

ВНУТРЕННИЙ
УДК 539.3

УДК 539.3

© 1995 г. В.М. Александров, Л.А. Кипнис

ЛИНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ В КОНЦЕ ШТАМПА, ВДАВЛИВАЕМОГО В ПОЛУПЛОСКОСТЬ

В условиях плоской статической задачи (плоская деформация) рассматривается вопрос об определении начальной пластической зоны вблизи конца жесткого штампа, вдавливаемого в упругопластическую полуплоскость. Пластическая зона моделируется прямой линией скольжения, исходящей из конца штампа. С учетом малости длины линии скольжения формулируется соответствующая краевая задача для полуплоскости с несимметричным прямолинейным разрезом, выходящим на ее границу. Строится точное решение функционального уравнения Винера–Хопфа задачи и на его основе выводится уравнение для определения длины линии скольжения. Показывается разрешимость последнего. Направление развития линии скольжения устанавливается из условия максимума ее длины. При различных значениях параметров задачи приводятся выражения для длины линии скольжения и значения углов ее наклона к границе.

1. В условиях плоской деформации рассмотрим статическую задачу о вдавливании жесткого штампа с углом α при вершине O в упругопластическую полуплоскость (фигура). Параллельные стороны штампа перпендикулярны границе полуплоскости. Предполагается, что под действием вдавливающей силы P штамп будет перемещаться перпендикулярно границе полуплоскости. Трение между штампом и поверхностью упругопластического тела отсутствует. Вне линии контакта поверхность тела свободна от напряжений.

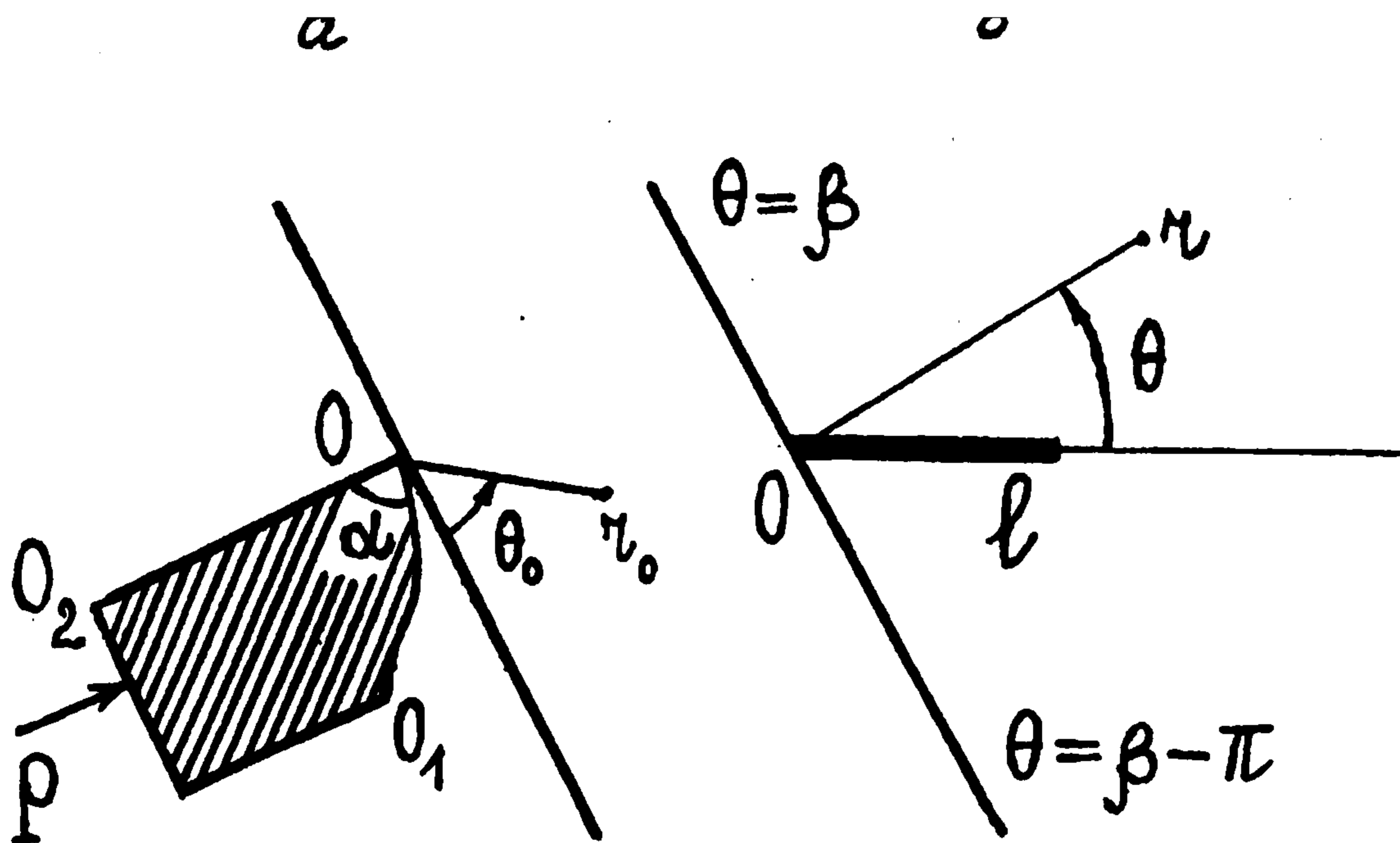
Уже при сколь угодно малых значениях вдавливающей силы вблизи точки O – концентратора напряжений возникает пластическая зона. Будем изучать лишь начальную стадию ее развития, считая вдавливающую силу достаточно малой. Тогда размер пластической зоны будет мал по сравнению с длиной линии контакта и размерами штампа. Следуя широко практикуемой в настоящее время и экспериментально подтверждаемой гипотезе локализации [1–3], начальную пластическую зону будем моделировать прямой линией скольжения, исходящей из точки O . На линии скольжения допускается разрыв лишь касательного смещения, а касательное напряжение равно $\pm\tau_s$ (τ_s – предел текучести на сдвиг). Знак перед τ_s устанавливается при постановке каждой конкретной задачи. В данном случае в соответствующей упругой задаче

