УДК 539.3

© 1995 г. В.Б. Васильев

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ О ВДАВЛИВАНИИ КЛИНОВИДНОГО ШТАМПА

Рассматривается интегральное уравнение, к которому сводится задача о действии клиновидного в плане штампа на упругое полупространство при отсутствии трения. При помощи многомерного аналога метода факторизации Винера–Хопфа получена явная формула для решения близкого к рассматриваемому (возмущенного) уравнения.

Для клиновидного в плане штампа был предложен [1] (см. также [2, 3]) метод решения соответствующего интегрального уравнения, основанный на разложении ядра в ряд и применении преобразования Меллина. Это же интегральное уравнение ниже рассматривается другим методом.

1. Постановка задачи. В случае статического контакта без трения клиновидного в плане штампа с упругим полупространством ([1], с. 118) задача сводится к решению следующего интегрального уравнения:

$$\iint\limits_{\Omega} k(x-\xi, y-\eta)q(\xi,\eta)d\xi d\eta = C_1 f(x,y), \quad (x,y)\in\Omega \tag{1.1}$$

где $f(x, y)$ – заданная в двумерной области $\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon y > a|x|, a > 0\}$ функция, $q(\xi, \eta)$ – неизвестная функция, C_1 определяется упругими постоянными полупространства, ядро интегрального уравнения (1.1) определяется посредством обратного преобразования Фурье

$$k(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{\mathbf{R}^2} (\xi^2+\eta^2)^{-1/2} e^{-i(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta$$

Здесь по сравнению с уравнением, выписанным в [1], введены для удобства несущественные изменения в определение области Ω. Для рассматриваемой области клиновидный штамп может быть только выпуклым, в то время как в [1] этого ограничения не содержится. Однако ниже будет показано, что в случае невыпуклого клина задача решается аналогичным методом.

Уравнение (1.1), вообще говоря, принадлежит классу так называемых псевдодифференциальных уравнений [4]. Конечно, его можно рассматривать и с точки зрения интегральных уравнений, но для этого придется особое внимание обратить на придание смысла интегралу, входящему в это уравнение.

2. Функциональные пространства и псевдодифференциальные операторы. Уравнение (1.1) будет рассматриваться в контексте теории псевдодифференциальных уравнений в шкале H^s пространств Соболева–Слободецкого. Кратко напомним основные определения.

Пространство Соболева–Слободецкого $H^s(\mathbf{R}^2) \equiv H^s$, $s \in \mathbf{R}$ состоит из обобщенных функций $u(x, y)$, преобразование Фурье F которых является локально интегрируемой в смысле Лебега функцией $\tilde{u}(\xi,\eta)$, такой, что

$$\|u\|_s^2 = \iint\limits_{\mathbf{R}^2} |\tilde{u}(\xi,\eta)|^2 (1+|\xi|+|\eta|)^{2s} d\xi d\eta < +\infty$$

Напомним, что если $S(\mathbf{R}^2)$ – класс Шварца бесконечно дифференцируемых функций, убывающих при $|x|+|y|\to+\infty$ быстрее любой отрицательной степени $|x|+|y|$ вместе со всеми своими производными, то преобразование Фурье функции $u(x, y)\in S(\mathbf{R}^2)$ определяется формулой

$$\tilde{u}(\xi,\eta)\equiv(Fu)(\xi,\eta)=\iint\limits_{\mathbf{R}^2} e^{i(x\xi+y\eta)}u(x,y)dxdy$$

Наконец, отметим, что если $b\in S'(\mathbf{R}^2)$ – обобщенная функция, то псевдодифференциальный оператор A определяется формулой

$$Au=F^{-1}(b\tilde{u}),\quad u\in S(\mathbf{R}^2) \tag{2.1}$$

Функция $b(\xi, \eta)$ называется символом оператора A.

