УДК 539.3

© 1995 г. Г.И. Назаров

# КРУЧЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-АНИЗОТРОПНЫХ ДВУМЕРНО НЕОДНОРОДНЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Для модулей сдвига, представленных в виде произведений непрерывных функций двух цилиндрических координат ортотропного цилиндра, установлен вид анизотропии, при которой для функции напряжений и смещений построено точное решение в виде бесконечного интегрального оператора. Этот оператор содержит, наряду с известными функциями, произвольную функцию комплексной переменной. Для степенных и экспоненциально-степенных неоднородностей выделен случай, при котором оператор вырождается в одночлен, и на его примере решена задача для полого цилиндра со смешанными краевыми условиями.

**1. Исходные уравнения**. Чистое кручение ортотропного тела вращения, ось анизотропии которого совпадает с геометрической осью симметрии тела, в цилиндрических координатах $r, \theta, z$, характеризуется системой уравнений в частных производных эллиптического типа с переменными коэффициентами [1, 2]

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} - P(r,z)\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} + Q(r,z)\frac{\partial\varphi}{\partial r} = 0 \tag{1.1}$$

$$P = r^3 G_1(r,z), \quad Q = r^3 G_2(r,z)$$

Здесь $\psi$ – функция напряжений, $\varphi$ – функция смещения, $G_{\theta z} = G_1(r, z)$, $G_{r\theta} = G_2(r, z)$ – модули сдвига.

Составляющие напряжений $\tau_{\theta z} = \tau_1(r, z)$, $\tau_{r\theta} = \tau_2(r, z)$, перемещение $u_\theta = u(r, z)$ и результирующий скручивающий момент $M$ на торцах тела определяется по формулам

$$\tau_1 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial r} = rG_1\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad \tau_2 = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial z} = rG_2\frac{\partial\varphi}{\partial r} \tag{1.2}$$

$$u_\theta = r\varphi, \quad M = 2\pi\int_0^R r^2\tau_1 dr = 2\pi[\psi(R,z) - \psi(0,z)]$$

При $z = 0$ и $z = H$ ($R, H$ – радиус и длина кругового цилиндра) получим условия на торцах.

Для случая, когда модули сдвига меняются в зависимости только от радиуса, методом разделения переменных [1, 2] и иным путем [3] были построены решения для частных видов модулей сдвига и общие решения [4, 5] в виде интегральных и дифференциальных комплексных рядов для произвольно заданных модулей от радиуса $G_1(r)$, $G_2(r)$. Для кругового изотропно-неоднородного конуса при частных видах модулей $G_2 = cG_1$ ($c$ = const), зависящих от двух координат $r, z$, получено [2] автомодельное решения для функции напряжений $\psi = \psi(r/z)$.

Построим новые решения при кручении кругового цилиндра для случая, когда модули сдвига представлены в виде функций от двух координат:

$$G_1 = c_1 p_1(\xi) q_1(\eta), \quad G_2 = c_2 p_2(\xi) q_2(\eta) \tag{1.3}$$

где $c_1, c_2$ – произвольные размерные постоянные; $p_1, p_2, q_1, q_2$ – произвольные непрерывные функции аргументов

$$\xi = r/R, \quad \eta = (z+H)/H \tag{1.4}$$

При этом запишем систему уравнений (1.1) в виде

$$H\frac{\partial\psi}{\partial\xi} = c_1 R^4 \xi^3 p_1 q_1 \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\eta} = -c_2 R^2 H \xi^3 p_2 q_2 \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} \tag{1.5}$$

Исключая $\varphi$, а затем $\psi$, придем к двум безразмерным дифференциальным уравнениям второго порядка, эквивалентным системе (1.5), которые в дальнейшем будут основными:

$$\xi^3 p_2 \frac{\partial}{\partial\xi}\left(N\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right) + a^2 q_1 \frac{\partial}{\partial\eta}\left(q_2^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right) = 0 \tag{1.6}$$

$$q_2 \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^3 P_2 \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right) + a^2 \xi^3 p_1 \frac{\partial}{\partial\eta}\left(q_1 \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right) = 0 \tag{1.7}$$

Здесь

$$N = \xi^{-3} p_1^{-1}, \quad a^2 = c_1 R^2/(c_2 H^2) \tag{1.8}$$

($a$ – безразмерная постоянная).