$$r_0 \rightarrow 0, \quad 0 < \theta_0 < \pi, \quad \tau_{r_0\theta_0} \sim \frac{Kf(\theta_0)}{4\sqrt{2\pi r_0}}, \quad f(\theta_0) = \sin \frac{\theta_0}{2} + \sin \frac{3\theta_0}{2}$$

($\tau_{r_0\theta_0}$ – напряжение, K – отрицательная постоянная).

Поскольку $f(\theta_0) > 0$, при каждом θ_0 вблизи точки O имеем $\tau_{r_0\theta_0} < 0$. Поэтому перед τ_s должен быть выбран знак минус.

Ввиду того, что $f(\theta_0)$ достигает своего наибольшего значения при $\theta_0 = 2\arccos(\sqrt{2}/\sqrt{3})$, развития линии скольжения следует ожидать под углом, примерно



равным 109° , к свободной от напряжений части $\theta_0 = \pi$ границы полуплоскости. Этот вывод будет подтвержден ниже в результате анализа решения формулируемой краевой задачи.

Так как длина линии скольжения мала по сравнению с длиной линии контакта и размерами штампа и в дальнейшем понадобится информация о напряженно-деформированном состоянии лишь вблизи точки O , то в качестве решения рассматриваемой задачи будем использовать решение соответствующей задачи о полубесконечном штампе. При этом заданную по условию гладкую кривую OO_1 можно заменить любой другой гладкой линией, составляющей с прямой OO_2 угол α .