Введем следующий оператор, порожденный ядром $k(x, y)$ уравнения (1.1):

$$(Ku)(x,y)=\iint\limits_{\mathbf{R}^2} k(x-x',y-y')u(x',y')dx'dy' \tag{2.2}$$

Согласно определению (2.1), оператор K можно рассматривать как псевдодифференциальный оператор с символом $(\xi^2+\eta^2)^{-1/2}$, а (2.2) – это интегральное представление оператора K.

3. Возмущение и факторизация. Введем в рассмотрение оператор K_ε, соответствующий символу

$$\sigma(\xi,\eta,\varepsilon)=(\xi^2+\eta^2+\varepsilon^2)^{-1/2},\quad \varepsilon\in\mathbf{R},\quad \varepsilon\neq 0$$

Запишем уравнение (1.1) в операторном виде

$$P_+Kq=f,\quad (P_+u)(x,y)=\begin{cases}u(x,y), & (x,y)\in\Omega\\ 0, & (x,y)\notin\overline{\Omega}\end{cases} \tag{3.1}$$

где P_+ – оператор сужения на область Ω.

Заменим его возмущенным уравнением

$$P_+K_\varepsilon p_+=f \tag{3.2}$$

(в (3.1), (3.2) опущена постоянная C_1; индекс плюс проставлен у p, чтобы подчеркнуть, что функция p задана в области Ω). Эта замена оправдана тем, что оператор K неограничен в пространстве H^s, в то время как операторы K_ε обладают требуемым свойством: они ограниченно действуют из пространства H^s в пространство H^{s+1} ([4], лемма 4.4, с. 45).

Уравнение (3.2) будет решено точно для всех $\varepsilon\neq 0$; если $p_+^{(\varepsilon)}$ – решение уравнения (3.2) и существует $\lim p_+^{(\varepsilon)}=q$ при $\varepsilon\to 0$ по H^s – норме, то, как можно убедиться, q будет удовлетворять уравнению (3.1). Это дает основания назвать $p_+^{(\varepsilon)}$ приближенным решениям уравнения (3.1) (хотя точное решение, вообще говоря, априори не существует для любой правой части $f\in H^{s+1}(\Omega)$; здесь и ниже $H^s(\Omega)$ будет означать пространство функций $u\in H^s$, таких, что $\operatorname{supp} u\subset\Omega$).

Представим символ $\sigma(\xi, \eta, \varepsilon)$ в виде

$$\sigma(\xi,\eta,\varepsilon)=\sigma^+(\xi,\eta,\varepsilon)\sigma^-(\xi,\eta,\varepsilon) \tag{3.3}$$

$$\sigma^\pm(\xi,\eta,\varepsilon)=(\sqrt{a^2+1}\eta\pm\zeta(\xi,\eta,\varepsilon))^{-1/2},\quad \zeta(\xi,\eta,\varepsilon)=\sqrt{a^2\eta^2-\xi^2-\varepsilon^2}$$

Представление (3.3) назовем волновой факторизацией символа $\sigma(\xi, \eta, \varepsilon)$. Сомножители σ^+, σ^- обладают рядом замечательных свойств. Пусть O^+ – конус в $\mathbf{R}^2$ вида $\{(\xi,\eta): a\eta>|\xi|\}$, O^- – противоположный конус, $\{(\xi,\eta): (-\xi,-\eta)\in O^+\}$, $T(O^\pm)$ – радиальная трубчатая область над конусом $O^\pm$[5] – множество из $\mathbf{C}^2$ вида $\mathbf{R}^2+iO^\pm$.

Оказывается, что $\sigma^{\pm}(\xi, \eta, \varepsilon)$ представляет собой граничное значение аналитической в $T(O^{\pm})$ функции, не имеющей в $T(O^{\pm})$ нулей. Действительно, рассмотрим функцию двух комплексных переменных z_1, z_2:

$$F(z_1,z_2)=(\sqrt{a^2+1}z_2+\zeta(z_1,z_2,\varepsilon))^{-\frac{1}{2}} \tag{3.4}$$