**2. Метод решения.** В качестве исходного уравнения возьмем уравнение для напряжений (1.6). По аналогии с построением решения для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами в виде произвольных рядов, каждый член которого определяется через предыдущий и, в конечном счете, все члены ряда выражаются соответствующими квадратурами, зависящими от коэффициентов исходного уравнения и начальных условий ([6], с. 261). Ищем функцию $\psi$ в виде

$$\psi = \Sigma\alpha_k(\xi)\beta_k(\eta) w_k(\zeta) \tag{2.1}$$

$$\zeta = u + iv, \quad u = \int \rho_1(\xi)d\xi, \quad v = \int \rho_2(\eta)d\eta \tag{2.2}$$

Суммирование в (2.1) проводится от $k = 0$ до $k = \infty$; $w_k(\zeta)$ – произвольные аналитические функции комплексной переменной $\zeta$; $\alpha_k$, $\beta_k$, $\rho_1$, $\rho_2$ – простейшие (частные) значения функций, при которых уравнение (1.6) удовлетворяется.

Вносим соответствующие производные от (2.1), (2.2) в уравнение (1.6) и группируем члены. В результате придем к равенству, которое запишем в таком виде:

$$\Sigma\left[\xi^3 p_2 \beta_k \left(N\alpha_k'' + \frac{dN}{d\xi}\alpha_k'\right) + a^2 q_1 q_2^{-2} \alpha_k \Delta_1(\eta)\right] w_k +$$

$$+\Sigma\left\{\xi^3 p_2 \beta_k\left[2\rho_1 N\alpha_k' + \left(\rho_1\frac{dN}{d\xi} + N\rho_1'\right)\alpha_k\right] + a^2 q_1 q_2^{-2}\alpha_k\Delta_2(\eta)\right\} w_k' + \Delta_0(\xi,\eta)\Sigma\alpha_k\beta_k w_k'' = 0 \tag{2.3}$$

$$\Delta_1(\eta) = q_2\beta_k'' - q_2'\beta_k', \quad \Delta_0 = \frac{p_2}{p_1}\rho_1^2 - \frac{a^2 q_1}{q_2}\rho_2^2$$

$$\Delta_2 = i[2\rho_2 q_2 \beta_k' + (q_2\rho_2' - \rho_2 q_2')\beta_k] \tag{2.4}$$

Функция $\Delta_0(\xi, \eta)$ не зависит от знака суммирования, $\Delta_1(\eta)$ – вещественная функция, $\Delta_2(\eta)$ – чисто мнимое выражение.

Полагая $\Delta_0 = 0$, определим $\rho_1$ и $\rho_2$ в виде

$$\rho_1^2 = p_1 / p_2, \quad \rho_2^2 = q_2 / (a^2 q_1) \tag{2.5}$$

Из равенств $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_2 = 0$, после интегрирования и с учетом выражений (2.5) придем к связующей зависимости для $\beta_k$:

$$\beta_k = A_k \int q_2 d\eta = B_k (q_1 q_2)^{1/4} \quad (k = 0,1,2...) \tag{2.6}$$

Равенство (2.6) будет равнозначным, например, в следующих случаях.

1°. *Степенная закономерность*

$$q_1 = \eta^{\nu}, \quad q_2 = \eta^{\mu} \quad (\nu = 3\mu + 4) \tag{2.7}$$

($\nu$, $\mu$ – рациональные числа).

В формуле (2.6) постоянными интегрирования $A_k$, $B_k$ всегда можно распорядиться так, чтобы выполнялось равенство

$$\gamma A_k = B_k = 1 \quad (k = 0,1,2...)$$

($\gamma$ – постоянная, появляющаяся в результате вычисления интеграла). При этом существенно, что функкия $\beta_k$ станет независимой от индекса суммирования.

