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} a_n a_m \int_0^\infty R'_{nm}(s)\sin(\omega s)ds - \sum_{n=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} a_n b_m \int_0^\infty R'_{nm}(s)\cos(\omega s)ds +$$

$$+\sum_{n=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} b_n a_m \int_0^\infty R'_{nm}(s)\cos(\omega s)ds + \sum_{n=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} b_n b_m \int_0^\infty R'_{nm}(s)\sin(\omega s)ds \leqslant 0 \qquad (3.9)$$

Введем обозначения для антисимметричной $\| R^-_{nm}\|$ и симметричной $\| R^+_{nm}\|$ частей матрицы $\| R_{nm}\|$:

$$R^-_{nm} = \frac{1}{2}(R_{nm} - R_{mn}),\quad R^+_{nm} = \frac{1}{2}(R_{nm} + R_{mn}),\quad n,m = 1,2,3 \qquad (3.10)$$

и для косинус- и синус-преобразований Фурье функции $R(s)$:

$$R|_c(\omega) = \int_0^\infty R(s)\cos(\omega s)ds,\quad R|_s(\omega) = \int_0^\infty R(s)\sin(\omega s)ds \qquad (3.11)$$

С использованием этих обозначений неравенство (3.9) перепишем так:

$$\sum_{n=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} R^{+'}_{nm}\Big|_s(\omega)a_n a_m + 2\sum_{n=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} R^{-'}_{nm}\Big|_c(\omega)b_n a_m +$$

$$+\sum_{n=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} R^{+'}_{nm}\Big|_s(\omega)b_n b_m \leqslant 0 \qquad (3.12)$$

Введем новую (6×6)-матрицу $\| r_{nm}\|$ следующим образом:

$$r_{nm}(\omega) = -R^{+'}_{nm}\Big|_s(\omega) \text{ для } n,\ m = 1, 2, 3$$

$$r_{nm}(\omega) = -R^{+'}_{n-3,m-3}\Big|_s(\omega) \text{ для } n,\ m = 4, 5, 6 \qquad (3.13)$$

$$r_{nm}(\omega) = -R^{-'}_{nm-3}\Big|_c(\omega) \text{ для } n = 1, 2, 3;\ m = 4, 5, 6$$

$$r_{nm}(\omega) = -R^{-'}_{m,n-3}\Big|_c(\omega) \text{ для } n = 4, 5, 6;\ m = 1, 2, 3$$

Эту симметричную матрицу можно наглядно представить в виде следующей клеточной матрицы:

$$\| r_{nm}(\omega)\| = \left\| \begin{array}{c|c} \left\| R^{+'}_{nm}\Big|_s(\omega)\right\| & \left\| R^{-'}_{nm}\Big|_c(\omega)\right\| \\ \hline \left\| R^{-'}_{mn}\Big|_c(\omega)\right\| & \left\| R^{+'}_{nm}\Big|_s(\omega)\right\| \end{array} \right\| \qquad (3.14)$$

Если ввести кроме того, шестимерный вектор

$$\tilde{a}_k = \begin{cases} a_k & \text{для } k = 1,2,3 \\ b_{k-3} & \text{для } k = 4,5,6 \end{cases} \qquad (3.15)$$

то неравенство (3.12) с помощью введенных терминов перепишется в виде следующей квадратичной формы:

$$\sum_{n=1}^{6}\sum_{m=1}^{6} r_{nm}(\omega)\tilde{a}_n\tilde{a}_m \geqslant 0 \qquad (3.16)$$

для любых $\tilde{a}_n$ ($n = 1, 2, \ldots, 6$) и $\omega \geqslant 0$.

Отсюда вытекает требование неотрицательной определенности матрицы (3.14). Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 1. Если выполняется постулат TD, то матрица $\| r_{nm}(\omega) \|$, построенная из релаксационных функций (2.6), согласно (3.10), (3.11), (3.14), должна быть неотрицательно определенной.

Необходимым и достаточным условием неотрицательной определенности этой матрицы является неотрицательная определенность всех ее главных миноров. Вообще говоря, (6×6)-матрица имеет 63 главных минора. Однако в данном случае матрица (3.14) содержит много повторяющихся членов, как видно из ее полной записи, которая получается из (3.14) интегрированием по частям ее элементов, содержащих синус-преобразование Фурье:

$$\left\| \begin{matrix} \omega R_{11}^{+}\big|_c & \omega R_{12}^{+}\big|_c & \omega R_{13}^{+}\big|_c & 0 & R_{12}^{-'}\big|_c & R_{13}^{-'}\big|_c \\ \omega R_{12}^{+}\big|_c & \omega R_{22}^{+}\big|_c & \omega R_{23}^{+}\big|_c & R_{12}^{-'}\big|_c & 0 & R_{23}^{-'}\big|_c \\ \omega R_{13}^{+}\big|_c & \omega R_{23}^{+}\big|_c & \omega R_{33}^{+}\big|_c & -R_{13}^{-'}\big|_c & -R_{23}^{-'}\big|_c & 0 \\ 0 & -R_{12}^{-'}\big|_c & -R_{13}^{-'}\big|_c & \omega R_{11}^{+}\big|_c & \omega R_{12}^{+}\big|_c & \omega R_{13}^{+}\big|_c \\ R_{12}^{-'}\big|_c & 0 & -R_{23}^{-'}\big|_c & \omega R_{12}^{+}\big|_c & \omega R_{22}^{+}\big|_c & \omega R_{23}^{+}\big|_c \\ R_{13}^{-'}\big|_c & R_{23}^{-'}\big|_c & 0 & \omega R_{13}^{+}\big|_c & \omega R_{23}^{+}\big|_c & \omega R_{33}^{+}\big|_c \end{matrix} \right\| \qquad (3.17)$$

Поэтому среди всех главных миноров этой матрицы различных будет только 32 и, следовательно, упомянутое выше требование ее неотрицательной определенности даст 32 неравенства, накладывающих ограничения на матрицу релаксационных функций. Первые 7 из этих неравенств, представляющих миноры, составленные из элементов верхней левой четверти матрицы (3.17), содержат только симметричную часть матрицы релаксационных функций $\| R_{ij} \|$ и совпадают с неравенствами, полученными в [10]. Остальные 25 являются новыми и налагают ограничения также и на антисимметричную часть этой матрицы и тем самым обусловливают новые взаимосвязи перекрестных эффектов.

Из этих новых ограничений вытекает интересное следствие, для формулировки которого введем следующее определение.

Будем называть матрицу $\| R_{ij}(0) \|$ $(i, j = 1, 2, 3)$ матрицей мгновенных откликов. Эта матрица описывает разность между откликом системы на мгновенное (скачкообразное) изменение независимых переменных и ее откликом на квазистационарное изменение этих переменных такой же величины.

Следствие. Матрица мгновенных откликов симметрична, т.е.

$$R_{ij}(0) = R_{ji}(0), \quad i, j = 1, 2, 3; \;\; i < j \qquad (3.18)$$

Для доказательства следствия запишем неравенства, содержащие условия неотрицательной определенности трех главных миноров второго порядка матрицы (3.17), составленных из элементов строк и столбцов с номерами соответственно 1 и 5, 1 и 6, 2 и 6, сведя в них с помощью интегрирования но частям члены, содержащие антисимметричную часть матрицы $\| R_{ij} \|$, к синус-преобразованию Фурье:

$$\omega^2 R_{ii}^{+}\big|_c(\omega) R_{jj}^{+}\big|_c(\omega) - \left[R_{ij}^{-}(0) + \omega R_{ij}^{-}\big|_s(\omega) \right]^2 \geqslant 0$$

$$i, j = 1, 2, 3; \;\; i < j \qquad (3.19)$$

Устремляя в неравенствах (3.19) ω к нулю, в силу интегрируемости релаксационных функций получим

$$-(R_{ij}^{-}(0))^2 \geqslant 0, \quad i, j = 1, 2, 3; \;\; i < j$$

Отсюда вытекает, что

$$R^{-}_{ij}(0) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3; \;\; i < j$$

При учете обозначений (3.10) это эквивалентно доказываемому утверждению (3.18).

Здесь явно просматривается аналогия с соотношениями взаимности Онзагера. Однако в отличие от обычной феноменологической термодинамики необратимых процессов [13] эти свойства здесь являются следствием принципа необратимости (положительности производства энтропии) и не требуют дополнительного специального постулата. В то же время следует иметь в виду, что величины, входящие в (3.18), отличаются по физическому смыслу от феноменологических коэффициентов Онзагера.

4. Сравнение с известными результатами. Представляет интерес сравнить полученные здесь ограничения релаксационных функций с другими известными результатами, например со свойствами функции релаксации напряжений по деформации $\mathbf{G}$ описанными в [2, гл. 6]. Для этого удобно представить ограничения (3.16) в несколько иной форме. Помимо вещественного эвклидова пространства $\mathbf{R}^3$ введем комплексное трехмерное эвклидово пространство $\mathbf{C}^3$, а также пространство линейных преобразований $\mathbf{R}^3$ в себя $\mathbf{L}(\mathbf{R}^3)$ (вещественных матриц) и пространство линейных преобразований $\mathbf{C}^3$ в себя $\mathbf{L}(\mathbf{C}^3)$ (комплексных матриц). Тогда матрицу релаксационных функций $\| R_{nm} \|$ можно рассматривать как функцию из множества $\mathbf{R}^+$ в пространство $\mathbf{L}(\mathbf{R}^3)$, которую будем обозначать $\mathbb{R}$. Введем новую матричную функцию $\tilde{\mathbb{R}}$, определенную на всем множестве $\mathbf{R}$ через функцию $\mathbb{R}$ следующим образом:

$$\tilde{\mathbb{R}}(s) = \begin{cases} \mathbb{R}(s), & s \geq 0 \\ \mathbb{R}^t(-s), & s < 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