Обозначим $T(O)=T(O^+)\cup T(O^-)$. Известно, что при $z=(z_1,z_2)\in T(O)$ функция $a^2z_2^2-z_1^2$ не принимает неотрицательных значений (в [5], лемма на с. 350, этот факт доказан для светового конуса, $a=1$; перенос утверждения этой леммы на случай произвольного $a>0$ не вызывает затруднений). Очевидно, то же самое тем более справедливо для функции $a^2z_2^2-z_1^2-\varepsilon^2$. Следовательно, каждая из двух ветвей функции $\zeta(z_1, z_2, \varepsilon)$ однозначна и аналитична в $T(O)$. Кроме того, справедлива оценка

$$|\zeta(z_1, z_2, \varepsilon)|\leq d(1+|z|)^{\alpha} \tag{3.5}$$

где d – положительная постоянная, зависящая лишь от a и ε, $\alpha=1$. Отсюда следует, что функция $\zeta(z_1, z_2, \varepsilon)$ имеет граничные значения при $(\xi', \eta')\to 0$, $(\xi', \eta')\in O^+$ ($(\xi', \eta')\to 0$, $(\xi', \eta')\in O^-$) в смысле обобщенных функций ([5], с. 275); $z\in \mathbf{C}^2$ представляется как $(\xi+i\xi', \eta+i\eta')$.

Граничные значения не зависят от того, по какому пути (ξ', η') стремится к нулю, поэтому удобно рассматривать пределы вида $\lim_{\eta'\to 0}\zeta(\xi, \eta+i\eta', \varepsilon)$.

Если выбрать одну из ветвей функции $\zeta(z_1, z_2, \varepsilon)$, например, ту, которая отображает $T(O)$ на верхнюю полуплоскость, то можно убедиться, что граничными значениями этой ветви будут

$$\zeta(\xi,\eta\pm i0,\varepsilon)=\begin{cases}\pm\sqrt{\kappa}, & \kappa>0, \quad \eta>0\\ \mp\sqrt{\kappa}, & \kappa>0, \quad \eta<0\\ i\sqrt{-\kappa}, & \kappa<0, \quad (\kappa=a^2\eta^2-\xi^2-\varepsilon^2)\end{cases}$$

Отметим, что

$$\zeta(\xi,\eta\pm i0,\varepsilon)=-\overline{\zeta(\xi,\eta-i0,\varepsilon)}$$

(черта сверху означает комплексное сопряжение).

Вернемся к функции (3.4). Она аналитична в $T(O^+)$, так как при $z\in T(O^+)$ имеем $\operatorname{Im}z_2>0$ и $\operatorname{Im}\zeta(z_1, z_2, \varepsilon)>0$, т.е. все значения функции $\sqrt{a^2+1}z_2+\zeta(z_1, z_2, \varepsilon)$ находятся в верхней полуплоскости. Точно таким же образом убеждаемся в аналитичности функции $(\sqrt{a^2+1}z_2+\overline{\zeta(z_1,z_2,\varepsilon)})^{-\frac{1}{2}}$ в $T(O^-)$. Отсюда следует, что если под $\zeta(\xi, \eta, \varepsilon)$ понимать $\zeta(\xi, \eta+i0, \varepsilon)$, то сомножители σ^+, σ^-, входящие в представление (3.3), обладают теми свойствами, которые понадобятся в дальнейшем, а именно: $(\sigma^+)^{\pm 1}$, $(\sigma^-)^{\pm 1}$ допускают аналитические продолжения в $T(O^+)$, $T(O^-)$ соответственно, эти аналитические продолжения удовлетворяют оценке (3.5) с некоторым $\alpha\geq 0$ и не имеют нулей в $T(O^+)$, $T(O^-)$ (можно взять $\alpha={}^1/_2$ для $(\sigma^+)^{-1}$, $(\sigma^-)^{-1}$ и $\alpha=0$ для σ^+, σ^-).