Граничные условия запишем так (фигура):

$$\theta = \beta, \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0; \quad \theta = \beta - \pi, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad u_\theta = A \ln \frac{r+L}{L} + \text{const}$$

$$\theta = 0, \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0; \quad \langle u_\theta \rangle = 0 \quad (1.1)$$

$$\theta = 0, \quad r < l, \quad \tau_{r\theta} = -\tau_s; \quad \theta = 0, \quad r > l, \quad \langle u_r \rangle = 0 \quad (1.2)$$

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow l-0, \quad \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle \sim -\frac{4(1-\nu^2)}{E} \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi(l-r)}} \quad (1.3)$$

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow l+0, \quad \tau_{r\theta} \sim \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi(r-l)}}$$

$$\int_0^\infty \sigma_\theta(r, \beta - \pi) dr = -P \quad (1.4)$$

Здесь $\sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ — напряжения; u_θ, u_r — смещения; $\langle n \rangle$ — скачок n при $\theta = 0$; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; k_{II} — подлежащий определению коэффициент интенсивности напряжений в конце линии скольжения; A — отрицательная постоянная, значение которой будет выбрано в процессе решения задачи таким образом, чтобы удовлетворить условию (1.4); $L = -A \text{tg} \alpha$.

Требуется определить длину l линии скольжения и угол β ее наклона к границе полуплоскости.

Указанные величины определяются ниже по схеме, принятой в [3]. Длина линии скольжения находится из условия равенства нулю коэффициента интенсивности напряжений в ее конце. Она представляет собой функцию угла наклона линии скольжения к границе полуплоскости, являющегося свободным параметром задачи. В качестве искомого угла, определяющего направление начального развития линии сколь-

жения, выбирается то значение свободного параметра, которое доставляет наибольшее значение ее длине.

2. Применяя преобразование Меллина [4]

$$m^*(p) = \int_0^{\infty} m(r)r^p dr$$

к уравнениям равновесия, условию совместности деформаций, закону Гука и используя (1.1), (1.2), получаем следующие соотношения, связывающие меллиновские трансформанты:

$$\sigma_{\theta}^*(p, \beta, -\pi) = g^{-1}(p) \{-4[\Delta_1(p)\Delta_4(p) + \Delta_2(p)\Delta_3(p)]u(p) + 2[2\Delta_3(p)\sin(p+1)(\pi-\beta) - 2d(p) - (p-1)\Delta_1(p)\sin p(\pi-\beta)\sin\beta]\tau_{r\theta}^*(p, 0)\} \quad (2.1)$$

$$\tau_{r\theta}^*(p, 0) = -\frac{l^{p+1}g(p)\Phi^-(p) + 4u(p)(p+1)\sin p\pi\sin p\beta\sin\beta}{\sin 2p\pi} \quad (2.2)$$

$$g(p) = \Delta_1(p)\Delta_2(p) + 2\Delta_3(p)[\cos 2p(\pi-\beta) - \cos 2\beta]$$

$$\Delta_1(p) = \sin 2p\beta + p\sin 2\beta, \quad \Delta_2(p) = \sin 2p(\pi-\beta) - p\sin 2\beta$$

$$\Delta_3(p) = \sin^2 p\beta - p^2 \sin^2 \beta, \quad \Delta_4(p) = \sin^2 p(\pi-\beta) - p^2 \sin^2 \beta$$

$$d(p) = (\sin^2 p\beta - p\sin^2 \beta)[p\cos p(\pi-\beta)\sin\beta - \sin p(\pi-\beta)\cos\beta]$$

$$u(p) = \frac{\pi AE}{4(1-\nu^2)} \frac{L^p}{\sin p\pi}$$

$$\Phi^-(p) = -\frac{E}{4(1-\nu^2)} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial u_r}{\partial r} \right\rangle_{r=\rho l} \rho^p d\rho$$

($-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — достаточно малые положительные числа). Полагая в (2.1) $p = 0$ и удовлетворяя (1.4), находим

$$A = -\frac{1-\nu^2}{\pi} a(\beta) \frac{P}{E}$$

$$a(\beta) = \frac{(2\pi - 2\beta - \sin 2\beta)(2\beta + \sin 2\beta) + 4(\beta^2 - \sin^2 \beta)\sin^2 \beta}{\pi(2\beta + \sin 2\beta) - 2(\beta \cos \beta + \sin \beta)^2}$$