Преобразование Фурье от этой функции $\tilde{\mathbb{R}}|_F : \mathbf{R} \to \mathbf{L}(\mathbf{C}^3)$ определяется как

$$\tilde{\mathbb{R}}|_F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\mathbb{R}}(s) e^{-i\omega s} ds \tag{4.2}$$

В неравенстве (3.12) интегрированием по частям можно свести фурье-преобразования производных от функции R_{nm} к фурье-преобразованиям самих функций. С помощью введенных матричных обозначений и при учете (3.10) преобразованное таким образом неравенство (3.12) или эквивалентное ему (3.9) запишется в виде

$$\omega \mathbf{a} \cdot \mathbb{R}|_c(\omega)\mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \left(\mathbb{R}|_s(\omega)\omega - \mathbb{R}^T|_s(\omega)\omega + R(0) - \mathbb{R}^T(0)\right) \cdot \mathbf{a} + \omega \mathbf{b} \mathbb{R}|_c(\omega) \cdot \mathbf{b} \geq 0 \tag{4.3}$$

Так как согласно следствию теоремы 1 $\mathbb{R}^T(0) = \mathbb{R}(0)$ и по предположению $\omega \geq 0$, то отсюда нетрудно вывести следующий результат.

Утверждение 1. Ограничения релаксационных функций, сформулированные в теореме 1, выполняются тогда и только тогда, когда матричная функция $\tilde{\mathbb{R}}$ удовлетворяет ограничениям

$$\tilde{\mathbb{R}}(0) = \tilde{\mathbb{R}}^T(0), \quad \mathbf{c}^* \tilde{\mathbb{R}}|_F(\omega)\mathbf{c} \geq 0 \tag{4.4}$$

для всех $\mathbf{c} \in \mathbf{C}^3$ и $\omega \in \mathbf{R}$ (звездочка означает комплексное сопряжение).

Эквивалентность (4.4) с (4.3) легко установить, положив $\mathbf{c} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ и разделив действительную и мнимую часть во втором соотношении (4.4).

В то же время, согласно теореме Бохнера, обобщенной на случай матричных функций[2], второе соотношение в (4.4) эквивалентно следующему условию:

$$\int_0^T\int_0^t \Gamma(t)\cdot \mathbb{R}(t-s)\Gamma(s)dsdt \geqslant 0 \tag{4.5}$$

для любых локально квадратично интегрируемых Γ: $\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^3$ и $T > 0$.

Это условие эквивалентно так называемому условию диссипативности функции $\mathbb{R}(s)$ которое рассматривалось [2] для функции $\mathbf{G}(s)$. Заметим, однако, что функции релаксации введены здесь несколько по-иному, поскольку предполагалось, что $R_{nm}(\infty) = 0$. Например, введенная здесь функция релаксации напряжений по деформации $R_{11}(s)$ соответствует функции $\mathbf{G}(s) - \mathbf{G}(\infty)$ из гл. 6 книги [2], а величине $\mathbf{G}(\infty)$ соответствует значение $R^0_{11} - R_{11}(0)$, где $R^0_{11} = \partial_F\hat{\psi}_1(\Lambda_0)$. Можно также провести более широкую аналогию, сравнивая матричную функцию релаксации напряжений по деформации $\mathbf{G}(s)$, рассмотренную в [2], с матричной релаксационной функцией, представляющей все виды релаксации:

$$\overline{\mathbb{R}}(s) = \mathbb{R}^0 + \mathbb{R}(s) \tag{4.6}$$

Здесь

$$\overline{\mathbb{R}}^0 = \begin{Vmatrix} \partial_F\hat{\psi}_1(\Lambda_0) & \partial_F\hat{\psi}_2(\Lambda_0) & \partial_F\hat{\psi}_3(\Lambda_0) \\ \partial_\vartheta\hat{\psi}_1(\Lambda_0) & \partial_\vartheta\hat{\psi}_2(\Lambda_0) & \partial_\vartheta\hat{\psi}_3(\Lambda_0) \\ \delta_3\hat{\psi}_1(\Lambda_0)(1^+) & \delta_3\hat{\psi}_2(\Lambda_0)(1^+) & \delta_3\hat{\psi}_3(\Lambda_0)(1^+) \end{Vmatrix} \tag{4.7}$$

а функционалы $\hat{\psi}_n$ определены так же, как в (2.6).