4. Исследование уравнения (3.2). Решение уравнения (3.2) будем искать в пространстве $H^s(\Omega)$ обобщенных функций u, а правую часть f уравнения (3.2) будем рассматривать в пространстве $H_1^{s+1}(\Omega)$ функций из $S'(\Omega)$, допускающих продолжение в $H^{s+1}(\mathbf{R}^2)$, причем по определению

$$\|f\|_{H_1^{s+1}(\Omega)}=\inf\|lf\|_{H^{s+1}(\mathbf{R}^2)}$$

где инфимум берется по всевозможным продолжениям l.

Пусть f_1 – произвольное продолжение f с Ω на $\mathbf{R}^2$, $f_1 \in H^{s+1}(\mathbf{R}^2)$. Положим $p_- = f_1 - K_\varepsilon p_+$ и перепишем уравнение (3.2) в виде

$$K_\varepsilon p_+ + p_- = f_1 \tag{4.1}$$

Применив к (4.1) преобразование Фурье, можно записать

$$\sigma(\xi,\eta,\varepsilon)\tilde{p}_+(\xi,\eta) + \tilde{p}_-(\xi,\eta) = \tilde{f}_1(\xi,\eta) \tag{4.2}$$

При учете волновой факторизации (3.3) последнее уравнение можно представить как

$$\tilde{q}_+(\xi,\eta) + \tilde{q}_-(\xi,\eta) = \tilde{f}_2(\xi,\eta) \tag{4.3}$$

$$\left(\tilde{q}_+(\xi,\eta) = \sigma^+(\xi,\eta,\varepsilon)\tilde{p}_+(\xi,\eta),\quad \tilde{q}_-(\xi,\eta) = \frac{\tilde{p}_-(\xi,\eta)}{\sigma^-(\xi,\eta,\varepsilon)},\quad \tilde{f}_2(\xi,\eta) = \frac{\tilde{f}_1(\xi,\eta)}{\sigma^-(\xi,\eta,\varepsilon)}\right)$$

(здесь опущена зависимость $\tilde{q}_+, \tilde{q}_-$ от ε, чтобы не нагромождать обозначений).

Уравнение (4.3) представляет собой многомерный аналог так называемой задачи скачка [6], и его одномерный вариант естественно возникает в известном методе Винера–Хопфа [1, 7, 8].

Приступим к детальному анализу уравнения (4.3). Обозначим $\tilde{H}^s_+$ фурье-образ пространства $H^s(\Omega)$, $\tilde{H}^s_-$ – фурье-образ пространства $H^s(\mathbf{R}^2 \setminus \overline{\Omega})$, а $\tilde{H}^s$ – фурье-образ пространства H^s. Ближайшей целью будет убедиться в том, что $\tilde{q}_+ \in \tilde{H}^{s+1/2}_+$, $\tilde{q}_- \in \tilde{H}^{s+1/2}_-$. Сразу можно отметить следующее: $\tilde{q}_+, \tilde{q}_-, \tilde{f}_2 \in \tilde{H}^{s+1/2}$, так как $p_+ \in H^s$ и псевдодифференциальный оператор с символом σ^+ имеет порядок – 1/2 ([4], лемма 4.4, с. 45), $f_1, p_- \in H^{s+1}$ и псевдодифференциальный оператор с символом $(\sigma^-)^{-1}$ имеет порядок 1/2.

Далее, пространство $\tilde{H}^{s+1/2}_+$ имеет точное описание ([9], § 10): оно состоит из граничных значений (в смысле распределений) аналитических в $T(O^+)$ функций $\tilde{u}(\xi,\eta)$ с конечной нормой

$$\sup\left(\iint_{\mathbf{R}^2} |\tilde{u}(\xi+i\xi',\eta+i\eta')|^2\, \lambda^{2s+1}\, d\xi d\eta\right)^{1/2},\quad (\xi',\eta') \in O^+$$

$$\lambda = 1 + |\xi| + |\eta|$$

которая совпадает с величиной

$$\left(\iint_{\mathbf{R}^2} |\tilde{u}(\xi,\eta)|^2\, \lambda^{2s+1}\, d\xi d\eta\right)^{1/2}$$

Так как функции $\tilde{p}_+$ и σ^+ представляют собой граничные значения аналитических в $T(O^+)$ функций и

$$\iint_{\mathbf{R}^2} |\sigma^+(\xi,\eta,\varepsilon)|^2\, |\tilde{p}_+(\xi,\eta)|^2\, \lambda^{2s+1}\, d\xi d\eta \le d \iint_{\mathbf{R}^2} |\tilde{p}_+(\xi,\eta)|^2\, \lambda^{2s}\, d\xi d\eta < +\infty$$

(так как $\tilde{p}_+ \in \tilde{H}^s_+$), то $\tilde{q}_+ \in \tilde{H}^{s+1/2}_+$.