В данном случае получим

$$\beta_k = \beta = \eta^{\mu+1}, \quad A_k / (\mu + 1) = B_k = 1 \quad (k = 0,1,2...) \tag{2.8}$$

2°. *Показательные функции*

$$q_1 = b^{\nu\eta}, \quad q_2 = b^{\mu\eta}, \quad \beta = b^{\mu\eta} \quad (\nu = 3\mu) \tag{2.9}$$

($b$ – произвольное положительное число, в том числе и экспонента).

Этот перечень можно продолжить, например для функций $q_1 = \eta \ln^{\nu}\eta$, $q_2 = \eta^{-1}\ln^{\mu}\eta$, $\nu = 3\mu + 4$, получим $\beta = \ln^{\mu+1}\eta$.

Функции (2.8), (2.9) могут быть использованы для апробации соответствующих экспериментальных зависимостей.

С учетом того, что в (2.4) все $\Delta_i$ равны нулю, а $\beta_k = \beta$ (2.8), (2.9) не зависит от индекса суммирования, можно в (2.3) вынести величину $\xi^3 p_2 \beta$ за знак суммирования и сократить, а на оставшиеся члены наложить условия:

$$2\rho_1 N \alpha_0' + \left( \rho_1 \frac{dN}{d\xi} + N \rho_1' \right) \alpha_0 = 0 \tag{2.10}$$

$$2\rho_1 N \alpha_k' + \left( \rho_1 \frac{dN}{d\xi} + N \rho_1' \right) \alpha_k = \frac{dN}{d\xi} \alpha_{k-1}' + N \alpha_{k-1}'' \tag{2.11}$$

$$w_k' = -w_{k-1} \quad (k = 1,2,...) \tag{2.12}$$

При этих равенствах уравнение (2.3) удовлетворится тождественно.

Из (2.12) следует, что

$$w_k = (-1)^k \underbrace{\iint \ldots \int}_{k} w(\xi) \underbrace{d\zeta d\zeta \ldots d\zeta}_{k} \tag{2.13}$$

Здесь $w(\zeta) = w_0(\zeta)$ – произвольная аналитическая функция комплексной переменной $\zeta$ (2.2).

Из уравнения (2.10) находим

$$\alpha_0 = \frac{A_0}{a} \xi^{3/2} (p_1 p_2)^{1/4} \quad \left( \frac{A_0}{a} = 1 \right) \tag{2.14}$$

Замечаем, что однородная часть уравнения (2.11) того же вида, что и для уравнения (2.10), а правая часть – известная функция, определяемая по "цепочке" от предыдущего к последующему уравнению. В конечном счете эта однородная часть предопределяется функцией (2.14).

Методом вариации постоянной интегрирования в решении для однородной части уравнения находим частное решение неоднородного уравнения (2.11), которое запишем в виде

$$\alpha_k = e^{-\int Q d\xi} \int R_{k-1}(\xi) e^{\int Q d\xi} d\xi \tag{2.15}$$

где

$$Q = \frac{1}{2}\frac{d \ln N\rho_1}{d\xi}, \quad R_{k-1} = \frac{1}{2\rho_1}\left(\frac{d\ln N}{d\xi}\alpha'_{k-1} + \alpha''_{k-1}\right) \quad (k = 1,2...) \tag{2.16}$$

Зная (2.15) и $\beta$ (2.8), (2.9) с учетом (2.13), ряд (2.1) запишем в виде знакопеременного интегрального оператора типа [7, 8]:

$$\psi = \beta \sum (-1)^k \alpha_k \int w(\zeta) d\zeta^k \tag{2.17}$$

Здесь введена условная запись $k$-кратного интеграла (2.13). При этом при $k = 0$ имеем $\int w d\zeta^0 = w(\zeta)$.