Применяя операторы дифференцирования ∂_ϑ, ∂_F, $\delta^3(1^+)$ перекрестно к первым трем соотношениям (2.4), можно показать, что

$$\partial_F\hat{\psi}_2(\Lambda_0) = \partial_\vartheta\hat{\psi}_1(\Lambda_0), \quad \partial_F\hat{\psi}_3(\Lambda_0) = \delta_3\hat{\psi}_1(\Lambda_0)(1^+)$$

$$\partial_\vartheta\hat{\psi}_3(\Lambda_0) = \delta_3\hat{\psi}_2(\Lambda_0)(1^+)$$

т.е. матрица $\mathbb{R}^0$ симметрична.

Тогда, поскольку выполняются соотношения (3.18), симметрична также и матрица $\overline{\mathbb{R}}(0)$:

$$\overline{\mathbb{R}}(0) = \mathbb{R}^T(0) \tag{4.8}$$

Ограничения (4.8), (4.5) при учете равенства (4.6) эквивалентны условию "совместимости с термодинамикой" для функции $\mathbb{R}(s)$, сформулированному в утверждении 2б гл. 6 книги [2] для функции $\mathbf{G}(s)$. Заметим, что с помощью тех же аргументов, что и в [2], исходя из условия (4.5), можно доказать следующие свойства матричной функции $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}(0) - \mathbb{R}(s) \geqslant 0$$

а также

$$\mathbb{R}(0) \geqslant 0, \quad -\mathbb{R}'(0) \geqslant 0 \tag{4.9}$$

где все знаки неравенства следует понимать в смысле утверждения о неотрицательной определенности соответствующих матриц.

---

[2] Это обобщение можно найти, например, в работе: *Колпащиков В.Л., Шнип А.И.* Линейные термодинамические системы с памятью: необходимое и достаточное условие существования неравновесного термодинамического потенциала: Препринт № 37. Минск: ИТМО АН БССР, 1987. 41 с.

Свойства релаксационных функций типа (4.9) имеют важные применения при исследовании распространения волн, а также для доказательства теоремы о единственности решений системы линейных полевых уравнений связанной термовязкоупругости.

Подчеркнем, что в отличие от результатов из [2] эти утверждения относятся к полному набору релаксационных функций, описывающему все три типа релаксации, включая и перекрестные эффекты. Кроме того, они получены для нелинейных конститутивных функционалов, у которых релаксационные функции представляют их линейную часть.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь (Т20-359).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Truesdell C.* Rational. thermodynamics. N.Y.: McGraw-Hill. 1969. 208 p.
2. *Дэй У.А.* Термодинамика простых сред с памятью. М.: Мир, 1974. 190 с.
3. *Петров Н., Бранков И.* Современные проблемы термодинамики. М.: Мир, 1986. 285 с.
4. *Coleman B.D.* Thermodynamics of materials with memory // Arch. Rat. Mech. Anal. 1964. V. 17. № 1. P. 1–45.
5. *Gurtin M.E.* On the thermodynamics of materials with memory // Arch. Rat. Mech. Anal. 1968. V. 28. № 1. P. 40–50.
6. *Каменярж Я.А., Седов Л.И.* Макроскопическое введение энтропии при ослабленных предположениях об осуществимых процессах // ПММ. 1979. Т. 43. Вып. 1. С. 3–6.
7. *Ильшин А.А., Ильюшина Г.А.* Вопросы термодинамики необратимых процессов // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1983. № 3. С. 73–80.
8. *Kolpashchikov V.L., Schnipp A.I.* Constitutive heat-transfer equations for materials with memory // Int. J. Heat and Mass Trans. 1978. V. 21. № 2. P. 155–161.
9. *Kolpashchikov V.L., Schnipp A.I.* Thermodynamics and properties of relaxation functions of materials with memory // Int. J. Engng Sci. 1978. Vol. 16. № 8. P. 503–514.
10. *Колпащиков В.Л., Шнип А.И.* О перекрестных эффектах в термодинамической теории материалов с памятью // Теор. и прил. мех. 4-ти нац. конгр. Варна, 1981. Докл. Кн. 1. София. БАИ, 1981. С. 567–572.
11. *Chen P.J., Gurtin M.E.* On the second sound in the materials with memory // ZAMP. 1970. V. 21. № 2.
P. 232–241.
12. *Колпащиков В.Л., Шнип А.И.* О линейных определяющих уравнениях в теории теплопроводности с конечной скоростью распространения термических возмущений // Инж.-физ. журн. 1978. Т. 34. № 2. С. 358–362.
13. *Де Гроот С.Р., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1966. 456 с.

Минск

Поступила в редакцию
16.VI.1993