С помощью (1.2), (2.2) приходим к функциональному уравнению Винера–Хопфа

$$\Phi^+(p) + a_1(\beta) \frac{P}{l} U(p) - \frac{\tau_s}{p+1} = -\operatorname{tg} p\pi G(p)\Phi^-(p) \quad (2.3)$$

$$(-\varepsilon_1 < \operatorname{Re} p < \varepsilon_2)$$

$$G(p) = \frac{g(p)}{2\sin^2 p\pi}, \quad U(p) = \frac{(p+1)\sin p\beta}{\sin 2p\pi} \lambda^{-p}, \quad \lambda = \frac{l}{L}$$

$$\Phi^+(p) = \int_1^{\infty} \tau_{r\theta}(\rho l, 0) \rho^p d\rho, \quad a_1(\beta) = a(\beta)\sin\beta$$

Используя факторизацию

$$G(p) = \frac{G^+(p)}{G^-(p)} (\operatorname{Re} p = 0), \quad \exp \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln G(z)}{z-p} dz \right] = \begin{cases} G^+(p), & \operatorname{Re} p < 0 \\ G^-(p), & \operatorname{Re} p > 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

$$p \operatorname{ctg} p\pi = K^+(p)K^-(p), \quad K^{\pm}(p) = \frac{\Gamma(1 \mp p)}{\Gamma(\frac{1}{2} \mp p)}$$

($\Gamma(z)$ – гамма-функция), уравнение (2.3) перепишем так:

$$\frac{K^+(p)\Phi^+(p)}{G^+(p)} + a_1(\beta) \frac{P}{l} \frac{K^+(p)U(p)}{G^+(p)} - \tau_s \frac{K^+(p)}{(p+1)G^+(p)} = -\frac{p\Phi^-(p)}{K^-(p)G^-(p)} \quad (2.5)$$

$$(\operatorname{Re} p = 0)$$

Поскольку

$$\frac{K^+(p)U(p)}{G^+(p)} = U^+(p) - U^-(p) \quad (\operatorname{Re} p = 0)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{K^+(z)U(z)}{G^+(z)(z-p)} dz = \begin{cases} U^+(p), & \operatorname{Re} p < 0 \\ U^-(p), & \operatorname{Re} p > 0 \end{cases}$$

$$\frac{K^+(p)}{(p+1)G^+(p)} = \frac{1}{p+1} \left[\frac{K^+(p)}{G^+(p)} - \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} \right] + \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)(p+1)}$$

$$(\operatorname{Re} p = 0)$$

согласно (2.5) получаем

$$\frac{K^+(p)\Phi^+(p)}{G^+(p)} + a_1(\beta) \frac{P}{l} U^+(p) - \frac{\tau_s}{p+1} \left[\frac{K^+(p)}{G^+(p)} - \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} \right] =$$

$$= -\frac{p\Phi^-(p)}{K^-(p)G^-(p)} + a_1(\beta) \frac{P}{l} U^-(p) + \frac{K^+(-1)\tau_s}{G^+(-1)(p+1)}$$

$$(\operatorname{Re} p = 0) \quad (2.6)$$

Функция в левой части соотношения (2.6) аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 0$, а функция в правой его части аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$. На основании принципа непрерывного продолжения эти функции равны одной и той же функции, аналитической во всей плоскости p .

Исходя из (1.3), по теореме абелева типа [5] находим

$$\Phi^+(p) \sim \frac{k_{II}}{\sqrt{-2pl}}, \quad \Phi^-(p) \sim -\frac{k_{II}}{\sqrt{2pl}} \quad (p \rightarrow \infty) \quad (2.7)$$

Из (2.4), (2.7) следует, что функции в левой и правой частях (2.6) стремятся к $k_{II}/\sqrt{2l}$ при $p \rightarrow \infty$ в полуплоскостях $\operatorname{Re} p < 0$ и $\operatorname{Re} p > 0$ соответственно. По теореме Лиувилля единая аналитическая функция тождественно равна $k_{II}/\sqrt{2l}$ во всей плоскости p .

Полагая в правой части (2.6) $p = 0$, заключаем, что единая аналитическая функция равна $C = a_1(\beta)P/lU^-(0) + K^+(-1)/G^+(-1)\tau_s$.