Вещественная и мнимая части от (2.17) и их линейная комбинация являются действительными решениями уравнения (1.6). Задавая произвольно функцию $w(\zeta)$, получим обратные краевые задачи, часть из которых может оказаться пригодной для практики. При решении прямых краевых задач функцию $w$ возьмем в виде сходящегося экспоненциального ряда

$$w = \Sigma A_n e^{n\omega\zeta} + B_n e^{-n\omega\zeta} \tag{2.18}$$

в котором $\omega$, $A_n$, $B_n$ – произвольные вещественные (в общем случае – комплексные) постоянные, определяемые из краевых условий конкретной задачи.

Здесь суммирование, как и всюду в последующем, проводится от $n = 1$ до $n = \infty$.

Отметим, что функции (2.1) можно придать и дифференциальную форму, аналогичную известной [8], если в уравнении (2.3), наряду с $\Delta_i = 0$ (2.4), наложить вместо (2.10)–(2.12) условия вида

$$\begin{gathered} N\alpha''_0 + N'\alpha'_0 = 0, \quad \alpha_0 = \int \xi^3 p_2(\xi) d\xi \\ N\alpha''_k + N'\alpha'_k = 2\rho_1 N\alpha'_{k-1} + (\rho_1 N' + N\rho'_1)\alpha_{k-1} \\ w_k = -w'_{k-1}, \quad (k = 1,2...) \end{gathered} \tag{2.19}$$

которые в деталях не рассматриваем.

**3. Степенная неоднородность.** В качестве примера рассмотрим случай степенной закономерности

$$p_1 = \xi^p, \quad p_2 = \xi^q \tag{3.1}$$

($p$, $q$ – рациональные числа).

В этом случае из формул (2.14)–(2.15) придем к равенствам:

$$\alpha_0 = \xi^m, \quad Q = -m\xi^{-1} \quad \left(m = \frac{p+q}{4} + \frac{3}{2}\right) \tag{3.2}$$

$$R_{k-1} = \frac{1}{2}\xi^{(q-p)/2}[\alpha''_{k-1} - (p+3)\xi^{-1}\alpha'_{k-1}] \tag{3.3}$$

$$\alpha_k = \xi^m \int \xi^{-m} R_{k-1}(\xi) d\xi \tag{3.4}$$

При $k = 1$ получим

$$R_0 = A\xi^n, \quad \alpha_1 = B\xi^t, \quad A = \frac{m}{2}(m-p-4) \tag{3.5}$$

$$B = A/(n-m+1), \quad n = \frac{1}{4}(3q-p-2), \quad t = n+1-m$$

При $k = 2$ будем иметь

$$\alpha_2 = D\xi^s, \quad s = \frac{1}{4}(5q-3p+2), \quad D = \frac{B(m+1)(n-p-3)}{2(n-m)+q-p} \tag{3.6}$$

Этот процесс можно продолжить и установить рекуррентную формулу для $\alpha_k$.

Из (3.5), (3.6) следует, что если $A = 0$, т.е. $m = 0$ ($q = -p-6$) или $m = p + 4$ ($q = 3p + 10$), то ряд (2.17) прервется на первом члене. Если же $B \neq 0$, $m = -1$ или $n = p + 3$ ($q = (5p + 14)/3$), то он станет двучленным выражением, и так далее. В каждом отдельном случае вопрос о сходимости ряда (2.17) отпадает.

В дальнейшем подробно рассматриваем мнимую часть от (2.18) и случай, когда $m = p + 4$, а величина $\beta$ определена одной из формул (2.8), (2.9).

В этом случае при $\beta$ в виде (2.8), модули (1.4) и функция $\psi$ (2.17) принимают вид

$$G_1 = c_1\xi^p\eta^{3\mu+4}, \quad G_2 = c_2\xi^{3p+10}\eta^{\mu} \tag{3.7}$$

$$\psi = \xi^{p+4}\eta^{\mu+1}\sum(A_n e^{n\omega u} - B_n e^{-n\omega u})\sin n\omega\upsilon \tag{3.8}$$

$$u = -\frac{1}{p+4}\xi^{-(p+4)}, \quad \upsilon = -\frac{1}{\mu+1}\eta^{-(\mu+1)}$$