Рассмотрим $\tilde{q}_-$. Так как $(\sigma^-)^{-1}(\xi, \eta, \varepsilon)$ допускает аналитическое продолжение в $T(O^-)$ и удовлетворяет оценке (3.5) с показателем $\alpha = 1/2$, то обратное преобразование Фурье в смысле распределений $(\sigma^-)^{-1}(\xi, \eta, \varepsilon)$ представляет собой обобщенную функцию Λ, сосредоточенную на $\overline{\Omega}_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2:\ y \le -a|x|\}$, а $(\sigma^-)^{-1}\tilde{p}_-$ – свертку функций Λ и p_-. Аппроксимируя p_- финитными с носителем в $\mathbf{R}^2 \setminus \Omega$ бесконечно дифференцируемыми функциями и учитывая, что $\operatorname{supp}\Lambda \subset \overline{\Omega}_1$, $\operatorname{supp} p_- \subset \mathbf{R}^2 \setminus \Omega$, можно убедиться, что $\mathrm{supp}\Lambda * p_- \subset \mathbf{R}^2\backslash\Omega$ (звездочка означает свертку). Последнее равносильно тому, что $(\sigma^-)^{-1}\tilde{p}_- \in \tilde{H}_-^{s+1/2}$.

Уравнение (4.3) будет решено при помощи одного интегрального оператора, который сейчас будет введен с описанием его основных свойств.

5. Интегральный оператор. На функциях из класса Шварца $S(\mathbf{R}^2)$ определим интегральный оператор G_2 формулой

$$(G_2u)(\xi,\eta) = \lim_{\tau\to 0+} \iint_{\mathbf{R}^2} \frac{u(x,y)dxdy}{(\xi-x)^2 - a^2(\eta - y + i\tau)^2}$$

Если $\theta(x, y)$ – характеристическая функция множества Ω, то можно убедиться, что

$$F(\theta u) = 2aG_2\tilde{u}, \quad \forall u \in S(\mathbf{R}^2) \tag{5.1}$$

Действительно, рассмотрим интеграл ($\tau > 0$)

$$\iint_{\mathbf{R}^2} e^{i(x\xi+y\eta)}\theta(x,y)u(x,y)e^{-\tau y}dxdy$$

Это преобразование Фурье произведения двух функций $u(x, y)$ и $\theta(x, y)e^{-\tau y}$, которые являются абсолютно интегрируемыми (последнее дает возможность применить теорему о свертке).

Найдем преобразование Фурье функции $\theta(x, y)e^{-\tau y}$:

$$\iint_{\mathbf{R}^2} e^{i(x\xi+y\eta)}\theta(x,y)e^{-\tau y}dxdy = \iint_{\mathbf{R}^2} e^{ix\xi}e^{iy(\eta+i\tau)}dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{a|x|}^{+\infty} e^{iy(\eta+i\tau)}dy\right)e^{ix\xi}dx = -\frac{1}{i(\eta+i\tau)}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ia|x|(\eta+i\tau)}e^{ix\xi}dx = \frac{2a}{\xi^2 - a^2(\eta+i\tau)^2}$$

Свертка последней функции с $\tilde{u}(\xi,\eta)$ и переход к пределу при $\tau \to 0$ ($\tau > 0$) дают формулу (5.1).