Следовательно, решение уравнения (2.3) имеет вид

$$\Phi^+(p) = \frac{G^+(p)}{K^+(p)} \left\{ C - a_1(\beta) \frac{P}{l} U^+(p) + \frac{\tau_s}{p+1} \left[\frac{K^+(p)}{G^+(p)} - \frac{K^+(-1)}{G^+(-1)} \right] \right\}$$

$$(\operatorname{Re} p < 0)$$

$$\Phi^-(p) = -\frac{K^-(p)G^-(p)}{p} \left[C - a_1(\beta) \frac{P}{l} U^-(p) - \frac{K^+(-1)\tau_s}{G^+(-1)(p+1)} \right]$$

$$(\operatorname{Re} p > 0)$$

а коэффициент интенсивности напряжений в конце линии скольжения выражается формулой

$$k_{II} = \left[a_1(\beta) \frac{P}{l} U^-(0) + \frac{2}{\sqrt{\pi G^+(-1)}} \tau_s \right] \sqrt{2l} \quad (2.8)$$

3. С помощью (2.8) получаем следующее уравнение для определения длины линии скольжения:

$$\varphi(\lambda) = 0, \quad \varphi(\lambda) = U^-(0) + QM\lambda, \quad M = \frac{\tau_s \operatorname{tg} \alpha}{E}, \quad Q = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi \sqrt{\pi G^+(-1)} \sin \beta} \quad (3.1)$$

По формуле Сохоцкого

$$U^-(0) = Z + I, \quad I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon$$

$$Z = -\frac{1}{2} \frac{K^+(0)U(0)}{G^+(0)} = -\frac{\beta}{2} \left\{ 2\pi[(2\pi - 2\beta - \sin 2\beta)(2\beta + \sin 2\beta) + 4(\beta^2 - \sin^2 \beta) \sin^2 \beta] \right\}^{-1/2}$$

$$I_\varepsilon = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{-i\varepsilon}^{-i\infty} \frac{K^+(z)U(z)}{G^+(z)z} dz + \int_{i\varepsilon}^{i\infty} \frac{K^+(z)U(z)}{G^+(z)z} dz \right]$$

Изучим поведение $\varphi(\lambda)$ вблизи точки $\lambda = 0$. Рассмотрим интеграл

$$I_\gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{K^+(z)U(z)}{G^+(z)z} dz$$

Контур γ состоит из полуинтервалов $]-i\infty, -i\varepsilon]$, $[i\varepsilon; i\infty[$ и полуокружности радиуса ε с центром в точке $z = 0$, лежащей в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$. Направление обхода контура совпадает с направлением мнимой оси.

Этот интеграл равен сумме Σ вычетов подинтегральной функции в ее полюсах, лежащих в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$. С другой стороны, он равен $I_\varepsilon + I_0$, где I_0 — умноженный на $1/(2\pi i)$ интеграл по упомянутой полуокружности. Поскольку $I_\varepsilon \rightarrow I$, $I_0 \rightarrow Z$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $U^-(0) = \Sigma$.

Среди лежащих в полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$ полюсов подинтегральной функции, отвечающей интегралу I_γ , ближайшим к мнимой оси является точка $z = -1/2$. Поэтому

$$\varphi(\lambda) \sim -\frac{\sin \beta / 2}{4\sqrt{\pi G^+(-1/2)}} \sqrt{\lambda} \quad (\lambda \rightarrow 0) \quad (3.2)$$

Из (3.2) следует, что стремящаяся к нулю при $\lambda \rightarrow 0$ функция $\varphi(\lambda)$ отрицательна вблизи точки $\lambda = 0$.

В результате соответствующих преобразований $\varphi(\lambda)$ принимает вид:

$$\varphi(\lambda) = \int_0^\infty [F_1(t) \cos t \ln \lambda + F_2(t) \sin t \ln \lambda] dt + QM\lambda$$

$$F_1(t) = \frac{1}{\pi} s(t) \left[f_1(t) + \frac{f_2(t)}{t} \right], \quad F_2(t) = \frac{1}{\pi} \left[s(t) f_2(t) - \frac{2Z + s(t) f_1(t)}{t} \right]$$

$$f_1(t) = f_0(t) [i_+(t) \cos i_0(t) - i_-(t) \sin i_0(t)], \quad f_2(t) = f_0(t) [i_-(t) \cos i_0(t) + i_+(t) \sin i_0(t)]$$