Внося функцию (3.8) в систему уравнений (1.5), обычным путем находим функцию смещения

$$\varphi = \frac{p+4}{c_2R^2H}\sum\frac{1}{(n\omega)^2}[A_n e^{n\omega u}(n\omega u-1)+$$

$$+B_n e^{-n\omega u}(n\omega u+1)]\left[(\mu+1)\sin n\omega\upsilon + \frac{n\omega}{a}\eta^{\mu+1}\cos n\omega\upsilon\right] \tag{3.9}$$

Для случая же, когда величина $\beta$ определена зависимостью (2.9), т.е. для модулей (1.3)

$$G_1 = c_1\xi^p e^{3\mu\eta}, \quad G_2 = c_2\xi^{3p+10}e^{\mu\eta} \tag{3.10}$$

получим, что функции $\psi$ и $\varphi$ в (3.8), (3.9) будут иметь тот же вид, что и для (2.9), с той лишь разницею, что вместо функции $\eta^{\mu+1}$ нужно внести выражение $e^{\mu\eta}$ и заменить множитель $(\mu + 1)$ на $\mu$ при $\sin n\omega\upsilon$. При этом переменная $u$ останется без изменения, а $\upsilon = -(a\mu)^{-1}e^{-\mu\eta}$.

Отметим, что в первом случае (2.8) при $u = -1$ ($\upsilon = a^{-1}\ln\eta$) и во втором случае (2.9) при $\mu = 0$ ($\upsilon = \eta/a$) формулы (3.8), (3.9) упрощаются и совпадают между собой (при учете, конечно, разных выражений для переменной $\upsilon$), а именно

$$\psi = \xi^{p+4}\sum(A_n e^{n\omega u} - B_n e^{-n\omega u})\sin n\omega\upsilon$$

$$\varphi = \frac{p+4}{R^3\sqrt{c_1c_2}}\sum\frac{1}{n\omega}[A_n e^{n\omega u}(n\omega u-1) + B_n e^{-n\omega u}(n\omega u+1)]\cos n\omega\upsilon \tag{3.11}$$

(учтено значение постоянной $a$ (1.8)). Здесь для случая (2.8) нужно брать $\upsilon = a^{-1}\ln\eta$, а для случая (2.9) $\upsilon = \eta/a$.

Подстановкой формул (3.11) в уравнения (1.5)–(1.7) убеждаемся, что они удовлетворяются для случаев (3.7) и (3.10).

Для сокращения записей ограничимся формулами (3.11) и (2.8), и для них выпишем напряжения (1.2), определенные по одной из формул (3.11)

$$\tau_1 = -\frac{p+4}{R^3}\xi^{p+1}\sum[A_n e^{n\omega u}(n\omega u-1)+B_n e^{-n\omega u}(n\omega u+1)]\sin n\omega\upsilon$$
$$\tau_2 = -\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\eta^{-1}\xi^{p+2}\sum n\omega(A_n e^{n\omega u}-B_n e^{-n\omega u})\cos n\omega\upsilon \tag{3.12}$$

Соответственно и смещение $u_\theta$ (1.2) определяется через (3.11).

**4. Краевая задача.** На примере (3.11) рассмотрим задачу со смешанными краевыми условиями для соосного полого кругового цилиндра радиусов $R$ и $R_1$ ($R > R_1$), торцы которого свободны от усилий при следующих условиях:

при $z = 0$ ($\eta = 1$), $z = H(\eta = 2)$:

$$\tau_1 = 0, \quad \left.\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right|_{\eta=1,\eta=2} = 0 \tag{4.1}$$

при $r = R(\xi = 1)$:

$$\tau_2 = -R^{-2}H^{-1}\xi^{-2}\left.\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right|_{\xi=1} = f_1(\eta)$$
$$r = R_1\left(\xi_1 = \frac{R_1}{R_2} < 1\right): \quad u_\theta = R\xi\varphi|_{\xi=\xi_1} = f_2(\eta) \tag{4.2}$$

Здесь $f_1, f_2$ – заданные кусочно-непрерывные и ограниченные на интервале $\eta \in (1.2)$ функции.