Оператор G_2 можно записать в более привычной форме, если произвести замены переменных

$$\xi' = \xi - a\eta, \quad \eta' = \xi + a\eta, \quad x' = x - ay, \quad y' = x + ay \tag{5.2}$$

Тогда

$$(G_2u)\left(\frac{\eta'+\zeta'}{2}, \frac{\eta'-\xi'}{2a}\right) = \frac{1}{2a}\lim_{\tau\to 0+}\iint_{\mathbf{R}^2}\frac{u_1(x',y')dx'dy'}{(\xi'-x'-i\tau)(\eta'-y'+i\tau)}$$

$$u_1(x,y) = u\left(\frac{y+x}{2}, \frac{y-x}{2a}\right)$$

Правая часть этого равенства представляет собой произведение двух одномерных интегралов типа Коши, и предел легко вычисляется. Введем операторы

$$(S_1u)(x',y') = \mathrm{v.p.}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(\xi',y')d\xi'}{x'-\xi'}$$

$$(S_2u)(x',y') = \mathrm{v.p.}\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(x',\eta')d\eta'}{y'-\eta'}, \quad S_{12} = S_1S_2$$

Имеем ([6], с. 83)

$$(G_2u)\left(\frac{\eta'+\zeta'}{2}, \frac{\eta'-\xi'}{2a}\right) = \tag{5.3}$$

$$= -\frac{\pi^2}{2a}(-u_1(\xi',\eta') + (S_1u_1)(\xi',\eta') - (S_2u_1)(\xi',\eta') + (S_{12}u_1)(\xi',\eta'))$$

Представление (5.3) удобно тем, что с его помощью вопрос об ограниченности оператора G_2 в норме пространства $\tilde{H}^s$ при $|s| < 1/2$ легко сводится к соответствующим одномерным результатам ([4], с. 59), поскольку при замене (5.2) $1 + |x'| + |y'| \sim 1 + |x| + |y|$, $1 + |\xi'| + |\eta'| \sim 1 + |\xi| + |\eta|$, т.е. отношение рассматриваемых величин ограничено сверху и снизу положительными постоянными.

Действительно, ограниченность оператора G_2 в норме пространства $\tilde{H}^s$ эквивалентна ограниченности оператора

$$(G_2^0 u)(\xi,\eta) = \lim_{\tau\to 0+} \iint_{\mathbf{R}^2} \frac{u(x,y)(1+|x|+|y|)^s\,dxdy}{(1+|\xi|+|\eta|)^s((\xi-x)^2 - a^2(\eta-y+i\tau)^2)}$$

в пространстве $L_2(\mathbf{R}^2)$ функций с конечной нормой

$$\|u\|_{L_2(\mathbf{R}^2)} = \left(\iint_{\mathbf{R}^2} |u(x,y)|^2\,dxdy\right)^{1/2}$$

Поскольку в соответствии с (5.3) оператор G_2 – это линейная комбинация операторов S_1, S_2 и их произведений (с точностью до замены переменной, приводящей к эквивалентной H^s-норме), то остается воспользоваться нужным результатом из [4] (теорема 5.1).

Наконец, последнее важное свойство оператора G_2 – это ортогональный проектор пространства $\tilde{H}^s$ на $\tilde{H}^s_+$ (уместно еще раз напомнить, что $|s| < 1/2$). Если θ – оператор умножения на функцию $\theta(x, y)$, то можно убедиться, что он ограничен по норме H^s. Это следует из (5.1), ограниченности G_2 по норме $\tilde{H}^s$ и плотности $S(\mathbf{R}^2)$ в H^s. При $u(x, y) \in S(\mathbf{R}^2)$ имеем $\operatorname{supp}\theta(x, y)u(x, y) \subset \overline{\Omega}$; следовательно, $\theta u \in H^s(\Omega)$. Замкнутость подпространства $H^s(\Omega)$ в H^s проверяется методом, аналогичным указанному в [4]. Итак, G_2 – ограниченный оператор, действующий из $\tilde{H}^s$ в $\tilde{H}^s_+$. Точно так же убеждаемся, что $I - G_2$, где I – единичный оператор, ограниченно действует из $\tilde{H}^s$ в $\tilde{H}^s_-$.