$$f_0(t) = [G(it)]^{-1/2} [i_3^2(t) + i_4^2(t)]^{-1}$$

$$i_+(t) = i_1(t) i_3(t) + i_2(t) i_4(t), \quad i_-(t) = i_1(t) i_4(t) - i_2(t) i_3(t)$$

$$i_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\ln G(iv)}{v-t} dv, \quad i_1(t) = \int_0^\infty e^{-v} \cos t \ln v dv, \quad i_2(t) = \int_0^\infty e^{-v} \sin t \ln v dv$$

$$i_3(t) = \int_0^\infty e^{-v} v^{-1/2} \cos t \ln v dv, \quad i_4(t) = \int_0^\infty e^{-v} v^{-1/2} \sin t \ln v dv, \quad s(t) = \frac{\operatorname{sh} t\beta}{\operatorname{sh} 2\pi}$$

α°	$10^3 \tau_s / E = 1$	5	7	10
15	0,2114	0,2069	0,2042	0,2007
45	0,1496	0,1443	0,1420	0,1398
80	0,0801	0,0756	0,0731	0,0711
89	0,0571	0,0537	0,0512	0,0492

Пусть δ – сколь угодно малое положительное число и

$$\tau_s > \frac{E}{Q\delta \operatorname{tg} \alpha} \max \left[\int_0^\infty F(t) dt, \int_0^\infty \tilde{F}(t) dt \right]$$

$$F(t) = |F_1(t)| + |F_2(t)|, \quad \tilde{F}(t) = t|F_1(t)| + \frac{s(t)}{\pi} (|f_1(t)| + t|f_2(t)|)$$

Тогда $\varphi(\delta) > 0$, $\varphi'(\lambda) > 0$ или $\lambda \geq \delta$, и поэтому $\varphi(\lambda) > 0$ при $\lambda \geq \delta$. Учитывая показанную выше отрицательность $\varphi(\lambda)$ вблизи точки $\lambda = 0$, заключаем, что уравнение (3.1) разрешимо на интервале $]0; \delta[$, а при $\lambda \geq \delta$ решений нет. Расчеты при большом числе значений параметров β, ν, M в широком диапазоне изменения последнего из них показывают, что решение единственно.

Если $\lambda = s(\beta, \nu, M)$ – решение уравнения (3.1), то

$$l = D \frac{P}{l}, \quad D = \frac{1 - \nu^2}{\pi} \operatorname{tg} \alpha a(\beta) s(\beta, \nu, M)$$

Значение β_* , доставляющее наибольшее значение функции $\chi(\beta) = as$, определяет угол наклона линии скольжения к границе полуплоскости.

В таблице при $\nu = 0,333$ приведены некоторые значения D ; для указанных здесь значений τ_s величина β_* оказалась равной 107° при $\alpha = 15^\circ$; 108° при $\alpha = 45^\circ$ и $\alpha = 80^\circ$; 109° при $\alpha = 89^\circ$.

При фиксированных α, ν, E, P с уменьшением τ_s и при фиксированных ν, τ_s, E, P с уменьшением α длина линии скольжения увеличивается.

Результаты вычислений позволяют считать угол β_* приблизительно равным $107^\circ - 109^\circ$, что согласуется со сказанным в разд. 1 относительно направления развития линии скольжения.

Отметим также, что у контактного напряжения $\sigma_\theta(r, \beta - \pi)$, характерная корневая особенность в точке $r = 0$ (начале линии скольжения) отсутствует.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Леонов М.Я., Витвицкий П.М., Ярема С.Я.* Полосы пластичности при растяжении пластин с трещиновидным концентратором // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148. № 3. С. 541–544.
2. *Витвицкий П.М., Панасюк В.В., Ярема С.Я.* Пластические деформации в окрестности трещин и критерии разрушения (обзор) // Проблемы прочности. 1973. № 2. С. 3–18.
3. *Черепанов Г.П.* Пластические линии разрыва в конце трещины // ПММ. 1976. Т. 40. Вып. 4. С. 720–728.
4. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 402 с.
5. *Нобл Б.* Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.

Москва, Умань

Поступила в редакцию
26.I.1994