Если для случая (2.8) положить $\omega = a\pi/\ln 2$, а для случая (2.9) взять $\omega = 2a\pi$, то условия (4.1) для функции $\psi$ (3.11) выполняются. Для выполнения условий (4.2) разложим функции $f_1$ и $f_2$ в ряды Фурье по $\cos n\omega\upsilon$ в интервале $\upsilon \in (0, \ln 2)$ и, используя метод Фурье, придем к равенствам

$$n\omega(A_n e^c - B_n e^{-c}) = D_n, \quad h_1 A_n e^{n\omega u_1} + h_2 B_n e^{-n\omega u_1} = n\omega E_n$$

из которых следуют формулы:

$$A_n = \Delta_1/\Delta, \quad B_n = \Delta_2/\Delta, \quad \Delta_1 = h_2 e^{-n\omega u_1}D_1 + (n\omega)^2 e^{-c}E_n$$
$$\Delta_2 = (n\omega)^2 e^c E_n - h_1 e^{n\omega u_1}D_n, \quad \Delta = (n\omega)(h_2 e^{c-n\omega u_1} + h_1 e^{n\omega u_1 - c}) \neq 0 \tag{4.3}$$

Здесь $D_n, E_n$ – известные коэффициенты разложения функций $\Phi_1(\eta)$ и $\Phi_2(\eta)$ в ряды Фурье

$$E_n, D_n = \frac{2}{b}\int_0^b \Phi_i(e^{a\upsilon})\cos n\omega\upsilon\, d\upsilon \quad (i = 1,2) \tag{4.4}$$

и введены обозначения

$$c = -\frac{n\omega}{p+4}, \quad b = \frac{\ln 2}{a}, \quad h_1 = n\omega u_1 - 1, \quad h_2 = n\omega u_1 + 1$$
$$u_1 = -\frac{\xi^{-(p+4)}}{p+4}, \quad \Phi_1 = -R^2 H\eta f_1(\eta), \quad \Phi_2 = \frac{R^2\sqrt{c_1c_2}}{(p+4)H\xi_1}f_2(\eta) \tag{4.5}$$

Для сплошного цилиндра задача упрощается. В этом случае в зависимости от того, что задано на поверхности (напряжение или же смещение), используется одна из функций (3.11), в которой следует положить нулю постоянную $A_n$ или $B_n$ как излишнюю.

Отметим, что из формул (3.12) $p > 0$ для задачи (4.1), (4.2) следует, что, по сравнению с внутренним сечением ($\xi < 1$), наибольшие напряжения возникают в точка наружного контура ($\xi = 1$) и $\tau_2$ по модулю убывает от торца $z = 0$ ($\eta = 1$) к торцу $z = H$ ($\eta = 2$). При тонком сечении ($R \approx R_1, \xi_1 \approx 1$) напряжения приблизительно совпадают в точках внутреннего и внешнего контуров. Это согласуется с выводами для однородного случая. Аналогичные выводы относятся и к смещениям, что следует из формул (1.2), (3.11).

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Ломакин В.А.* Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976. 368 с.
2. *Лехницкий С.Г.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М.: Наука, 1971. 240 с.
3. *Назаров Г.И., Пучков А.А.* К задаче о кручении полого кругового цилиндра с переменными модулями сдвига // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 5. С. 871–873.
4. *Назаров Г.И., Пучков А.А.* Кручение осесимметричного анизотропного тела со смешанными краевыми условиями на боковой поверхности // ПММ. 1972. Т. 36. Вып. 6. С. 1094–1099.
5. *Назаров Г.И., Пучков А.А.* К задаче о кручении неоднородного тела вращения с переменными модулями сдвига // Прикл. механика. 1973. Т. 9. Вып. 3. С. 32–37.
6. *Крылов А.Н.* Лекции о приближенных вычислениях. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 400 с.
7. *Бергман С.* Интегральные операторы в теории линейных уравнений с частными производными. М.: Мир, 1964. 306 с.
8. *Назаров Г.И.* Точное решение уравнений газовой динамики // Изв. АН СССР. МЖГ. 1968. № 3. С. 113–120.


Киев

Поступила в редакцию
18.I.1994