Следствием этого свойства является тот самый факт, на основании которого будет решено уравнение (4.3), а именно: при $|s| < 1/2$ любая функция $\tilde{u}(\xi,\eta) \in \tilde{H}^s$ однозначно представима в виде

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = \tilde{u}_1(\xi,\eta) + \tilde{u}_2(\xi,\eta), \quad \tilde{u}_1 \in \tilde{H}^s_+, \quad \tilde{u}_2 \in \tilde{H}^s_-$$

причем $\tilde{u}_1 = G_2\tilde{u}$, $\tilde{u}_2 = (I - G_2)\tilde{u}$.

Равенство

$$u = \theta u + (1 - \theta)u \tag{5.4}$$

очевидно. Переходя к образам Фурье при учете (5.1) и продолжая (5.4) по непрерывности с $S(\mathbf{R}^2)$ на H^s, можно записать

$$\tilde{u} = G_2\tilde{u} + (I - G_2)\tilde{u} \tag{5.5}$$

и обозначить $G_2\tilde{u} = \tilde{u}_1$, $(I - G_2)\tilde{u} = \tilde{u}_2$.

Осталось убедиться в однозначности представления (5.5).

Для этого достаточно показать, что если

$$\tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 = 0 \tag{5.6}$$

то $\tilde{u}_1 \equiv 0$, $\tilde{u}_2 \equiv 0$.

Взяв $\tilde{g}_1 \in C_0^\infty(\Omega)$, $\tilde{g}_2 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus \overline{\Omega})$ (методами работы [4], с. 44, можно показать, что классы $C_0^\infty(\Omega)$, $C_0^\infty(\mathbf{R}^2 \setminus \overline{\Omega})$ финитных бесконечно дифференцируемых функций, носитель которых содержится в указанной области, плотны соответственно в $\overset{\circ}{H}{}^s_+, \overset{\circ}{H}{}^s_-$), имеем

$$\theta g_1 = g_1, \quad \theta g_2 = 0$$

Аппроксимируя u_1 функциями типа g_1, u_2 – типа g_2, и учитывая свойства оператора G_2, получим

$$G_2\tilde{u}_1 = \tilde{u}_1, \quad G_2\tilde{u}_2 = 0 \tag{5.7}$$

Аналогично

$$(I - G_2)\tilde{u}_1 = 0, \quad (I - G_2)\tilde{u}_2 = \tilde{u}_2 \tag{5.8}$$

Применяя к (5.6) равенства (5.7), (5.8), получим требуемый результат.

6. Решение уравнения (3.2). В соответствии со сказанным в разд. 5, решение уравнения (4.5) при $|s + {}^1/_2| < {}^1/_2$, т.е. $-1 < s < 0$, имеет вид

$$\tilde{q}_+(\xi,\eta) = (G_2\tilde{f}_2)(\xi,\eta)$$

Следовательно, в образах Фурье решение уравнения (3.2) в развернутой форме выглядит так:

$$\tilde{p}_+(\xi,\eta) = (\sigma^+)^{-1}(\xi,\eta,\varepsilon) \lim_{\tau\to 0+} \iint_{\mathbf{R}^2} \frac{\tilde{f}_1(x,y)dxdy}{\sigma^-(x,y,\varepsilon)((\xi - x)^2 - a^2(\eta - y + i\tau)^2)} \tag{6.1}$$

где f_1 – произвольное продолжение f с Ω на $\mathbf{R}^2, f_1 \in H^{s+1}$, причем p_+ не зависит от выбора этого продолжения.

Запишем (6.1) в символической форме

$$\tilde{p}_+ = (\sigma^+)^{-1}G_2(\sigma^-)^{-1}\tilde{f}_1 \tag{6.2}$$

Пусть f'_1 – другое продолжение f:

$$\tilde{p}'_+ = (\sigma^+)^{-1}G_2(\sigma^-)^{-1}\tilde{f}'_1 \tag{6.3}$$

Вычитая (6.2) из (6.3), получим

$$\tilde{p}'_+ - \tilde{p}_+ = (\sigma^+)^{-1}G_2(\sigma^-)^{-1}(\tilde{f}_1 - \tilde{f}_1)$$

Но $\operatorname{supp}(f'_1 - f_1) \subset \mathbf{R}^2\setminus\Omega$ и тогда (см. разд. 4) $(\sigma^-)^{-1}(\tilde{f}'_1 - \tilde{f}_1) \in \tilde{H}^s_-$, откуда следует (разд. 5), что $G_2(\sigma^-)^{-1}(\tilde{f}'_1 - \tilde{f}_1) = 0$. Значит, $\tilde{p}'_+ = \tilde{p}_+$.

Из представления (6.2) при учете ограниченности оператора G_2 в $\tilde{H}^s$ при $|s| < {}^1/_2$, ограниченности псевдодифференциальных операторов порядка ${}^1/_2$ с символами $(\sigma^+)^{-1}$, $(\sigma^-)^{-1}$, действующих из пространства H^s в $H^{s-1/2}$, вытекает априорная оценка решения

$$\|p_+\|_{H^s(\Omega)} \leqslant d\|lf\|_{H^{s+1}} \leqslant d'\|f\|_{H_1^{s+1}(\Omega)}$$

Правое неравенство имеет место в силу того, что (6.2) не зависит от выбора продолжения lf, и стало быть, lf выбирается так, чтобы выполнялось нужное неравенство.

Отметим, что если Ω – невыпуклый конус (угол раствора больше π), то, очевидно, изложенный метод применим к этому случаю без принципиальных изменений: оператор G_2 следует ввести применительно к конусу $\mathbf{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ и в разд. 6 использовать оператор $I - G_2$, а волновая факторизация σ должно строиться относительно конусов, связанных с $\mathbf{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$.

Случай $a = 0$, когда Ω "вырождается" в полуплоскость, казалось бы, не охватывается предложенной схемой. На самом деле он гораздо проще и рассматривается обычным методом Винера–Хопфа, когда факторизация производится по одной переменной, а вторая играет роль параметра (см. [4]). Функцию $\sigma(\xi, \eta, \varepsilon)$ следует представить в виде

$$\sigma(\xi,\eta,\varepsilon) = (\eta + i\sqrt{\xi^2+\varepsilon^2})^{-1/2}(\eta - i\sqrt{\xi^2+\varepsilon^2})^{-1/2}$$

так что сомножители допускают аналитические продолжения по η при фиксированном ξ в верхнюю и нижнюю полуплоскость, удовлетворяют нужным оценкам и не имеют нулей.

Замечания. 1°. Предельный переход при $\varepsilon \to 0$ в формуле (6.1) "осуществляется" просто: следует в формуле (6.1) положить $\varepsilon = 0$. Дело в том, что все стоящие в правой части (6.1) операторы при $\varepsilon = 0$ ограничены в соответствующих пространствах H^s, и стало быть, формула (6.1) имеет смысл и при $\varepsilon = 0$. Само же возмущение исходного уравнения нужно для того, чтобы на всех промежуточных этапах встречающиеся операторы были ограниченными.

2°. Вопрос об асимптотике (поведении вблизи граней) решения требует специального исследования. Однако в случае $a = 0$ известная в контактных задачах корневая особенность действительно имеет место (см. [4], с. 93, теорема 9.1 и ниже; в этом случае в роли фигурирующего там показателя κ следует взять $-1/2$ – показателя степени σ^+).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.
2. *Александров В.М., Бабешко В.А.* О давлении на упругое полупространство штампа клиновидной формы в плане // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 1. С. 88–93.
3. *Рвачев В.Л.* О давлении на упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму клина // ПММ. 1959. Т. 23. Вып. 1. С. 169–171.
4. *Эскин Г.И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 232 с.
5. *Владимиров В.С.* Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964. 411 с.
6. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
7. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
8. *Нобл Б.* Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иност. лит-ры, 1962. 279 с.
9. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979. 318 с.

Новгород

Поступила в редакцию
30.VIII.1993